

УДК 517.95 + 532.582

## Поведение прогибов ледового покрова в канале при больших временах

*К.А. Шишмарев*  
*АлтГУ, г. Барнаул*

В работе изучается нестационарное поведение ледового покрова в канале с вертикальными стенками. Прогиб льда вызван движением внешней нагрузки вдоль замороженного канала с постоянной скоростью. Эффект затухания волн, генерируемых движением нагрузки, в результате демпфирования не учитывается. Учет вязкости является важным для исследования прогибов льда, однако, вязкое демпфирование является не до конца изученным, и нет однозначного подхода к его моделированию. Модели ледового покрова без учета демпфирования являются менее физическими, однако, на основе этих моделей можно получить полезные на практике оценки для максимальных напряжений и прочность ледового покрова. Подобные оценки получены для движения нагрузки по неограниченному ледовому покрову. В данной работе предлагается метод определения прогибов ледового покрова и максимальных удлинений в ледовом покрове канала на основе асимптотического анализа получаемого решения рассматриваемой системы уравнений при больших временах.

Рассматриваются нестационарные гидроупругие волны, вызванные движением внешней нагрузки вдоль замороженного канала (см., например, [1]). Канал имеет прямоугольное сечение с конечными глубиной  $H$ ,  $-H < z < 0$ , и шириной  $2L$ ,  $-L < y < L$ . Вдоль стенок канал неограничен,  $-\infty < x < \infty$ . Канал наполнен невязкой и несжимаемой жидкостью с плотностью  $\rho_l$ . Поток течения жидкости, вызванный прогибом льда, потенциальный. Толщина льда  $h_i$  и плотность льда  $\rho_i$  считаются постоянными. Вертикальный прогиб ледового покрова  $w(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению тонкой упругой пластины с условиями жесткого защемления на стенках канала  $y = \pm L$ . Потенциал течения жидкости  $\varphi(x, y, z, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа, условиям непротекания на твердых стенках канала, и кинематическому и динамическому условиям на границе лед-жидкость. Внешняя нагрузка моделируется заданным гладким локализованным распределением давления.

Вопросы разрешимости совместной динамики льда и жидкости, исследовались, например в [2].

Рассмотренная начально-краевая задача решается с помощью преобразования Фурье вдоль канала. После этого, образ Фурье прогибов ледового покрова,  $w^F(\xi, y, t)$ , ищется в следующем виде

$$w^F(\xi, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\xi, t)\psi_n(\xi, y),$$

$$w^F(\xi, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, t)e^{-i\xi x} dx.$$

Здесь функции  $\psi_n(\xi, y)$  это моды колебаний ледового покрова в канале и  $a_n(\xi, t)$  – координаты этих мод. Функции  $\psi_n(k, y)$  были вычислены в [Korobkin et al. (2014)]. Они описывают гидроупругие волны, распространяющиеся вдоль канла [3]

$$w(x, y, t) = \text{Re}[A^n \psi_n(k, y)e^{i(kx - \omega_n t)}],$$

где  $\omega_n(k)$  – частота волны,  $k > 0$  – волновое число и  $A^n$  – амплитуда волны. Система дифференциальных уравнений для поиска  $a_n(\xi, t)$  выводится с помощью метода разделения переменных

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \omega_n^2(\xi) a_n = H_n(\xi) e^{-i\omega_n t},$$

$$H_n(\xi) = \frac{\int_{-L}^L P^F(\xi, y) \psi_n(\xi, y) dy}{\rho_l L \int_{-L}^L (\alpha \psi_n(\xi, y) + \varphi_n(\xi, y, 0)) \psi_n dy},$$

где  $P^F(\xi, y)$  – образ Фурье для заданного распределения внешнего давления,  $\alpha = (\rho_i h_i / \rho_l L)$  и  $\varphi_n(\xi, y, z)$  – потенциал течения жидкости, соответствующий моде  $\psi_n(\xi, y)$ . Последняя система дифференциальных уравнений решается аналитически для соответствующих начальных условий.

