ментальные проблемы науки и образования», Барнаул, 14–17 ноября 2017 г. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2017. – С. 211–215.

5. Анисимов Д.С., Подлесных С.В., Колосова Е.А., Щербаков Д.Н., Петрова В.Д., Джонстон С.А., Лазарев А.Ф., Оскорбин Н.М., Шаповал А.И., Рязанов М.А. Анализ многомерных данных пептидных микрочипов с использованием метода проекции на латентные структуры // Математическая биология и информатика. – 2017. – №2(25). – С. 435–445.

УДК 519.6

Об одном итерационном методе решения эллиптического уравнения

Ж.Р. Жаксылыкова

ВКГУ им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан

С помощью эллиптических уравнений исследуются важнейшие природные процессы. Простейшими примерами уравнения эллиптического типа являются уравнение Лапласа $\Delta u(x)=0$, которое в двумерном случае имеет вид $\Delta u=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}=0$, уравнение Пуассона $-\Delta u=f(x)$, где функция u имеет различный физический смысл, например: стационарное, независящее от времени, распределение температуры, скорость течения жидкости и т.п.

Рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+c(x)\cdot u=f(x),\ \ x=(x_1,\ldots,x_n)\in D_1 \qquad (1)$$

заданное в ограниченной области D_1 с краевым условием

$$u(x)=0,\quad x\in\partial D_1. \qquad (2)$$

Предположим, что коэффициенты и решение задачи (1), (2) достаточно гладки, $a_{ij}(x)=a_{ji}(x), c(x)\geq 0$ и выполняется условие эллиптичности

$$\inf_{x\in D_1}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq\mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\quad \mu>0. \qquad (3)$$

Большой технологичностью при приближенном решении краевых задач в нерегулярных областях обладает метод фиктивных областей. Он основан на дополнении исходной расчетной области до некоторой регулярной области, например, до прямоугольника в двумерных задачах, после которой задача решается разностными методами.

Для приближенного решения задачи (1), (2) в нерегулярной области применим метод фиктивных областей. Следуя общей идее метода, дополним исходную область D_1 фиктивной областью D_2 до параллелепипеда D и в расширенной области D рассмотрим вспомогательную задачу, где S общая часть границ D_1 и D_2:

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{\varepsilon}(x)\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j}\right)+c^{\varepsilon}(x)\cdot u^{\varepsilon}=f^{\varepsilon}(x), \tag{4}$$

где

$$a_{ij}^{\varepsilon}(x)=\begin{cases} a_{ij}(x), & x\in D_1,\\ 0, \; x\in D_2,\; i\neq j, \\ \varepsilon^{-2},\; x\in D_2,\, i\neq j, \end{cases}\quad c^{\varepsilon}(x)=\begin{cases} c(x), \; x\in D_1,\\ 0, \; x\in D_2,\end{cases}\quad f^{\varepsilon}(x)=\begin{cases} f(x), \; x\in D_1,\\ 0, x\in D_2.\end{cases}$$

Для уравнения (4) поставим краевую задачу

$$u^{\varepsilon}(x)=0, \quad x\in\partial D. \tag{5}$$

$$\left[u^{\varepsilon}(x)\right]\Big|_S=0, \quad \left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{\varepsilon}(x)\cdot\cos(n,x_i)\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j}\right]_S=0. \tag{6}$$

где n – нормаль к границе S; $[\quad]_S$ обозначает скачек функции на поверхности S.

Дифференциальные свойства задачи (4) - (6) хорошо изучены в работах Коновалова А.Н., Копченова В.Д., Кузнецова Ю.А., Мацокина А.М., Смагулова Ш.С., Саульева В.К. [1].

Доказано, что решение $u^{\varepsilon}(x)$ задачи (4)–(6) приближает решение $u(x)$ задачи (1), (2) в $W_2^1(D_1)$ с точностью ε

$$\left\|u-u^{\varepsilon}\right\|_{W_2^1(D_1)}\leq C\cdot\varepsilon. \tag{7}$$

В дальнейшем будем предполагать, что область $\overline{D}=\{0\leq x_{\alpha}\leq l_{\alpha},\ \alpha=1,2,\dots,n\}$ – n-мерный параллелепипед (при $n=2$ – прямоугольник) с границей ∂D на которой задано краевое условие первого рода

$$u^{\varepsilon}(x)\Big|_{\partial D}=\mu(x) \tag{8}$$

Требуется найти решение задачи Дирихле

$$Lu^{\varepsilon} = -f(x),\ x \in D,\ u^{\varepsilon}\Big|_{\partial D} = \mu(x) \tag{9}$$

непрерывное в $\overline{D}$.

В области $\overline{D}$ строим сетку $\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$, где ω_h – множество внутренних узлов, γ_h – множество граничных узлов. Вводится пространство $H = \overset{0}{\Omega}$ сеточных функций, заданных на $\overline{\omega}_h$ и равных нулю на γ_h.

В этом случае

$$Lu^{\varepsilon} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{\varepsilon}(x) \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j} \right) \tag{10}$$

$$C_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x) \xi_i \xi_j \le C_2 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 . \tag{11}$$

Построим на ω_h разностные операторы

$$\Lambda y = \sum_{i,j=1}^{n} \Lambda_{ij} y \tag{12}$$

и поставим задаче (9) в соответствие разностную задачу Дирихле

$$\Lambda y = -\phi(x),\ \ x \in \omega_h,\ \ y = \mu(x),\ \ x \in \gamma_h. \tag{13}$$

Введем операторы A и R в пространстве $H = \overset{0}{\Omega}$: $Ay = -\Lambda y,\ Ry = -\overset{0}{\Lambda} y = -\sum_{i=1}^{n} y_{\bar{x}_i x_i}$, где $\overset{0}{\Lambda}$ – разностный $(2n+1)$ – точечный оператор Лапласа, и вместо (13) запишем $Ay = \widetilde{\varphi}$, где $\widetilde{\varphi} \ne \varphi$ только в приграничных узлах.

