УДК 517.9 + 51-76

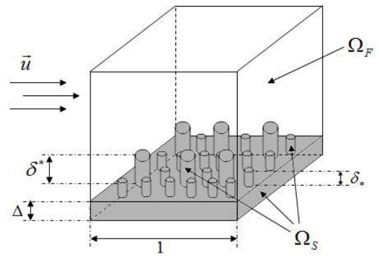
Обобщенная HBS-модель обтекания листа растения воздухом

С.А. Саженков[1,2], Е.В. Саженкова[3]
[1]ИГиЛ СО РАН, [2]НГУ, Новосибирск, Хэйлунцзянский ун-т, Харбин; [3]НГУЭУ, Новосибирск

1. Предисловие. Опираясь на известную в теории пограничного слоя модель стационарного ламинарного обтекания плоской пластины с одним приваренным к ней перпендикулярно штырем [1], очень простая и при этом востребованная постановка для описания аэродинамики в окрестности листа растения была предложена в статье [2]. На ее основании проведен ряд несложных численных расчетов. Для изучения молекулярных механизмов развития органов растений методами системной биологии требуется создание более общей модели, учитывающей тонкую структуру трихом (ворсинок) на поверхности листа. В настоящей заметке формулируется такая модель, получаемая методом усреднения системы «вязкий газ – упругая пластина» с тонкой двойной периодической упругой структурой, прикрепленной к поверхности пластины. Эта постановка обобщает модель К.-Х. Хоффмана, Н.Д. Боткина и В.Н. Старовойтова (HBS-model), построенную в [3]. Достаточно обширный обзор литературы, подробная постановка исходной задачи на микроскопическом уровне, основы метода усреднения Аллера-Бриана и некоторые промежуточные на пути построения итоговой модели результаты изложены в [4, 5].

2. Описание механической системы на микроскопическом уровне. Рассматривается линеаризованная модель динамики совместного движения упругой пластины с щетинистой поверхностью (листа растения с трихомами) и вязкого сжимаемого газа (воздуха). Без ограничения общности считается, что пластина и газ заполняют трехмерный куб $\Omega=\{0<x_1,x_2,x_3<1\}$. Пластина расположена на дне куба и занимает слой $\Omega_s=\{0<x_3<\Delta\}$ ($\Delta<1$). Щетинки (трихомы) моделируются в виде упругих цилиндров, достаточно часто периодически расположенных на гладкой поверхности пластины. Предполагается наличие цилиндров двух размеров: цилиндры меньшей высоты и меньшего диаметра расположены на порядок или несколько порядков чаще, чем цилиндры большей высоты и большего диаметра. Высоты цилиндров фиксированы и принимают два постоянных значения δ_* и

δ^*, $\delta_* < \delta^*$, $\Delta + \delta^* < 1$. Расстояние между центральными осями двух соседних больших цилиндров есть $O(\varepsilon)$, а двух соседних маленьких – $O(\varepsilon^2)$, где ε – малый положительный параметр.



Движение газа описывается классическими нестационарными уравнениями Стокса, а движение упругой компоненты – классическими нестационарными уравнениями Ламе. На поверхности соприкосновения выполняются условия непрерывности скоростей и напряжений. В системе уравнений и условий на поверхности искомыми являются поле скоростей $\boldsymbol{u}_\varepsilon = \boldsymbol{u}_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ и давление $p_\varepsilon = p_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ в газе и поле перемещений $\boldsymbol{v}_\varepsilon = \boldsymbol{v}_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ частиц пластины с цилиндрами. Модель замыкается заданием начальных условий $\boldsymbol{u}_\varepsilon|_{t=0} = \boldsymbol{u}^0$, $p_\varepsilon|_{t=0} = p^0$, $\boldsymbol{v}_\varepsilon|_{t=0} = \boldsymbol{v}^0$, $(\partial \boldsymbol{v}_\varepsilon / \partial t)|_{t=0} = \boldsymbol{w}^0$ на распределения скорости газа, давления в газе, перемещения и скорости пластины с цилиндрами, соответственно, и заданием условия покоя поверхности пластины и условия распределения скорости воздуха на внешней границе Ω.

Полная точная постановка исходной задачи сформулирована в [4,5], следуя оригинальному изложению в [3, п. 2.1]. Существование и единственность слабого обобщенного решения задачи при любом малом фиксированном $\varepsilon > 0$ вытекает из известных результатов в [6, глава 1, п. 9.1].

В вышеописанной постановке учитывается каждый отдельный цилиндр (трихома, щетинка). Следовательно, она является моделью *на микроскопическом уровне*.

