ке O, ось O_{x_n} является прямой асимптотического направления для эники γ_n, ось O_{x_k} является прямой асимптотического направления для проекции эники γ_n на k-ую соприкасающуюся плоскость в точке O вдоль координатной плоскости $O_{x_{k+1} \dots x_n}$ при $k = 2, \dots, n-1$. Заметим, что, как следует из [4, pr. 6.1], определённый выше канонический базис совпадает с экви-аффинным базисом, предложенным D. Davis для изучения аффинных кривых.

Библиографический список

1. Поликанова И.В. Об аффинной эквивалентности параболических дуг // Сборник научных статей международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования», Барнаул, 11–14 ноября, 2014 – Барнаул, – С. 344–346.
2. Поликанова И.В. О линиях в n-мерном аффинном пространстве с аффинно-эквивалентными дугами // МАК-2015: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015.– С. 34–38.
3. Поликанова И.В. Асимптотическое направление эники // Научное электронное издание: Сборник научных статей международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования» – 2017. Барнаул, 14-17 ноября, – 2017. – С. 317–320.
4. Davis D. Generic affine differential geometry of curves in R^{n} // Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A, – 2006. – P. 1195–1205.

УДК 514.752

О восстановления поверхности по заданной сумме главных радиусов кривизны

Т.Д. Туканаев
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, г. Астана

Введем в пространстве E^{n+1} прямоугольную декартову систему координат $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$. Пусть S^n – единичная n-мерная сфера в E^{n+1}, центр которой совпадает с началом координат. Полусферу, соответствующую $x_{n+1} > 0$, обозначим S_+^n. Спроектируем координатную сеть $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на плоскости $E^n : x_{n+1} = 1$ на полусферу S_+^n, получим координатную сеть $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Будем рассматривать класс гиперповерхностей $\tilde{\Phi}$, имеющих сферическим изображением полусферу S_{+}^{n}. Пусть $H(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ – опорная функция. Используя положительную однородность первой степени функции $H(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, получим

$$h = \frac{1}{x_{n+1}} H(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = H\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1\right).$$

Положим $u_1 = \dfrac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \quad u_n = \dfrac{x_n}{x_{n+1}}$, тогда имеем $h = h(u_1, \ldots, u_n) = H(u_1, \ldots, u_n, 1)$.

Назовем функцию $h(u_1, \ldots, u_n)$ также опорной функцией. Очевидно, каждая гиперповерхность $\tilde{\Phi}$ биективно отображается на гиперповерхность Φ, которая задается уравнением $h = h(u)$, где $u = (u_1, \ldots, u_n)$.

По опорной функции $h(u)$ гиперповерхность $\tilde{\Phi}_i$ восстанавливается по формулам

$$\begin{cases} x_i = h_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \\ x_{n+1} = h - \sum\limits_{i=1}^{n} u_i h_i \end{cases},$$

где $h_i = \dfrac{\partial h}{\partial u_i}, \quad h_{ij} = \dfrac{\partial^2 h}{\partial u_i \partial u_j}$ [1, с. 280].

Пусть заданы выпуклые гиперповерхности $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$, имеющие сферическим изображением полусферу S_{+}^{n}. Соответствующие им опорные функции $h^1(u), h^2(u) \in C^2$ пусть удовлетворяют следующим условиям:

$$h^1(u) < h^2(u), \quad \lim_{\sqrt{\Sigma u_i^2} \to \infty} \left(h^2 - h^1\right) = 0.$$

Сумму главных радиусов кривизны гиперповерхности $\tilde{\Phi}_i\ (i = 1, 2)$ обозначим через $\phi^i\ (i = 1, 2)$. Пусть выполнено неравенство

$$\phi^2(u) < \phi^1(u).$$

Рассмотрим следующую задачу: пусть в каждой точке гиперплоскости E^n определена функция $\phi(u) \in C^{0,\lambda}$. Требуется доказать существование и единственность гиперповерхности $\tilde{\Phi}$, восстанавливаемой по $h(u)\in C^{2,\lambda}$, сумма главных радиусов кривизны которой равна заданной функции $\phi(u)\in C^{0,\lambda}$, причем, если функция $\phi(u)$ удовлетворяет неравенствам

