Библиографический список

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. – М., 1987.
2. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М., 1971.
3. Кучмент Л.С., Демидов В.Н., Мотовилов Ю.Г. Формирование речного стока. Физико-математические модели. М., 1983.
4. Папин А.А., Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49. – № 4 (290).
5. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск, 1983.
6. Антонцев С.Н., Папин А.А. Приближенные методы решения задач двухфазной фильтрации Доклады Академии наук СССР. – 1979. – Т. 247. – № 3.
7. С. Н. Кружков, С. М. Сукорянский, Краевые задачи для систем уравнений типа двухфазной фильтрации; постановка задач, вопросы разрешимости, обоснование приближенных методов // Матем. сб. – 1977. Т. 104(146), № 1(9). – С. 69–88.
8. Алексеева С.В., Папин А.А., Одномерная задача о внутренней эрозии грунта // Ломоносовские чтения на Алтае. – 2017.
9. Papin A. A., Sibin A. N. Model isothermal internal erosion of soil // J. Phys.: Conf. Ser. Volume 722, conference 1, 2016. p. 1-8.

УДК 517.95 + 519.63

Одномерная задача фильтрации несжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде

Р.А. Вирц, А.А. Папин
АлтГУ, г. Барнаул

Постановка задачи

В работе изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа

$$\frac{\partial \varphi \rho_f}{\partial t} + div\left(\varphi \vec{v}_f \rho_f\right) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_s(1-\varphi)}{\partial t} + div\left((1-\varphi)\overrightarrow{v_s}\ \rho_s\right) = 0, \tag{2}$$

$$\varphi\left(\overrightarrow{v_f} - \overrightarrow{v_s}\right) = -k(\varphi)\left(\nabla p_f + \rho_f \vec{g}\right), \tag{3}$$

$$div\, v_s = -a_1(\varphi)p_e - a_2(\varphi)\left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \overrightarrow{v_s}\cdot p_e\right), \tag{4}$$

$$p_e = p_{tot} - p_{f,} \tag{5}$$

$$\nabla p_{tot} - \rho_{tot}\,\vec{g} = 0, \quad (6)$$

$$p_{tot} = \varphi p_f + (1-\varphi)p_s, \quad \rho_{tot} = \varphi\rho_f + (1-\varphi)\rho_s. \quad (7)$$

рассматриваемая в области $(\vec{x}, t) \in Q_T = \Omega \times (0, \mathrm{T})$, $\Omega \in R^n$ при краевых и начальных условиях

$$\vec{v_s}\,|_{\partial Q_T} = \vec{v_f}\,|_{\partial Q_T} = 0, \;\; \phi\,|_{t=0} = \phi^0(x). \quad (8)$$

Система (1)–(7) описывает нестационарное движение жидкости в вязкой пористой среде. Для описания процесса используются законы сохранения массы для каждой из фаз, закон Дарси, реологическое соотношение, уравнения баланса сил [1–4]. Здесь $\rho_f, \rho_s, \vec{v_f}, \vec{v_s} -$ соответственно плотности и скорости жидкой и твердой фаз, $\varphi -$ пористость, $p_e -$ эффективное давление, $p_{tot} -$ общее давление, $p_f, p_s -$ соответственно давления жидкой и твердой фаз, $\rho_{tot} -$ плотность двухфазной среды; $k(\varphi) = k\varphi^n/\mu -$ коэффициент фильтрации, $a_1(\varphi) = \varphi^m/\eta -$ коэффициент объемной вязкости, $a_2(\varphi) = \varphi^b/\beta_\varphi -$ коэффициент объемной сжимаесмости; $k, \eta -$ проницаемость и вязкость твердой среды; $\mu -$ динамическая вязкость жидкости; $m, n, \beta_\varphi, b -$ параметры твердой среды. Плотности жидкой и твердой фаз считаются постоянными. Близкие по структуре системы рассматривались в работах [5–8].

