

### Библиографический список

1. Franosch T., Grimm M., Belushkin M., Mor F. M., Foffi G., Forr L., Jenev S. Resonances arising from hydrodynamic memory in Brownian motion // Nature. – 2011. – № 478. – P. 85–88.
2. Макаров И. А. Численное моделирование встречных потоков вязкоупругой жидкости с использованием метода корреляции давления // Механика жидкости и газов. – 2011. – №6. – С. 31–42.
3. Директор Л.Б., Майков И.Л. Численное моделирование динамики капли вязкой жидкости // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2009. – № 5. – С. 101–109.
4. Leonov A.I., Prokunin A.N. Nonlinear Phenomena in Flows of Viscoelastic Polymer Fluids // New York: Chapman and Hall, 1994. – P. 297.

УДК 532.59

### Численное моделирование динамики областей перемешанной жидкости ненулевой плавучести в линейно стратифицированной среде

*Н.П. Мошкин<sup>1,4</sup>, А.В. Фомина<sup>2</sup>, Г.Г. Черных<sup>3,4</sup>*

<sup>1</sup>ИГ им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск;

<sup>2</sup>Новокузнецкий институт (филиал) КемГУ, г. Новокузнецк;

<sup>3</sup>ИВТ СО РАН, г. Новосибирск; <sup>4</sup>НГУ, г. Новосибирск

Эволюция пятен ненулевой плавучести (термиков) играет важную роль при формировании тонкой структуры вод океана, образовании облаков и во многих других природных явлениях [1]. В работе построена численная модель плоского термика и представлены результаты расчетов, иллюстрирующие картину генерируемых термиком внутренних волн.

Для описания течения используются хорошо известные уравнения Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g \frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $u, w$  – компоненты вектора скорости в направлении осей  $x, z$  декартовой системы координат (ось  $x$  направлена горизонтально;  $z$  направлена вертикально вверх противоположно силе тяжести);  $\rho$  – плотность;  $\rho_1 = \rho - \rho_s$  – дефект плотности;  $\rho_s = \rho_s(z)$  – плотность невозмущенной среды;  $\rho_0 = \rho_s(0)$ ;  $p_1$  – отклонение давления от гидростатического;  $g$  – ускорение силы тяжести. Стратификация предполагается линейной и устойчивой  $d\rho_s/dz = -a\rho_0$ ,  $a = const > 0$ .

Граничные и начальные условия заданы следующим образом

$$\rho_1 = u = w = 0, \quad x^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad t \geq 0; \quad \rho = \rho_0, \quad (x, z) \in A,$$

$$\rho = \rho_s(z), \quad (x, z) \notin A, \quad t = 0; \quad u = w = 0, \quad -\infty < x, z < \infty, \quad t = 0.$$

Область  $A = \{(x, z) : x^2 + (z + z_c)^2 \leq R^2\}$  – область полностью перемешанной жидкости. Система уравнений (1)–(3), начальные и граничные условия могут быть обезразмерены с использованием масштаба

длины  $R$  и периода Вайсяля-Брента  $T = 1/\sqrt{ag}$ ,  $a = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_s}{dz} \Big|_{z=0}$  как

масштаба времени. Кроме того может быть использовано представление  $\rho = \rho_0 a R \bar{\rho}$  (здесь  $\bar{\rho}$  обозначает обезразмеренную плотность). В результате в обезразмеренных уравнениях вместо кинематической вязкости  $\nu$  появится  $1/Re = \nu T/R^2$ , а вместо  $g$  появится 1. В дальнейшем, по возможности, у обезразмеренных величин будут оставлены те же обозначения, что и у размерных. Для прослеживания динамики области перемешанной жидкости привлекалось уравнение переноса концентрации  $C(x, z, t)$  недиффундирующей пассивной примеси, которое решались совместно с системой (1)–(3)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + w \frac{\partial C}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) дополнено начальными и граничными условиями:

$$C(x, z, 0) = const, \quad (x, z) \in A, \quad C(x, z, 0) = 0, \quad (x, z) \notin A, \quad t = 0;$$

$$C(x, z, t) = 0, \quad x^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad t > 0.$$

Граница перемешанной области определяется по положению разрыва в пассивном скаляре.

При численном интегрировании задачи граничные условия из бесконечности сносились на границы достаточно большого прямоугольника. Из соображений симметрии решение отыскивалось в правой половине  $x \geq 0$ .

Для численного решения используются конечно-разностные схемы на однородной прямоугольной сетке с размером ячеек  $h_x$ ,  $h_z$  в горизонтальном и вертикальном направлениях, соответственно. Для расщепления уравнений Навье-Стокса (1)–(3) на несколько последовательных дробных шагов по времени применяется явный проекционный метод. Конвективные члены в уравнениях (1)–(4) аппроксимируются с использованием нелинейной монотонной схемы высокого порядка с коррекцией потоков. На удаленных границах ставились безотражательные краевые условия. Результаты численного сравнения различных монотонных схем повышенного порядка на примере течения, возникающего в результате коллапса области перемешанной жидкости с нулевой плавучестью представлены в [2].

Результаты расчётов, представленные ниже, получены на сетке с числом узлов  $400 \times 800$ ;  $h_x = h_z = 0.05$ ,  $Re = 10^3$ .

Форма пятна, определяемая по концентрации пассивной примеси, представлена на рисунке 1 для момента времени  $t = 8.0$  и трех значений начального заглубления  $z_c = -1.0; -0.5; 0.0$ . Можно отметить, что горизонтальный размер всплывающего пятна несколько превышает горизонтальный размер пятна, коллапсирующего из равновесного положения.

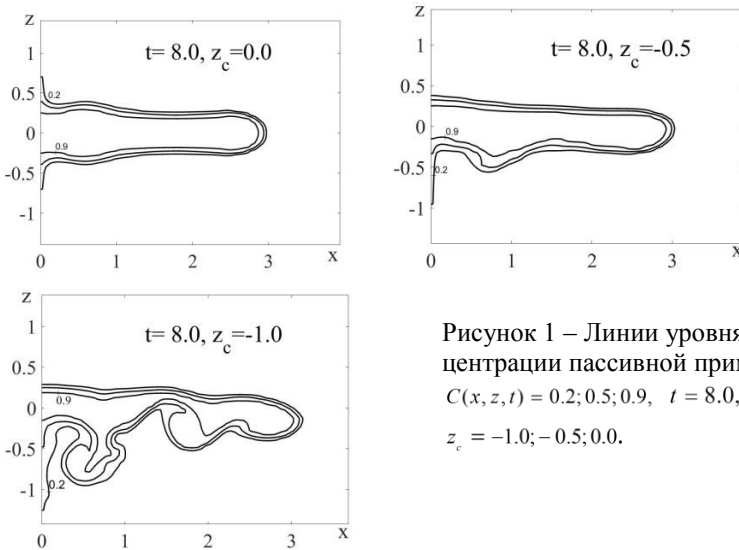


Рисунок 1 – Линии уровня концентрации пассивной примеси  $C(x, z, t) = 0.2; 0.5; 0.9$ ,  $t = 8.0$ , для  $z_c = -1.0; -0.5; 0.0$ .

Характеризующие внутренние волны линии  $\rho_1(x, z^*, t)$  для  $z^* = 3.0; -3.0$  представлены на рисунке 2. Термик генерирует внутренние волны существенно большей амплитуды в сравнении с волнами, индуцируемыми коллапсом пятна, находящегося в начальный момент на уровне равновесной плотности. Следует отметить, что величины амплитуд  $\rho_1(x, -3.0, 10)$ , почти в четыре раза превосходят амплитуды  $\rho_1(x, 3.0, 10)$ . Для оценки точности разностной схемы и её эффективности расчёты были проведены на последовательности сеток.

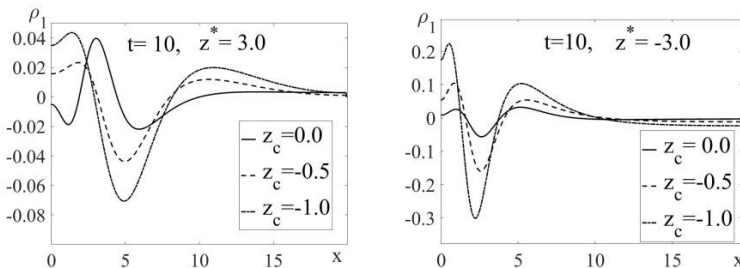


Рисунок 2 – Линии  $\rho_1(x, z^*, 10)$ ,  $z^* = 3.0; -3.0$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 17-01-00332.*

### Библиографический список

1. Антропов И.В., Кронрод В.А., О зависимости процесса эволюции термика в стратифицированной среде от начальных условий // Изв. АН СССР, ФАО, 1989. – Т.25. – №12. – С. 1261–1266.
2. Moshkin, N.P., Narong K., Chernykh, G.G., A comparative study of the performance of high-resolution non-oscillating advection schemes in the context of the motion induced by mixed region in a stratified fluid // Journal of Engineering Thermophysics. 2011. – vol. 20. – Iss. 4. – P. 468–486.

**УДК 517.95**

## Математические модели многофазной фильтрации

**А.А. Панин**

*АлтГУ, г. Барнаул*

Методы динамики многофазных сред широко применяются для математического моделирования различных технологических и природ-