

5. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N., Shefer I.A. Analysis of an exact solution of problem of the evaporative convection (Review). Part I. Plane case // J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys. – 2018. – Vol. 11 (2). – P. 178–190.

6. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. – Москва-Ленинград: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952. – 256 с.

7. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. – 1966. – № 3. – С. 69–72.

8. Пухначёв В.В. Теоретико-групповая природа решения Бириха и их обобщения. Симметрии и дифференциальные уравнения // Сб. науч. тр. – Красноярск: РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. моделирования. – 2000. – С. 180–183.

9. Napolitano L.G. Plane Marangoni Poiseuille flow of two immiscible fluids // Acta Astronautica. – 1980. – No. 7. – P. 461–478.

10. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Stability of the exact solutions describing the two-layer flows with evaporation at interface // Fluid Dynamics Research. – 2016. – Vol. 48 (6). – 061408. – P. 1–25.

УДК 517.95 + 532.582

Исследование формирования вынужденных гравитационных волн в канале, покрытом битым льдом

К.Н. Завьялова, К.А. Шишмарев

АлтГУ, г. Барнаул

В данной работе исследуется формирование волн в канале покрытом битом льдом, вызванных движением внешней нагрузки. Внешняя нагрузка моделируется гладкой локализованной функцией. Исследуется установившееся решение в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой с постоянной скоростью. Битый лед моделируется уравнением тонкой пластины с нулевой жесткостью. Основными уравнениями являются дифференциальное уравнение колебаний битого льда и уравнение Лапласа для потенциала скорости течения жидкости в канале. Данные уравнения замыкаются граничными условиями непротекания на твердых границах канала, кинематическим и динамическим условиями на границе битый лед – жидкость. Предложен алгоритм полуаналитического решения рассматриваемой задачи, где решение представляется в виде аналитических формул, полученных методами аппроксимации подынтегральных функций.

Рассматривается прогиб битого льда в канале вызванный движением внешней нагрузки вдоль канала. Канал имеет прямоугольное сечение с глубиной H , ($0 \geq z \geq -H$), и шириной $2L$, ($-L \leq y \leq L$). В направлении оси x канал не ограничен. Канал занят жидкостью плотностью ρ_l . Рассматривается невязкая и несжимаемая жидкость, покрытая битым льдом постоянной толщины. Внешняя нагрузка моделируется локализованным гладким распределением давления над верхней поверхностью битого льда. Задача прогиба битого льда в канале формулируется в рамках линейной теории гидроупругости. Прогиб $w(x, y, t)$ описывается уравнением колебания битого льда [1, 2]

$$Mw_{tt} = -P(x, y, t) + p(x, y, 0, t) \quad (1)$$

$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0),$$

где $M = \rho_i h_i$ – масса битого льда на единицу площади, ρ_i – плотность льда, $p(x, y, 0, t)$ – гидродинамическое давление, действующее на нижнюю поверхность битого льда, $P(x, y, t)$ – внешнее давление, t – время. Внешнее давление движется вдоль центральной линии канала и моделируется гладкой функцией $P(x, y, t)$

$$P(x, y, t) = P_0 P_1\left(\frac{x-Ut}{L}\right) P_2\left(\frac{y}{L}\right) \quad (2)$$

$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L),$$

$$P_1(\tilde{x}) = (\cos(\pi c_1 \tilde{x}) + 1)/2 \quad (c_1 |\tilde{x}| < 1),$$

$$P_1(\tilde{x}) = 0 \quad (c_1 |\tilde{x}| \geq 1), \quad \tilde{x} = (x - Ut)/L,$$

$$P_2(\tilde{y}) = (\cos(\pi c_2 \tilde{y}) + 1)/2 \quad (c_2 |\tilde{y}| < 1),$$

$$P_2(\tilde{y}) = 0 \quad (c_2 |\tilde{y}| \geq 1), \quad \tilde{y} = y/L,$$

где c_1, c_2 – безразмерные параметры внешней нагрузки, характеризующие размер зоны давления. Гидродинамическое давление на границе лед-жидкость удовлетворяет линеаризованному уравнению Бернулли

$$p(x, y, 0, t) = -\rho_l \varphi_t - \rho_l g w \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty, -L < y < L),$$

где g – гравитационное ускорение, $\varphi(x, y, z, t)$ – потенциал скорости течения, удовлетворяющий уравнению Лапласа в области течения

$$\Delta \varphi = 0 \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L)$$

и граничным условиям

$$\varphi_z = w_t \quad (z = 0), \quad \varphi_y = 0 \quad (y = \pm L),$$

$$\varphi_z = 0 \quad (z = -H). \quad (4)$$

Задача (1)–(4) записывается в системе безразмерных переменных, движущейся вместе с нагрузкой. В этой системе решение не зависит от времени.