3. О предельном переходе при $\varepsilon \to 0$ и асимптотической декомпозиции. Целью работы является предельный переход в микроскопической модели при $\varepsilon \to 0$ и вывод эффективных соотношений, описывающих механическую систему на *макроскопическом уровне*. Для этого сначала вводится единообразное описание в терминах искомых скоростей: распределение перемещений $\boldsymbol{v}_\varepsilon$ в упругой компоненте заменяется на распределение скоростей $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ по формуле $\boldsymbol{v}_\varepsilon = \boldsymbol{v}^0 + J_t \boldsymbol{u}_\varepsilon$, где $(J_t\phi)(t) = \int\limits_0^t \phi(t')\,dt'$ для всевозможных интегрируемых ϕ. Затем устанавливается, что $\boldsymbol{u}_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \boldsymbol{u}$ по мере в $\Omega\times(0,T)$. Методом гомогенизации Аллера–Бриана выводится трехмасштабная усредненная модель, решением которой служат распределение макроскопической скорости $\boldsymbol{u}$, а также распределения мезоскопической и микроскопической скоростей $\boldsymbol{u}^{(1)}$ и $\boldsymbol{u}^{(2)}$ [4]. Наконец, производится асимптотическая декомпозиция, заключающаяся в разделении микро-, мезо- и макроскопического масштабов, и тем самым конструируется эффективная предельная система.

4. Обобщенная HBS-модель. (Эффективная предельная модель обтекания листа с трихомами воздухом.) В дополнение к Ω_s введем обозначения еще для трех слоев в Ω: $\Omega_{\delta_*} = \left\{\, \Delta < x_3 < \Delta+\delta_* \right\}$, $\Omega_{\delta^*} = \left\{\, \Delta+\delta_* < x_3 < \Delta+\delta^* \right\}$, $\Omega_f = \left\{\Delta+\delta^* < x_3 < 1\right\}$ и сформулируем предельную систему соотношений, которой удовлетворяет распределение скоростей $\boldsymbol{u} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \boldsymbol{u}_\varepsilon$.

В Ω_f выполняются классические уравнения Стокса вязкого газа:

$$\rho_F \mathbf{u}_t - \operatorname{div}_x\left(\mathbf{P}\nabla_x \mathbf{u}\right) = -\nabla_x p + \rho_F \mathbf{g}, \tag{1}$$

$$p = -\gamma^{-1} \operatorname{div}_x J_t \mathbf{u} + p^0, \tag{2}$$

$$\mathbf{P}\nabla_x \mathbf{u} = \left(\lambda \operatorname{div}_x \mathbf{u}\right)\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}_x\left(\mathbf{u}\right). \tag{3}$$

В Ω_{δ^*} и Ω_{δ_*} движение описывается нелокальными уравнениями динамики вязкоупругого тела:

$$\begin{aligned}
\rho_{\delta^*}\mathbf{u}_t - \operatorname{div}_x\Big(&\mathbf{V}_{0\delta^*} : \mathbf{D}_x(\mathbf{u}) + \mathbf{E}_{0\delta^*} : \mathbf{D}_x(J_t \mathbf{u}) \\
&+ \int_0^t \mathbf{V}_{1\delta^*}(t-\tau) : \mathbf{D}_x\big(\mathbf{u}(\tau)\big)d\tau + J_t \int_0^t \mathbf{E}_{1\delta^*}(t-\tau) : \mathbf{D}_x\big(\mathbf{u}(\tau)\big)d\tau \\
&+ \mathbf{L}_{\delta^*} p^0 + \mathbf{K}_{\delta^*} : \mathbf{D}_x\left(\mathbf{v}^0\right)\Big) = \rho_{\delta^*}\mathbf{g}, \qquad x \in \Omega_{\delta^*};
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{\delta_*}\mathbf{u}_t - \operatorname{div}_x\Big(&\mathbf{V}_{0\delta_*} : \mathbf{D}_x(\mathbf{u}) + \mathbf{E}_{0\delta_*} : \mathbf{D}_x(J_t \mathbf{u}) \\
&+ \int_0^t \mathbf{V}_{1\delta_*}(t-\tau) : \mathbf{D}_x\big(\mathbf{u}(\tau)\big)d\tau + J_t \int_0^t \mathbf{E}_{1\delta_*}(t-\tau) : \mathbf{D}_x\big(\mathbf{u}(\tau)\big)d\tau \\
&+ \int_0^t \left[\int_0^\tau \mathbf{V}_{2\delta_*}(t-\tau, \tau-\tau') : \mathbf{D}_x\big(\mathbf{u}(\tau')\big)d\tau'\right]d\tau \\
&+ J_t \int_0^t \left[\int_0^\tau \mathbf{E}_{2\delta_*}(t-\tau, \tau-\tau') : \mathbf{D}_x\big(\mathbf{u}(\tau')\big)d\tau'\right]d\tau
\end{aligned}$$

$$+\mathbf{L}_{\delta_*} p^0 + \mathbf{K}_{\delta_*} : \mathbf{D}_x\left(\mathbf{v}^0\right)\Big) = \rho_{\delta_*}\mathbf{g}, \quad x \in \Omega_{\delta_*}; \tag{5}$$

В Ω_s выполняются классические уравнения Ламе линейной упругости

$$\rho_S \mathbf{u}_t - \mathrm{div}_x\left(\mathbf{G} : J_t \nabla_x \mathbf{u} + \mathbf{G} : \nabla_x \mathbf{v}^0\right) = \rho_F \mathbf{g}. \tag{6}$$

Эта система дополняется краевыми условиями на u на внешней границе области Ω, условиями непрерывности полей скоростей и напряжений на поверхностях раздела слоев.

