

в слабом обобщенном смысле, принципу максимума

$$\|u\|_{L^\infty(G_{T,S})} \leq \max \{ \|u_0^1\|_{L^\infty(\mathbb{E}^1)}, \|u_0^2\|_{L^\infty(\mathbb{E}^2)}, \|u_S^2\|_{L^\infty(\mathbb{E}^2)} \},$$

начальному условию (1b) в смысле сильного следа и *энтропийным граничным условиям*

$$q_b(u_0^{\text{tr},2}) - q_b(u_0^2) - \eta'(u_0^2) (b(u_0^{\text{tr},2}) - b(u_0^2)) \leq 0 \text{ в } \Gamma_0^2,$$

$$q_b(u_S^{\text{tr},2}) - q_b(u_S^2) - \eta'(u_S^2) (b(u_S^{\text{tr},2}) - b(u_S^2)) \geq 0 \text{ в } \Gamma_S^2.$$

Через $(\eta, q_a, q_b, \mathbf{q}_\varphi)$ обозначается *выпуклая энтропийная четверка*: $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ — произвольная выпуклая функция, $q'_a = a'\eta'$, $q'_b = b'\eta'$, $\mathbf{q}'_\varphi = \varphi'\eta'$. Через $u_0^{\text{tr},2}$ и $u_S^{\text{tr},2}$ обозначаются следы решения энтропийного неравенства на поверхностях Γ_0^2 и Γ_S^2 , соответственно.

Заметим, что из энтропийного неравенства непосредственно следует уравнение (1a).

Финансовая поддержка. Работа поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (код проекта III.22.4.2) и РФФИ (грант № 18-01-00649).

Библиографический список

1. Kuznetsov I.V. Genuinely nonlinear forward-backward ultra-parabolic equations // Sib. Elect. Math. Rep. – 2017. – Vol. 14. – P. 710–731.
2. Kuznetsov I.V. and Sazhenkov S.A. Quasi-solutions of genuinely nonlinear forward-backward ultra-parabolic equations // J. Phys.: Conf. Ser. – 2017. – No. 894 012046. – P. 1–7.
3. Otto F. Initial-boundary value problem for a scalar conservation law // C. R. Acad. Sci. Paris Ser I Math. – 1996. – Vol. 322. – P. 729–734.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

УДК 539.3

Деформирование упругой пластины конечной толщины под действием подвижной нагрузки

О.В. Марченко, А.М. Сергеева

Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

Разрабатывается математическая модель для исследования напряженно-деформированного состояния деформируемой внешней воз-

действием упругой изотропной пластины конечной толщины, находящейся под воздействием системы нагрузок.

Применяя теорию малых упругих деформаций и эйлерову систему координат, записывается система дифференциальных уравнений.

Уравнение движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i^t = I_i^t \quad (1)$$

$i, j, k = 1, 2, 3; t = 1, 2, \dots, n$ – номер нагрузки;

$$I_i^t = \rho_t (\dot{v}_i + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}) \text{ – в случае подвижной нагрузки;}$$

$$I_i^t = \rho_t (v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}) \text{ – в случае стационарного движения нагрузки;}$$

$$I_i^t = 0 \text{ – в случае неподвижной нагрузки.}$$

Закон Гука

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G \varepsilon_{ij}; \text{ где } \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}.$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Уравнение теплопроводности (только для пластины)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) = 0; i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) используется суммирование по повторяющимся индексам. θ – температура льда, $\rho = \rho(\theta)$ – плотность льда, $G = G(\theta)$ – модуль сдвига льда, σ_{ij} – тензор напряжений, ε_{ij} – тензор деформаций, v_i, F_i – проекции скорости перемещений и удельной объемной силы по координатным осям $x_i, i = 1, 2, 3, \lambda$ – коэффициент теплопроводности, $\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial \tau}$, τ – время деформации.

Применение модели рассматривается на примере решения задачи о деформировании упругой изотропной пластины, материал которой –

пресный лед. Ледяная пластина претерпевает деформирующее воздействие со стороны ледокольного судна в виде приставки [1], схематично представленной на рисунке 1.

