УДК 517.95

Корректность начально-краевых задач для уравнений фильтрации в пороупругих средах

М.А. Токарева
АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается система уравнений, описывающая одномерное нестационарное движение вязкой жидкости в деформируемой вязкой пористой среде в поле силы тяжести в случае полного уравнения баланса сил системы [1–4]:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\big((1-\phi)\rho_s v_s\big)=0,$$
$$\frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_f\phi v_f)=0, \tag{1}$$

$$\phi(v_f-v_s)=-k(\phi)\Big(\frac{\partial p_f}{\partial x}-\rho_f g\Big), \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x}=-\frac{1}{\xi(\phi)}p_e, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(2\eta(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x}\Big)=\rho_{tot}g+\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\rho_{tot}=\phi\rho_f+(1-\phi)\rho_s,\ p_e=p_{tot}-p_f,\ p_{tot}=\phi p_f+(1-\phi)p_s.$$

Будем искать решение данной системы в области $(x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T),\Omega=(0,1)$, при краевых и начальных условиях

$$v_s|_{x=0,x=1}=v_f|_{x=0,x=1}=0,\ \ \rho_f|_{t=0}=\rho^0(x),\ \ \phi|_{t=0}=\phi^0(x), \tag{5}$$

или

$$v_s|_{x=0,x=1}=v_f|_{x=0,x=1}=0,\ \ \ \phi|_{t=0}=\phi^0(x). \tag{6}$$

Здесь ϕ – пористость; ρ_f,ρ_s,v_s,v_f – соответственно истинные плотности и скорости фаз; p_e – эффективное давление; p_{tot} – общее давление; ρ_{tot} – общая плотность; g – плотность массовых сил; $k(\phi)$ – коэффициент фильтрации, $\xi(\phi)$ – коэффициент объемной вязкости (заданные функции), η – динамическая вязкость твердой фазы. Задача записана в эйлеровых координатах (x, t). Истинная плотность твердой фазы ρ_s принимается постоянной. Система (1)–(4) является замкнутой, если $p_f=p_f(\rho_f)$ или $\rho_f=const$. В общем случае искомыми являются величины $\phi,\rho_f,v_s,v_f,p_f,p_s$.

В обозначениях функциональных пространств следуем [5]: $C^{k+\alpha,m+\beta}(Q_T)$ – пространство Гельдера, где k,m - натуральные, $(\alpha,\beta)\in(0,1]$, с нормой $||f||_{C^{k+\alpha,m+\beta}(Q_T)}$.

Определение 1. Решением задачи (1)-(5) называется совокупность функций $(p_f, v_f, v_s) \in C^{2+\alpha,\alpha/2}(Q_T)$, $(\phi,\ \rho_f) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$, $p_s \in C^{1+\alpha,\alpha/2}(Q_T)$ таких, что $0 < \phi < 1$, $\rho_f > 0$. Эти функции удовлетворяют уравнениям (1)–(5) и начальным и граничным условиям (5) как непрерывные в Q_T функции.

Теорема 1. Пусть данные задачи (1)–(5) подчиняются следующим условиям:

1) Функции $k(\phi), \xi(\phi)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $\phi \in (0,1), \rho_f > 0$, и удовлетворяют условиям

$$k_0^{-1}\phi^{q_1}(1-\phi)^{q_2} \leq k(\phi) \leq k_0\phi^{q_3}(1-\phi)^{q_4},$$
$$1/\xi(\phi) = a_0(\phi)\phi^{\alpha_1}(1-\phi)^{\alpha_2-1},$$
$$0 < R_1 \leq a_0(\phi) \leq R_2, \quad p_f = R\rho_f,$$

где R – известная положительная постоянная, $k_0, \alpha_i, R_i, i = 1,2$ - положительные постоянные, $q_1, \dots, q_4$ – фиксированные вещественные числа;

2) начальные условия ϕ^0, ρ^0 и функция g удовлетворяют следующим условиям гладкости: $\phi^0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), \rho^0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), g \in C^{1+\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$, и условиям согласования

$$((1-\phi^0)\frac{dp_f(\rho^0)}{dx} - \rho^0 g(x,0))|_{x=0,x=1} = 0,$$

а также удовлетворяют неравенствам

$$0 < m_0 \leq \phi^0(x) \leq M_0 < 1, 0 < m_1 \leq \rho^0(x) \leq M_1 < \infty,$$
$$0 < g(x,t) \leq g_0 < \infty, x \in \overline{\Omega},$$

где m_0, M_0, m_1, M_1, g_0 – известные положительные постоянные.

Тогда задача (1)–(5) имеет единственное локальное классическое решение, т.е. существует значение $t_0 \in (0,T)$ такое, что

$$(p_f, v_f, v_s) \in C^{2+\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_{t_0}), (\phi, \rho_f) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_{t_0}),$$
$$p_s \in C^{1+\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_{t_0}).$$

Более того $0 < \phi(x,t) < 1$, $\rho_f(x,t) > 0$ в $\bar{Q}_{t_0}$.