Таким образом, сконструирована замкнутая корректная гомогенная HBS-модель.

В (1)-(6) $\mathbf{V}_{0\delta_*}$ и $\mathbf{V}_{0\delta^*}$ – это тензоры мгновенной вязкости, $\mathbf{E}_{0\delta_*}$, $\mathbf{E}_{0\delta^*}$ – тензоры мгновенной упругости, $\mathbf{V}_{1\delta_*}(t)$, $\mathbf{V}_{1\delta^*}(t)$ и $\mathbf{V}_{2\delta_*}(t,\tau)$ – тензоры вязкой релаксации, $\mathbf{E}_{1\delta_*}(t)$, $\mathbf{E}_{1\delta^*}(t)$ и $\mathbf{E}_{2\delta_*}(t,\tau)$ – тензоры упругой релаксации. Все они являются тензорами четвертого порядка, определяются физическими характеристиками мезоскопической и микроскопической структур и считаются заданными. Матрицы $\mathbf{L}_{\delta_*}$, $\mathbf{L}_{\delta^*}$ и тензоры четвертого порядка $\mathbf{K}_{\delta_*}$, $\mathbf{K}_{\delta^*}$ также определяются физическими характеристиками мезоскопической и микроскопической структур и считаются заданными. Они зависят от t. Постоянные величины ρ_F, ρ_S, ρ_{δ_*} и ρ_{δ^*} – это средние заданные плотности среды в слоях Ω_f, Ω_s, Ω_{δ_*} и Ω_{δ^*}, соответственно.

Работа С.А. Саженкова поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (код проекта III.22.4.2) и РФФИ (грант № 18-01-00649).

Библиографический список

1. Goldstein S. (Editor). Modern Developments in Fluid Dynamics: Volume II. – New York: Dover Publication, 1965. – 702 pp.

2. Schreuder M.D.J., Brewer C.A., Heine C. Modelled influences of non-exchanging trichomes on leaf boundary layers and gas exchange // J.Theor. Biol. – 2001. – V. 210. – P. 23–32.

3. Hoffmann K.-H., Botkin N.D., Starovoitov V.N. Homogenization of interfaces between rapidly oscillating fine elastic structures and fluids // SIAM J.Appl. Math. – 2005. – Vol. 65, no.3. – P. 983–1005.

4. Саженков С.А., Шибанова Е.В. Исследование аэродинамики в окрестности листа растения с учетом опушения методом гомогениза-

ции Аллера-Бриана // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2016. – №1 (89). – С. 173–179.

5. Саженков С.А. Описание аэродинамики в окрестности листа растения с учетом опушения с помощью модифицированной HBS-модели // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования [Электронный ресурс]: сб. науч. ст. междунар. конф., 14-17 ноября 2017 г./ АлтГУ; [отв. ред. Е. Д. Родионов]. – Барнаул: АлтГУ, 2017. – 1 эл. опт. диск (DVD). – № гос. регистрации 0321704250. – С. 477–487.

6. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

УДК 551.345 + 539.3

Расчет физических характеристик почвогрунтов в процессе внутренней эрозии и прогноз их разрушения

А.Н. Сибин

АлтГУ, г. Барнаул

Процесс эрозии почвогрунтов имеет большое значение при решении прикладных задач в сельском хозяйстве: ирригация и дренаж сельскохозяйственных полей [1] и процесс внутренней эрозии, сопутствующий канальному орошению почвогрунтов [2]. Процесс эрозии необходимо учитывать в исследованиях, связанных с прогнозом распространения загрязнений, фильтрацией вблизи водохранилищ и других гидротехнических сооружений [3]. Более того, аналогичные проблемы, связанные с процессом эрозии грунта, возникают и в других областях, включая добычу нефти и газа [4].

В работе численно исследована двумерная задача внутренней суффозии в межмерзлотном водоносном горизонте. Фильтрация подземных вод происходит в водоносном горизонте, который соприкасается с промерзшим песчаным грунтом. В процессе оттаивания грунта и при достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения. В качестве математической модели использованы уравнения сохранения массы для воды, подвижных твердых частиц и неподвижного пористого скелета, а также закон Дарси для воды и подвижных твердых частиц и соотношение для интенсивности суффозионного потока. Задача сведена к системе из трех уравнений относительно пористости, приведенного давления и вырождающегося на решении уравнения для водонасыщенности. Почвогрунт моделируется как трехфазная сплошная пористая среда.