кости E^n совпадает с заданной функцией $\phi(u)$. Гиперповерхность $\tilde{\Phi}$, вообще говоря, может быть нерегулярной.

Регулярность поверхности в трехмерном случае обеспечивается следующей теоремой [3, с. 20].

Теорема 2. Пусть F – незамкнутая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, заданная опорной функцией $p(\bar{n}) \in C^4$, определяемой в некоторой области Ω единичной сферы S^2 и пусть $\phi(\bar{n})$ сумма главных радиусов кривизны поверхности F в точке с нормалью $\bar{n}$. Тогда если в Ω выполняются условия: $\phi \in C^2, \phi > 0, \phi - \phi_{ss} > 0$, где ϕ_{ss} – вторая производная ϕ по длине дуги любой геодезической на сфере S^2, то поверхность F регулярна.

Библиографический список

1. Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е. Введение в дифференциальную геометрию «в целом». – М.: Наука, 1973. – 440 с.

2. Пуолокайнен Т.М. Гиперповерхность с данной плотностью интегральной средней кривизны в E^{n+1} // Вопросы дифференциальной геометрии «в целом» :межвузовский сборник научных трудов. – Ленинград, ЛГПИ, 1983. – С. 96–104.

3. Кантор Б.Е., Туканаев Т.Д. О регулярности решения незамкнутой задачи Кристоффеля // Задачи геометрии в целом для погруженных многообразии : межвузовский сборник научных трудов. – Санкт-Петербург, РГПУ, 1991. – С. 20–26.

УДК 514.75

Инверсия псевдосферы

М.А. Чешкова

АлтГУ, Барнаул

Псевдосфера (поверхность Бельтрами) это поверхность постоянной отрицательной кривизны, образована вращением трактрисы около её асимптоты.

Уравнения псевдосферы имеют вид [1, с. 104]

$$r(u,v) = (a\sin(u)\cos(v), a\sin(u)\sin(v), \\ a(\ln tg(u/2) + \cos(u))). \qquad (1)$$

Гауссова кривизна псевдосферы постоянна и равна $-\frac{1}{a^2}$, u – угол между осью Oz и касательной к меридиану, $u = \pi/2$ – ребро псевдосферы.

Построим псевдосферу (рисунок 1), где

$$a = 4,\ u \in [\pi/24, \pi/2], v \in [0, 2\pi].$$

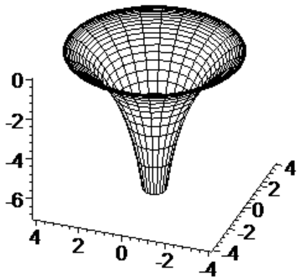

Рисунок 1 – Псевдосфера

Рассмотрим инверсию [2, с. 482]

$$r^* - r_0 = \frac{m^2(r - r_0)}{< r - r_0, r - r_0 >} \qquad (2)$$

относительно сферы радиуса m с центром r_0.

Центр инверсии поместим на ось псевдосферы. Положим, для определенности, $r_0 = (0,0,0)$. Построим инверсию псевдосферы (рисунок 2).

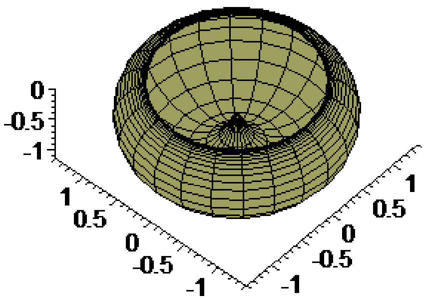

Рисунок 2 – Инверсия псевдосферы

Получаем «вывернутую псевдосферу».

Чтобы исследовать взаимоположения псевдосферы и ее инверсии, рассмотрим параметр m.

Возможны три случая.

Случай первый: $m<a$. Положим $m=2$, построим псевдосферу (светлая) и её инверсию (темная) (рисунок 3).

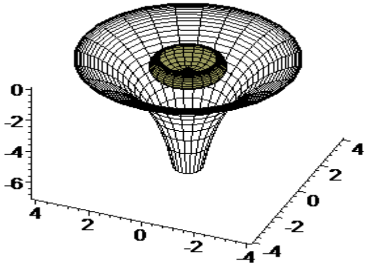

Рисунок 3 – Псевдосфера и её инверсия $m<a$

Случай второй: $m=a$. Положим $m=4$, построим псевдосферу (светлая) и её инверсию (темная) (рисунок 4).

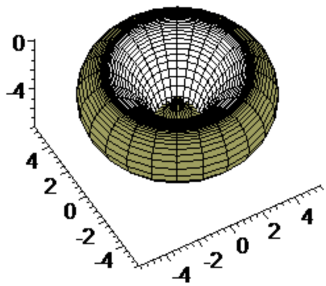

Рисунок 4 – Псевдосфера и её инверсия $m=a$

Случай третий: $m>a$. Положим $m=5$, построим псевдосферу (светлая) и её инверсию (темная) (рисунок 5).

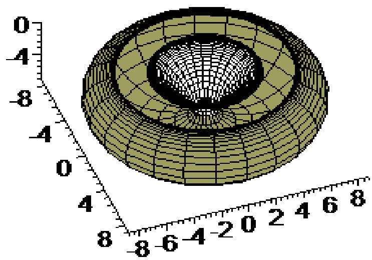

Рисунок 5 – Псевдосфера и её инверсия $m > a$

Библиографический список

1. Поздняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. – М. : Изд-во МГУ, 1990. – 384 с.

2. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. – М. : Изд-во Наука, 1966. – 647 с.

УДК 514.75

К геометрии бутылки Клейна на сфере S^3 в E^4

М.А. Чешкова

АлтГУ, г. Барнаул

Рассмотрим тор Клиффорда в E^4

$$\rho(u,v) = (\cos(u), \sin(u), \cos(v), \sin(v))$$

и обмотку тора

$$\rho(u) = (\cos(\frac{u}{2}), \sin(\frac{u}{2}), \cos(u), \sin(u)).$$

Так как $\rho(u) = \rho(u+4\pi)$, то вектор-функция $s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho_1(u))$, где $\rho_1(u) = \rho(u+2\pi)$ есть 2π-периодическая не равная нулю, а вектор-функция $l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho_1(u))$ есть 2π-антипериодическая.

Имеем

$$s(u) = (0, 0, \cos(u), \sin(u)), l(u) = (\cos(\frac{u}{2}), \sin(\frac{u}{2}), 0, 0).$$