Метод решения

Задача (1)–(4) в безразмерных переменных решается методом преобразования Фурье вдоль канала

$$w^F(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{-i\xi x} dx.$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (1), и решая полученное уравнение относительно w^F , получим

$$w^F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-P_1^F(\xi) N_n}{1 - h\alpha F r^2 \xi^2 - \frac{h F r^2 \xi^2}{G t_n}} \cos(\pi n y).$$

Функцию $w(x, y)$ найдем с использованием обратного преобразования Фурье

$$w(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n y) \int_0^{\infty} a_n(\xi) \cos(x\xi) d\xi.$$

Для численного решения пользуемся свойством преобразования Фурье, $w^F \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, и ограничиваем интегрируемую область конечным отрезком. Данный отрезок разбиваем на конечное число шагов N с шагом $\Delta\xi$ и ограничиваем количество функций в $w^F = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\xi) \psi_i(y)$ конечным числом N_{mod}

$$w(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{N_{mod}} \cos(\pi n y) \sum_{m=1}^N \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} a_n(\xi) \cos(x\xi) d\xi.$$

Коэффициенты $a_n(\xi)$ в последних интегралах приближаются линейными функциями на каждом отрезке по ξ . В итоге приходим к аналитической формуле для вычисления $w(x, y)$

$$w(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{N_{mod}} \cos(\pi n y) \sum_{m=1}^N V_m, \quad 5)$$

где

$$V_m = \left[\frac{a_n(\xi_{m+1})}{x} (\sin(x\xi_{m+1}) + \frac{\cos(x\xi_{m+1}) - \cos(x\xi_m)}{\Delta\xi x}) - \frac{a_n(\xi_m)}{x} (\sin(x\xi_m) + \frac{\cos(x\xi_{m+1}) - \cos(x\xi_m)}{\Delta\xi x}) \right].$$

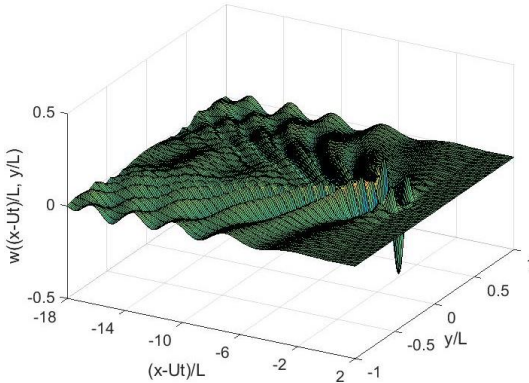


Рисунок 1 – Пример вычисления трехмерных прогибов битого льда

На рисунке 1 приведены тестовые вычисления трехмерных прогибов битого льда. Результаты приведены для следующих параметров задачи: глубина канала 2м, ширина 10м, толщина битого льда 0.1м, плотности льда и жидкости 917 и 1024 кг/м³, соответственно. Заметим, в результате отсутствия упругих напряжений, видимое образование аналога клина Кельвина для получаемых волн.

Заключение

Рассмотрена задача движения внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль канала по битому льду. Задача решена в системе координат, движущейся совместно с нагрузкой. Предложен алгоритм численного решения задачи. Для каждой скорости движения нагрузки существует счетное число волн, распространяющихся с этой же скоростью от нагрузки в канале. Решением будет комбинация этих волн с разной амплитудой.

Работа посвящена памяти профессора кафедры дифференциальных уравнений Сергея Семеновича Кузикова.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291.

Библиографический список

1. Шишмарев К.А., Завьялова К.Н. Свободные и вынужденные волки в канале, покрытом битым льдом // МАК: Математики – Алтайскому краю : сборник трудов всероссийской конференции по математике. – 2017. – С. 96–99.
2. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Applied Ocean Research. – 2016. – Т. 59. – С. 313–326.