Определение 2. Решением задачи (1)–(4), (6) называется совокупность функций $(p_f, v_f, v_s) \in C^{2+\alpha,\beta}(Q_T)$, $\phi \in C^{2+\alpha,1+\beta}(Q_T)$, $p_s \in C^{1+\alpha,\beta}(Q_T)$, таких, что $0 < \phi < 1$. Эти функции удовлетворяют уравнениям (1)-(4) и начальным и граничным условиям (6) как непрерывные в Q_T функции.

Теорема 2. Пусть данные задачи (1)–(4), (6) подчиняются следующим условиям ($\rho_f = const$):

1) функции $k(\phi), \xi(\phi)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $\phi \in (0,1)$ и удовлетворяют условиям

$$k_0^{-1}\phi^{q_1}(1-\phi)^{q_2} \leq k(\phi) \leq k_0\phi^{q_3}(1-\phi)^{q_4},$$

$$\frac{1}{\xi(\phi)} = a_0(\phi)\phi^{\alpha_1}(1-\phi)^{\alpha_2-1}, \quad 0 < R_1 \leq a_0(\phi) \leq R_2 < \infty,$$

где $k_0, \alpha_i, R_i, i = 1,2$ – положительные постоянные, $q_1, \dots, q_4$ – фиксированные вещественные числа;

2) функция g и начальная функция ϕ^0 удовлетворяют следующим условиям гладкости

$$g \in C^{1+\alpha,\beta}(\bar{Q}_T), \quad \phi^0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T),$$

а также удовлетворяют неравенствам

$$0 < m_0 \leq \phi^0(x) \leq M_0 < 1, \quad |g(x,t)| \leq g_0 < \infty, \quad x \in \bar{\Omega},$$

где m_0, M_0, g_0 – известные положительные константы.

Тогда задача (1)–(4), (6) имеет единственное локальное классическое решение, т.е существует значение t_0 такое, что

$$(p_f, v_f, v_s) \in C^{2+\alpha,\beta}(\bar{Q}_{t_0}), \ \phi \in C^{2+\alpha,1+\beta}(\bar{Q}_{t_0}), \ p_s \in C^{1+\alpha,\beta}(\bar{Q}_{t_0}).$$

Более того $0 < \phi(x,t) < 1$ в $\bar{Q}_{t_0}$.

Теорема 3. Пусть дополнительно к условиям теоремы 2 функции $k(\phi), \xi(\phi)$ удовлетворяют условиям

$$k(\phi) = \frac{k}{\mu}\phi^n, \quad \xi(\phi) = \eta\phi^{-m}, n \geq 1, m \geq 1,$$

где k, μ, η – положительные постоянные.

Тогда для всех $t \in [0,T]$, $T < \infty$ существует единственное решение задачи (1) – (4), (6), причем существуют числа $0 < m_1 < M_1 < 1$ такие, что $m_1 \leq \phi(x,t) \leq M_1$, $(x,t) \in Q_T$.

При доказательстве вышеизложенных теорем используется переход к переменным Лагранжа [5]. Локальная разрешимость задачи (1)–(5) устанавливается с помощью теоремы Тихонова-Шаудера о неподвижной точке [7, с. 227], глобальная разрешимость задачаи (1)–(4), (6) устанавливается с использованием теории эллиптических уравнений [8]. Техника, используемая при доказательстве близка технике, используемой в работах [9, 10].

В работе доказана локальная теорема существования и единственности решения задачи в случае сжимаемой жидкости. В случае несжимаемой жидкости доказана теорема существования решения в целом по времени в гельдеровских классах.

Данный доклад посвящен памяти профессора кафедры дифференциальных уравнений Алтайского государственного университета Сергея Семеновича Кузикова.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ «Гидроупругие и термодинамические эффекты при взаимодействии пороупругого снежно-ледового покрова с конструкциями» №16-08-00291.

Библиографический список

1. Fowler A. Mathematical Geoscience. Springer-Verlag London Limited. 2011. – 904p.

2. McKenzie D.P. The generation and compaction of partial melts // J. Petrol. – 1984. – Vol. 25. – P. 713–765.

3. Morency C., Huismans R. S., Beaumont C., Fullsack P. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // Journal of Geophysical Research. – 2007. – Vol. 112.

4. Audet D.M., Fowler A.C. A mathematical for compaction in sedimentary basins // Geophys. J. Int. – 1992. – Vol. 110. – P. 577–590.

5. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 316 с.

6. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – Vol. 722.

7. Эдвардс, Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.

8. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

9. Папин А.А. Существование решения «в целом» уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. I. Постановка задачи и вспомогательные утверждения // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2006. – Т. IX, № 2. – С. 116–136.

10. Папин А.А. Существование решения «в целом» уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. II. результаты о разрешимости // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2006. – Т. IX, № 3. – С. 111–123.

УДК 519.6:539.3

Численное решение задачи консолидации Терцаги в программном комплексе Abaqus

А.В. Устюжанова, Г.В. Кравченко
АлтГУ, г. Барнаул

В данной работе демонстрируется применение программного комплекса Simulia Abaqus для получения численного решения задачи консолидации К. Терцаги [1].