УДК 532.135 + 532.137

Начально-краевые задачи течения вязкоупругой среды Максвелла

А.Г. Петрова
АлтГУ, г. Барнаул

Система уравнений, описывающих движение несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла с производной Яуманна в качестве инвариантной производной имеет вид [1]:

$$\begin{gathered}\rho(\mathbf{v}_t+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})=-\nabla p+\operatorname{div}\mathbf{S},\ \operatorname{div}\mathbf{v}=0,\\ \tau\left(\mathbf{S}_t+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{S}-\mathbf{W}\cdot\mathrm{S}+\mathrm{S}\cdot\mathbf{W}\right)+\mathrm{S}=2\mu\mathbf{D}.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь ρ – плотность среды, μ– динамическая вязкость, τ – время релаксации. Эти величины далее полагаются постоянными. **v** – вектор скорости**;** p — отклонение давления от некоторого среднего значения $p_0 > 0$**; D** – тензор скоростей деформаций**; S** – вязкоупругая составляющая тензора напряжений; **W —**антисимметричная часть тензора **∇v.**

Отметим, что система совместна с дополнительным соотношением

$$Tr\,\mathbf{S}=0$$

при условии, что это соотношение выполнено при t=0 [2].

Выбор объективной производной Яуманна в реологическом соотношении обусловлен наличием энергетического тождества [2]

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\frac{1}{2}\left(\rho|\mathbf{v}|^2+\frac{\tau}{2\mu}\mathbf{S}:\mathbf{S}\right)d\Omega=\int_\Sigma\mathbf{v}(-p\mathbf{n}+\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})d\Sigma-\frac{1}{2\mu}\int_\Omega\mathbf{S}:\mathbf{S}\,d\Omega,\tag{2}$$

где **n –** внешняя нормаль к поверхности Σ, ограничивающей объем Ω, справедливость которого удается доказать лишь в этом случае. Если $\mathbf{v}\big|_{\partial\Omega\times[0,t)}=0$, энергетическое тождество (2) приобретает вид

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\frac{1}{2}\left(\rho|\mathbf{v}|^2+\frac{\tau}{2\mu}\mathbf{S}:\mathbf{S}\right)d\Omega=-\frac{1}{2\mu}\int_{\Omega_t}\mathbf{S}:\mathbf{S}\,d\Omega.$$

Отметим, что исследование задачи в трехмерном случае началось сравнительно недавно [3].

В случае линеаризации в окрестности состояния покоя независимо от вида объективной производной уравнения движения принимают следующий вид:

$$\rho\mathbf{v}_t=-\nabla p+\operatorname{div}\mathbf{S},\ \operatorname{div}\mathbf{v}=0,\tag{3}$$

$$\tau\mathbf{S}_t+\mathrm{S}=2\mu\mathbf{D}.\tag{4}$$

Дополним систему (3)–(4) следующими начальными и граничными условиями:

$$\mathbf{v}\big|_{t=0} = \boldsymbol{\varphi}(x,y,z), \mathbf{v}_t\big|_{t=0} = \boldsymbol{\psi}(x,y,z), \mathbf{v}\big|_{\partial\Omega\times[0,t)} = 0; \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi} = \nabla\cdot\boldsymbol{\psi} = 0,\ \boldsymbol{\varphi}\big|_{\partial\Omega\times[0,t)} = 0, \tag{5}$$

$$\mathbf{S}\big|_{t=0} = \mathbf{S}_0(x,t,z); \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega\times[0,t)} = h(x,y,z)e^{-t/\tau}; \quad \int_{\partial\Omega} hd\Sigma + \int_{\Omega} \mathrm{divdiv}\mathbf{S}dV = 0. \tag{7}$$

Утверждение 1.([3]). При достаточно гладких граничных и начальных данных существует классическое решение задачи (3)–(7). Классическое решение единственно.

Единственность доказывается на основе энергетического тождества (2), а разрешимость – путем сведения начально-краевой задачи к последовательному решению следующих задач:

1) начально краевой задачи для уравнений

$$\tau\mathbf{v}_{tt} + \mathbf{v}_t = \upsilon\triangle\mathbf{v} = 0, \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{8}$$

с условиями (5);

2) задачи Коши (4), (6)для определения компонент тензора S;

3) задачи Неймана (7) для уравнения Пуассона

$$\Delta p = \mathrm{divdiv}\mathbf{S}_0 \exp(-t/\tau).$$

Будем предполагать выполненным условие “гиперболичности” системы [3]:

$$m = \frac{\mu}{\tau} \geq K\max\{S_{ij}\} \tag{9}$$

с некоторой постоянной *K>0.* Отметим, что для классического решения это условие выполнено на малом интервале времени, если в начальный момент имело место строгое неравенство.

Будем исследовать классическое решение задачи с условиями прилипания на границе области течения в случае отсутствия конвективных членов в реологическом соотношении (второе из уравнений (1), сохранив их в векторном уравнении движения. В этом случае система управляющих уравнений принимает вид

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0,\ \rho(\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}_t = -\nabla p + \mathrm{div}\,\mathbf{S},\ \tau\left(\mathbf{S}_t - \mathbf{W}\cdot\mathrm{S} + \mathrm{S}\cdot\mathbf{W}\right) + \mathrm{S} = 2\mu\mathbf{D} \tag{10}$$

Теорема. Классическое решение задачи (10) с условиями прилипания на границе области течения, дополненной достаточно гладкими начальными данными для всех искомых функций, при условии (9) единственно в классе функций

$$\mathbf{v} \in \left(C^2\left(\bar{\Omega}\times[0,T]\right)\right)^3, \mathbf{S} \in \left(C^1\left(\bar{\Omega}\times[0,T]\right)\right)^6.$$

Доказательство основано на замене первого уравнения (1) на уравнение

$$\rho(\mathbf{v}_{tt} + (\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})_t + (\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})/\tau) + \nabla(p_t + p/\tau) = \mathrm{div}(\mathbf{S}_t + \mathbf{S}/\tau),$$

являющееся обобщением (8) на нелинейный случай. Единственность доказывается при помощи интегральных оценок, в частности, тождества (2).

Библиографический список

1. Астарита Дж. Марручи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978.
2. Пухначев В. В. Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. – 2010. – Т. 51, № 4. – С. 116–126.
3. Мелешко С. В., Петрова А.Г., Пухначев В.В. Характеристические свойства системы уравнений несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. – 2017. – Т. 58, № 5. – С. 44–50.

УДК 535.529:541.64

Исследование характера течений полимерного расплава в канале с внезапным сужением

Г.В. Пышнограй[1], А.Е. Кузнецов[2]

[1]АлтГУ, г. Барнаул; [2]АлтГПУ, г. Барнаул

На сегодняшний день существует достаточное количество реологических уравнений состояния, которые позволяют описать те или иные наблюдаемые в экспериментах явления. При этом до сих пор не создана единая теория течения полимеров. В связи с этим необходимо исследовать существующие модели для определения их адекватности для описания сложных течений полимерных растворов и расплавов, возникающих, в частности, в областях со сложной геометрией.

В данной работе в качестве определяющего реологического соотношения используется модифицированная модель Виноградова-Покровского, которая замыкает уравнения сохранения импульса и массы [1, 2]. В безразмерном виде уравнения можно записать следующим образом: