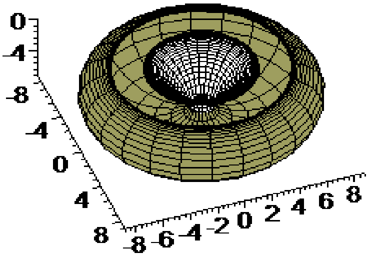

Рисунок 5 – Псевдосфера и её инверсия $m > a$

Библиографический список

1. Поздняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. – М. : Изд-во МГУ, 1990. – 384 с.

2. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. – М. : Изд-во Наука, 1966. – 647 с.

УДК 514.75

К геометрии бутылки Клейна на сфере S^3 в E^4

М.А. Чешкова

АлтГУ, г. Барнаул

Рассмотрим тор Клиффорда в E^4

$$\rho(u,v) = (\cos(u), \sin(u), \cos(v), \sin(v))$$

и обмотку тора

$$\rho(u) = (\cos(\frac{u}{2}), \sin(\frac{u}{2}), \cos(u), \sin(u)).$$

Так как $\rho(u) = \rho(u + 4\pi)$, то вектор-функция

$s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho_1(u)),$ где $\rho_1(u) = \rho(u + 2\pi)$

есть 2π-периодическая не равная нулю, а вектор-функция

$l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho_1(u))$ есть 2π-антипериодическая.

Имеем

$$s(u) = (0, 0, \cos(u), \sin(u)), l(u) = (\cos(\frac{u}{2}), \sin(\frac{u}{2}), 0, 0).$$

Определим поверхность KL уравнением

$$r(u,v)=\cos(v)s(u)+\sin(v)l(u), \qquad (1)$$

$$u\in[-\pi,\pi], v\in[-\pi,\pi]..$$

Теорема 1. *Поверхность KL топологически эквивалентна бутылке Клейна.*

Доказательство. Рассмотрим бутылку Клейна как фактор-пространство [Фоменко 7, с.75]

$[-\pi,\pi]X[-\pi,\pi]/[(-\pi,-v)\approx(\pi,v),(u,-\pi)\approx(u,\pi)]$. Так как

$s(u+2\pi)=s(u), l(u+2\pi)=-l(u)$, то

$r\ (-\pi,-v)=r(\pi,v), r(u,-\pi)=r(u,\pi)$, и поверхность

KL определяет модель бутылки Клейна.

Теорема 2. *Если кривая $\rho=\rho(u)$ есть обмотка тора Клиффорда, то поверхность KL есть минимальная поверхность на сфере.*

Доказательство.

Из (1) следует

$$r_u=\cos(v)s'(u)+\sin(v)l'(u),$$

$$r_v=-\sin(v)s(u)+\cos(v)l(u),$$

$$g_{22}=(r_v,r_v)=1, g_{12}=0, g_{11}=\cos(v)^2+\frac{1}{4}\sin(v)^2,$$

$$g=\det(g_{ij})=g_{11}.$$

Поместим начало координат центр сферы S^3. Обозначим через n_1,n_2 – орты нормалей к поверхности $KL\subset S^3\subset R^4$.

Имеем

$$n_1=r(u,v)=\cos(v)s(u)+\sin(v)l(u),$$

$$n_2=\frac{1}{\sqrt{4g}}(4\cos(v)l'(u)-\sin(v)s'(u)).$$

$$\nabla_i^{\perp}n_\alpha=0, \alpha=1,2.$$

Определим операторы [2, с. 22] A_1, A_2 :

$$(r_i, A_{\alpha j}{}^k r_k)=(r_{ij}, n_\alpha), \alpha=1,2.$$

Имеем

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2g\sqrt{g}} \\ \dfrac{1}{2g\sqrt{g}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор

$$\eta = \frac{1}{2}(tr(A_1)n_2 + tr(A_2)n_2)$$

есть вектор средней нормали поверхности KL в E^4 [2, с. 40], а вектор $\eta^* = \frac{1}{2}tr(A_2)n_2$ есть вектор средней нормали поверхности KL в S^3 (3, с.11). Так как $tr(A_2) = 0$, то поверхность KL в S^3 минимальная.

Минимальная в S^3 поверхность KL относится к классу поверхностей Лаусона [4]:

$$\Psi(x, y) = (\cos(\alpha x)\cos(y), \sin(\alpha x)\cos(y), \cos(x)\sin(y),$$
$$\sin(x)\sin(y)), \alpha > 0.$$

Библиографический список

1. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию. – М., 1995.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. – М. : Наука, 1981.
3. Chen B. Geometry of submanifolds and its applications // Sci.Univ. – Tokyo, 1981.
4. Lawson H.B.Jr. Complete minimal surfaces in S^3 // Ann. Math. – 1970. – V. 2. – P. 335–374.