Прогиб ледового покрова  $w(x, y, t)$  определяется по формуле обратного преобразования Фурье, где

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_n(\xi, t) \psi_n(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^0 a_n(\xi, t) \psi_n(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi + \int_0^{\infty} a_n(\xi, t) \psi_n(\xi, y) e^{i\xi x} d\xi =$$

$$= \int_0^{\infty} H_n \psi_n \left( \frac{\xi U}{2\omega_n^2} \left[ \frac{e^{i(\xi x + \omega_n t)}}{\omega_n + \xi U} - \frac{e^{i(\xi x - \omega_n t)}}{\omega_n - \xi U} + \frac{e^{-i(\xi x + \omega_n t)}}{\omega_n + \xi U} - \frac{e^{-i(\xi x - \omega_n t)}}{\omega_n - \xi U} \right] + \frac{\cos(\xi(x - Ut))}{2(\omega_n^2 - \xi^2 U^2)} \right) d\xi.$$

В зависимости от скорости движения нагрузки  $U$ , некоторые интегралы в последней формуле имеют особые точки  $\omega_n(\xi) = \xi U$ . Однако, сумма этих интегралов регулярна и последняя формула может быть записана как сумма пяти интегралов, которые понимаются в главном значении Коши. Если интеграл не имеет особых точек, тогда он регулярный и его вклад в формирование прогибов льда имеет порядок  $O(1/t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Асимптотический вклад нерегулярных интегралов при больших временах состоит из двух частей: (а) часть, которая является четной по  $X$  и затухает при  $|X| \rightarrow \infty$ , (б) гидроупругие волны, описанные выше, с амплитудами  $A^n$  распространяющиеся от нагрузки. Для этих волн,  $k = \xi_m^n$ ,  $m = 1, 2$ , где  $\xi_m^n$  решения уравнения  $\omega_n(\xi) = \xi U$ ,  $\xi_1^n < \xi_2^n$ , и амплитуды  $A_m^n$  определяются по формуле

$$A_m^n = \frac{2\pi H_n(\xi_m^n)}{\xi_m^n U (c_g^n(\xi_m^n) - U)},$$

где  $c_g^n$  – групповая скорость  $n$ -ой моды гидроупругой волны в канале. Фазовые скорости этих волн равны скорости движения нагрузки  $U$ . Эти волны не распространяются от нагрузки в подвижной системе координат. Длинные волны с  $\xi_1^n$  расположены позади нагрузки, и короткие волны с  $\xi_2^n$  перед нагрузкой.

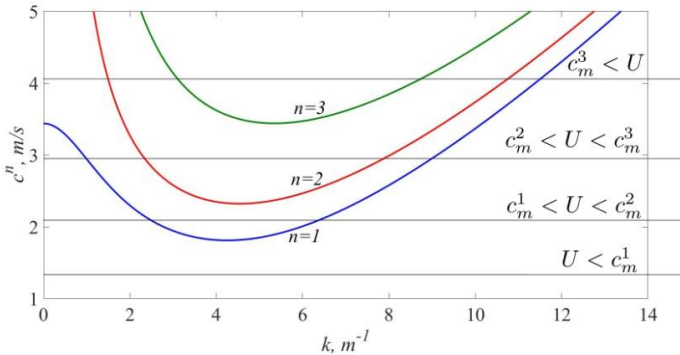


Рисунок 1 – Фазовые скорости для одной конфигурации канала и возможные случаи выбора скорости движения нагрузки

Вычисления проводились для одной конфигурации канала, а именно для параметров ледового бассейна в Приамурском государственном университете имени Шолом-Алейхема, где  $H = 1\text{ м}$ ,  $L = 1.5\text{ м}$ ,  $h_i = 3\text{ см}$ ,  $\rho_l = 1024\text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_i = 920\text{ кг/м}^3$ , модуль Юнга  $E = 4.2 \cdot 10^9\text{ Н/м}^2$ . Размер внешнего пятна давления равен 15 см.

### **Заключение**

Полученное точное разложение прогибов льда на симметричную часть, и части с длинными и короткими волнами позволяет оценить максимально возможные удлинения в ледовом покрове далеко впереди и позади нагрузки. При этом полученный профиль максимальных удлинений будет периодическим. В общем случае, для докритических скоростей ( $U > c_{\min}^1$ ), длинные волны распространяются позади, а короткие волны – впереди нагрузки. Фазовые скорости, в частности, значение  $c^1(0)$ , которое является конечным по сравнению с другими модами, сильно зависит от конфигурации канала и толщины льда. Возможно, что  $c^1(0) < c_{\min}^2$  и тогда будет наблюдаться картина только одной короткой волны впереди нагрузки для скорости нагрузки  $c^1(0) < U < c_{\min}^2$ .

*Работа посвящена памяти профессора кафедры дифференциальных уравнений Сергея Семеновича Кузикова.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291.*

### **Библиографический список**

1. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Applied Ocean Research. – 2016. – Т. 59. – С. 313–326.
2. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – Т. 722. – № 1. – С. 012037.
3. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // Известия Алтайского государственного университета. – 2012. – № 1–1. – С. 55-59.