В одномерном виде в массовых переменных Лагранжа система (1) – (7) принимает вид [9]

$$\frac{\partial(1-\varphi)}{\partial t} + (1-\varphi)^2\frac{\partial v_s}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi}{1-\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\varphi\big(v_f - v_s\big)\Big) = 0, \quad (10)$$

$$\varphi\big(v_f - v_s\big) = -k(\varphi)\left((1-\varphi)\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g\right), \quad (11)$$

$$(1-\varphi)\frac{\partial v_s}{\partial x} = a_1(\varphi)p_e - a_2(\varphi)\frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad (12)$$

$$(1-\varphi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot}g. \quad (13)$$

Второе уравнение системы с учетом закона Дарси принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\phi)\left((1-\phi)\,\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g\right)\right) = 0. \quad (14)$$

Далее рассмотрим случай когда $a_2(\phi) = 0$. Из (7) и (11) следует уравнение

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{\partial\phi}{\partial t} = -a_1(\phi)\big(p_{tot} - p_f\big) = -a_1(\phi)p_e.$$

Это уравнение можно представить в виде

$$p_{tot} - p_f = -\frac{\partial G(\phi)}{\partial t}, \tag{15}$$

где функция $G(\phi)$ определяется равенством

$$\frac{\partial G}{\partial\phi} = \frac{1}{a_1(\phi)(1-\phi)}.$$

Уравнение (14) с учетом (13) и (15) перепишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\phi)\left((1-\phi)\frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x\partial t} - g\big(\rho_{tot} + \rho_f\big)\right)\right).$$

В безразмерных переменных последнее уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) = \lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi^n(1-\phi)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\phi^m(1-\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right.$$
$$\left. - \varepsilon\phi^n\left(\frac{\rho_f}{\rho_s} + (1-\phi) + \frac{\phi\rho_f}{\rho_s}\right)\right),$$

где $\lambda = \frac{k\eta}{\mu L^2}$, $\varepsilon = \frac{gTL\rho_s}{\eta}$ – безразмерные параметры.

С учетом закона Дарси и граничных условий (8) приходим к задаче для отыскания функций p_e и ϕ:

$$p_e = -\frac{1}{\phi^m(1-\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad \phi\,|_{t=0} = \phi^0(x), \tag{16}$$

$$\frac{p_e\phi^m}{1-\phi} = \lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi^n\left((1-\phi)\frac{\partial p_e}{\partial x} + \varepsilon\left(\frac{\rho_f}{\rho_s} + (1-\phi) + \frac{\phi\rho_f}{\rho_s}\right)\right)\right) = 0, \tag{17}$$

$$\left(\phi^n\left((1-\phi)\frac{\partial p_e}{\partial x} + \varepsilon\left(\frac{\rho_f}{\rho_s} + (1-\phi) + \frac{\phi\rho_f}{\rho_s}\right)\right)\right)\Big|_{x=0,x=1} = 0. \tag{18}$$

Вопросы разрешимости задачи (16)–(18) в разных классах рассмотрены в работах [9–10]. В настоящей работе основное внимание уделено численному решению нелинейной задачи. Для численного анализа удобным оказалось сведение уравнения третьего порядка к системе двух уравнений соответственно первого и второго порядка. Для решения уравнения второго порядка с переменными коэффициентами использовалась однородная разностная схема. Для уравнения первого порядка использовался двухэтапный метод Рунге – Кутта. Полученное решение удовлетворяет физическому принципу максимума.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16 – 08 – 00291.

Библиографический список

1. Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media // Elseiver, New York, 1972.

2. Connoly J.A.D., Podladchikov Y.Y.Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta, 11 (1998), 55–84.

3. Morency S., Huismans R.S., Beaumont C, Fullsack P. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // Journal of Geophysical Redearch, 112(2007), B10407.

4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. – М., 1987. – Ч. 1.

5. Simpson M., Spiegelman M., Weinstein C.I. Degenerate dispersive equations arising in the stady of magma dynamics // Nonlinearty, 20(2007), 21 49.

6. Tokareva M. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – Т. 722, №1. – С. 012037.

7. Токарева М.А., Вирц Р.А. Аналитическое и численное исследование задачи фильтрации в пороупругой среде // Сборник трудов Всероссийской конференции по математике «МАК-2016». – 2016. – С. 75–79.

8. Токарева М.А., Вирц Р.А. Автомодельная задача фильтрации в пороупругой среде // Материалы международной школы-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае». – Барнаул, 2015.

9. Papin A.A., Tokareva M.A. On Local solvability of the system of the equation of one dimensional motion of magma // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. – 2017. – Т. 10, № 3. – С. 385–395.

10. Папин А.А., Токарева М.А. Локальная разрешимость в классе непрерывных функций задачи о движении жидкости в деформируемой пористой среде // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2017. – №4. – С. 136–140.