В работе Самарского А.А. показано, что

$$C_1 R \le A \le C_2 R \tag{14}$$

где C_1, C_2 – постоянные, входящее в условие эллиптичности (11).

Теперь приступаем к применению попеременно-треугольного метода (ПТМ). Итерационная схема метода имеет вид

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + A y_k = f,\ k = 0,1,...,$$

Построим матрицу $B=(D+\omega R_1)D^{-1}(D+\omega R_2)$, в качестве D выбираем единичный оператор E, т.е. $D=E$. Разностные операторы R_1 и R_2 определяются следующим образом:

$$R_1 y=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{\bar{x}_i}}{h_i}=\frac{y_{\bar{x}_1}}{h_1}+\frac{y_{\bar{x}_2}}{h_2}=\frac{y_{ij}-y_{i-1j}}{h_1^2}+\frac{y_{ij}-y_{ij-1}}{h_2^2};$$

$$R_2 y=-\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{x_i}}{h_i}=-\frac{y_{x_1}}{h_1}-\frac{y_{x_2}}{h_2}=-\frac{y_{i+1j}-y_{ij}}{h_1^2}-\frac{y_{ij+1}-y_{ij}}{h_2^2}.$$

Легко можно показать что, $R_1 y+R_2 y=-\Lambda y$

$$R_1 y+R_2 y=2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)y_{ij}-\frac{1}{h_1^2}y_{i-1j}-\frac{1}{h_2^2}y_{ij-1}-\frac{1}{h_1^2}y_{i+1j}-\frac{1}{h_2^2}y_{ij+1}=$$

$$=-\frac{y_{i-1j}-2y_{ij}+y_{i+1j}}{h_1^2}-\frac{y_{ij-1}-2y_{ij}+y_{ij+1}}{h_2^2}=-\Lambda_1 y-\Lambda_2 y=-\Lambda y.$$

Необходимые для реализации ПТМ постоянные δ и Δ находятся по формулам

$$\delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{h_i^2}\sin^2\frac{\pi h_i}{2l_i},\quad \Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{h_i^2}\,. \tag{15}$$

Зная δ,Δ,C_1 и C_2 можно вычислить

$$\omega=\frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}},\ \eta=\frac{\delta}{\Delta},\ \overset{0}{\gamma}_1=\frac{\delta}{2\left(1+\sqrt{\eta}\right)},\ \ \overset{0}{\gamma}_2=\frac{\delta}{4\sqrt{\eta}}$$

$$\gamma_1=C_1\overset{0}{\gamma}_1,\quad \gamma_2=C_2\overset{0}{\gamma}_2,\quad \xi=\frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

$$\rho_0=\frac{1-\xi}{1+\xi},\quad \tau_0=\frac{2}{\gamma_1+\gamma_2},\ \tau_k^*=\frac{\tau_0}{1+\rho_0\cdot\delta_k^*}.$$

Для реализации метода была рассмотрена задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=2\left(x_1-\frac{a}{4}\right)\left(x_1-\frac{3a}{4}\right)+2\left(x_2-\frac{b}{4}\right)\left(x_2-\frac{3b}{4}\right),$$

$$u(x_1,x_2)\big|_S=0.$$

в прямоугольной области D.

$$\overline{D}=\{(x_1,x_2),\ 0\le x_1\le a,\ 0\le x_2\le b\},$$

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2),\ \frac{a}{4} \le x_1 \le \frac{3a}{4},\ \frac{b}{4} \le x_2 \le \frac{3b}{4} \right\},$$

$$S = \left\{ (x_1, x_2),\ x_1 = \frac{a}{4},\ x_1 = \frac{3a}{4},\ \frac{b}{4} \le x_2 \le \frac{3b}{4};\ x_2 = \frac{b}{4},\ x_2 = \frac{3b}{4},\ \frac{a}{4} \le x_1 \le \frac{3a}{4}; \right\}$$

Для решения исходной задачи построена вспомогательная задача метода фиктивных областей.

Результаты метода показали, что точное решение совпадает с приближенным решением.

Библиографический список

1.Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608 с.

2. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.:Наука, 1977. – 654 с.

УДК 004.415

Разработка сервиса для структурирования и обработки метеорологических данных

А.В. Жариков, Д.В. Быканов, А.А. Бондарович, Е.В. Понькина

АлтГУ, г. Барнаул

Сбор наблюдений температурного режима приземного атмосферного воздуха и почв на примере условий сухостепной зоны Кулунды, полученные на гравитационной лизиметрической станции [1], является одним из важных этапов при решении задач в прикладных исследованиях.

При получении данных с метеорологических станций, приходится обрабатывать большие массивы данных в специализированных форматах. Обработка подобных данных является сложной технической задачей и очень часто не существует универсальных и специализированных программных средств для хранения и обработки данных.

Проведен обзор и анализ соответствующих информационных систем. Результат обзора показал низкую распространённость программных средств, что значительно затрудняет дальнейший анализ средств. На примере приложений «АСК»[2] и GeoMixer[3] выявлены основные недостатки и преимущества программных комплексов, что послужило для формирования основных требований разрабатываемой системы. В