$$\phi^2(u)\le\phi(u)\le\phi^1(u)$$

всюду на гиперплоскости E^n, то опорная функция h, задающая гиперповерхность $\tilde{\Phi}$, удовлетворяет условию

$$h^1(u)\le h(u)\le h^2(u).$$

Поставленная задача аналитически сводится к решению всюду на гиперплоскости E^n линейного эллиптического уравнения

$$\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n}u_i^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1+u_i^2\right)h_{ii}+\sum_{\substack{s,t=1\\ s\neq t}}^{n}u_s u_t h_{st}\right]=\phi(u),$$

где $\phi(u)\in C^{0,\lambda}$ удовлетворяет неравенствам $\phi^2(u)\le\phi(u)\le\phi^1(u)$. Будем искать решение в классе функции $C^{2,\beta}$ на E^n, удовлетворяющее условию $h^1(u)\le h(u)\le h^2(u)$.

Для решения этой задачи будем следовать методу, предложенному в [2, с. 96]. Суть метода заключается в том, что гиперплоскость E^n аппроксимируется расширяющейся последовательностью концентрических замкнутых шаров, в каждом из которых решается соответствующая задача Дирихле. Из последовательности решений извлекается подпоследовательность, сходящаяся к решению исходной задачи. Имеет место

Теорема 1. Пусть всюду на E^n задана функция $\phi(u)\in C^{0,\lambda}$, удовлетворяющая неравенствам $\phi^2(u)\le\phi(u)\le\phi^1(u)$. Тогда существует единственное решение $h(u)$ эллиптического уравнения, удовлетворяющее неравенствам $h^1(u)\le h(u)\le h^2(u)$, причем $h(u)$ из класса $C^{2,\lambda}$.

Очевидно, что по опорной функции $h(u)$ восстанавливается единственная гиперповерхность $\tilde{\Phi}$ по вышеуказанным формулам такая, что сумма ее главных радиусов кривизны в каждой точке гиперплоскости E^n совпадает с заданной функцией $\phi(u)$. Гиперповерхность $\tilde{\Phi}$, вообще говоря, может быть нерегулярной.

Регулярность поверхности в трехмерном случае обеспечивается следующей теоремой [3, с. 20].

Теорема 2. Пусть F – незамкнутая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, заданная опорной функцией $p(\bar{n}) \in C^4$, определяемой в некоторой области Ω единичной сферы S^2 и пусть $\phi(\bar{n})$ сумма главных радиусов кривизны поверхности F в точке с нормалью $\bar{n}$. Тогда если в Ω выполняются условия: $\phi \in C^2, \phi > 0, \phi - \phi_{ss} > 0$, где ϕ_{ss} – вторая производная ϕ по длине дуги любой геодезической на сфере S^2, то поверхность F регулярна.

Библиографический список

1. Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е. Введение в дифференциальную геометрию «в целом». – М.: Наука, 1973. – 440 с.

2. Пуолокайнен Т.М. Гиперповерхность с данной плотностью интегральной средней кривизны в E^{n+1} // Вопросы дифференциальной геометрии «в целом» :межвузовский сборник научных трудов. – Ленинград, ЛГПИ, 1983. – С. 96–104.

3. Кантор Б.Е., Туканаев Т.Д. О регулярности решения незамкнутой задачи Кристоффеля // Задачи геометрии в целом для погруженных многообразии : межвузовский сборник научных трудов. – Санкт-Петербург, РГПУ, 1991. – С. 20–26.

УДК 514.75

Инверсия псевдосферы

М.А. Чешкова

АлтГУ, Барнаул

Псевдосфера (поверхность Бельтрами) это поверхность постоянной отрицательной кривизны, образована вращением трактрисы около её асимптоты.

Уравнения псевдосферы имеют вид [1, с. 104]

$$\begin{aligned} r(u,v) = (&a\sin(u)\cos(v), a\sin(u)\sin(v), \\ &a(\ln tg(u/2) + \cos(u))). \end{aligned} \tag{1}$$