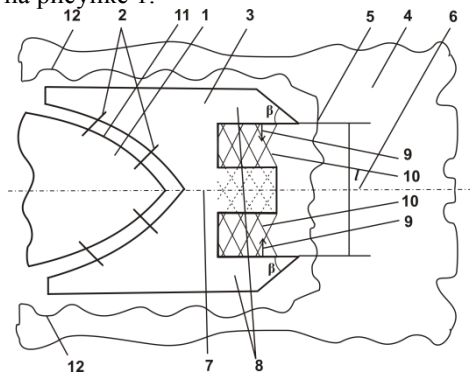


Рисунок 1 – Схема устройства для разрушения ледяного покрова

В носовой оконечности судна 1 при помощи креплений 2 устанавливают ледокольную приставку 3, перед которой в ледяном покрове 4 создают его свободную кромку 5. Приставку 3 выполняют в виде плавающей емкости, в диаметральной плоскости 6 которой устанавливают форштевень 7, наклонный под углом к горизонтально поверхности, а по бортам – боковые ножи 8 с углом в плане β и наклоненные к горизонту под таким же, но отрицательным по отношению к форштевню углом. Благодаря такой геометрической форме форштевня и боковым ножам при их контакте со свободной кромкой 5 в ледяном покрове между ножами 8 будут возникать сжимающие усилия 9. При достаточном расстоянии l и усилии 9 это приведет к потере устойчивости формы участка льда 10 и его разрушению. Отломанный участок льда 10 от сплошного льда 4 притопится наклонным днищем приставки 3, и его обломки бортами 11 судна 1 раздвинутся под кромку образовавшегося канала 12.

В работе решается пространственная задача о внедрении в лед двух клиньев и вертикальной нагрузки, которые вызывают деформацию льда. Деформируемые среды (клин и лед) считаются упругими и изотропными. При постановке и решении задачи массовые силы не учитывались. Решение уравнения теплопроводности приведено в работах [2, 3]. Для проведения исследований применялся численный метод [4], в соответствии с которым область разбивалась на объемные ортогональные ячейки конечных размеров, для которых записывалась система уравнений в разностном виде. Расчет деформации ледяной пластины приведен в работе [5].

Результаты численных исследований показали, что ледокольное устройство может быть использовано для разрушения ледяного покрова толщиной 0,5 м, причем оптимальная скорость устройства равна 8 км/ч. Предложенная модель и результаты исследования могут быть использованы для разработок инновационных способов разрушения льда и прокладывания судоходных каналов в зимние периоды на реках северных регионов.

Библиографический список

1. Патент РФ №2229415. Устройство для разрушения ледяного покрова / Горкунов Э.С., Колмогоров В.Л., Козин В.М., Одинокое В.И. Бюл. №15. Оpubл. 27.05.2004.

2. Сергеева А.М., Одинокое В.И., Марченко О.В. Математическое моделирование процессов деформирования пластины конечной толщины, находящейся под действием системы нагрузок // Приоритеты и научное обеспечение технологического прогресса : сборник статей Международной научно-практической конференции. Уфа : Аэтерна, 2016. – С. 100–102.

3. Сергеева А.М., Марченко О.В. Применение математической модели деформирования пластины конечной толщины для исследования напряженно-деформированного состояния ледяного покрова // Инновационные исследования: Проблемы и направления развития : сборник статей Международной научно-практической конференции: в 2 ч. Ч. 1. Уфа : МЦИИ ОМЕГА САЙНС, 2016. – С. 8–11.

4. Одинокое В.И. Численное исследование процесса деформации материалов бескоординатным методом. Владивосток: Дальнаука, 1995. – 168 с.

5. Марченко О.В., Сергеева А.М. Об особенностях деформирования тяжелой упругой пластины конечной толщины под действием подвижной нагрузки применительно к изучению прочности ледяного покрова // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния, 2016. № 4 (30). – С. 61–72.