Space Model) и латентно-семантический анализ LSA (Latent Semantic Analysis), а среди вероятностных наиболее популярными являются вероятностный латентно-семантический анализ pLSA (probabilistic LSA) и латентное размещение Дирихле LDA (Latent Dirichlet Allocation).

Библиографический список

1. Коршунов А., Гомзин А. Тематическое моделирование текстов на естественном языке // Труды Института системного программирования РАН, Том 23. – М.: РАН, 2012. – С. 215–242.

2. Кольцов С.Н., Кольцова О.Ю., Митрофанова О.А., Шиморина А.С. Интерпретация семантических связей в текстах русскоязычного сегмента Живого Журнала на основе тематической модели LDA // XVII Всероссийская объединенная конференция «Интернет И Современное Общество», 2014.

3. Воронцов К.В. Вероятностное тематическое моделирование [Электронный ресурс]. URL: www.machinelearning.ru/wiki/images /2/22/Voron-2013-ptm.pdf.

4. Глушков Н.А. Анализ методов тематического моделирования текстов на естественном языке // Молодой ученый. – 2018. – №19. – С. 101–103. – URL https://moluch.ru/archive/205/50247/.

УДК 519.6:532.5

Некоторые вопросы численного решения двумерных разностных уравнений

А.К. Бакишев,Ф.С. Аменова

ВКГУ им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан

Основными уравнениями, описывающими плоское течение несжимаемой ньютоновой вязкой жидкости с постоянными свойствами при отсутствии внешних сил, являются два уравнения количества движения – уравнения Навье-Стокса и уравнение неразрывности [1–2].

При численном решении задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости используются уравнения Навье-Стокса, записанные как относительно переменных «вектор скорости-давление» [3–5], так и в переменных «функция тока-вихрь скорости». Для изучения двумерных задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости в большей мере используются уравнения Навье-Стокса, записанные в переменных «функция тока-вихрь скорости». Привлекательность рассмотрения уравнений Навье-Стокса в переменных «функция тока-вихрь скорости» заключается в том, что удается сократить число уравнений по сравнению с записью в физических переменных «вектор скорости-давление» и тождественно удовлетворить закон сохранения массы.

Вопросам численного решения двумерных краевых задач для уравнений несжимаемой жидкости в переменных «функция тока, вихрь скорости» посвящено достаточное количество научных публикаций. Описания наиболее известных вычислительных технологий, используемые при проведении вычислительных экспериментов для изучения различных течений несжимаемой жидкости можно найти в монографиях П. Роуча, О.М. Белоцерковского, В.М. Пасконова, В.И. Полежаева, Л.А. Чудова, С. Патанкара, Е.Л. Тарунина и др.

Постановка задачи. В области $D=\{0\le x,y\le 1\}$ рассмотрим двумерную систему стационарных уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости следующего вида [1]:

$$\left(\Omega\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_x - \left(\Omega\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_y = \nu\Delta\Omega + f(x,y), \qquad (1)$$

$$\Delta\Psi=\Omega, \quad (x,y)\in D \qquad (2)$$

с краевыми условиями

$$\Psi=\left.\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right|_{\partial D}=0, \qquad (3)$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к границе области; Δ – двумерный оператор Лапласа; Ψ – функция тока; Ω – вихрь скорости; ν – коэффициент вязкости; $f(x,y)$ – заданная функция.

Для аппроксимации уравнений (1), (2) в расчетной области $D_h=\left\{(kh_1,mh_2),\ k\in\overline{1,N_1-1},\ m\in\overline{1,N_2-1}\right\}$, где h_1 и h_2 шаги конечно-разностной сетки по направлениям x и y соответственно, рассмотрим разностную схему на симметричном шаблоне вида:

$$L_h(\Omega)\Psi=\nu\Delta_h\Omega+f, \qquad (4)$$

$$\Delta_h\Psi=\Omega, \qquad (5)$$

где разностный оператор L_h соответствует аппроксимации конвективных слагаемых уравнений (1) и имеет вид:

$$L_h(\Omega)\Psi=\left(\Omega\Psi_{\overset{0}{y}}\right)_{\overset{0}{x}}-\left(\Omega\Psi_{\overset{0}{x}}\right)_{\overset{0}{y}}, \qquad (6)$$

где $\Psi_{\overset{0}{x}}, \Psi_{\overset{0}{y}}$ – разностные производные по направлениям x и y.

На участках границ

$$\Psi_{0,m}=\Psi_{N_1,m}=0,\ m=\overline{1,N_2-1},\quad \Psi_{k,0}=\Psi_{k,N_2}=0,\ \mathrm{k}=\overline{1,N_1-1},\qquad (7)$$

для вихря скорости краевые условия взяты в виде формул Вудса [1, с. 217–218], которые имеют следующий вид:

$$\Omega_{0,m}+\frac{1}{2}\Omega_{1,m}=\frac{3}{h_1}\Psi_{x,0,m},\quad \Omega_{N_1,m}+\frac{1}{2}\Omega_{N_1-1,m}=-\frac{3}{h_1}\Psi_{\bar{x},N_1,m},\quad m=\overline{1,N_2-1},$$

$$\Omega_{k,0}+\frac{1}{2}\Omega_{k,1}=\frac{3}{h_2}\Psi_{y,k,0},\quad \Omega_{k,N_2}+\frac{1}{2}\Omega_{k,N_2-1}=-\frac{3}{h_2}\Psi_{\bar{y},k,N_2},\quad k=\overline{1,N_1-1}.\qquad (8)$$

Исследование устойчивости и сходимости итерационных алгоритмов численной реализации решения сеточных уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости (4)-(8) существенным образом опираются на результаты, которые могут быть получены для случая линейной задачи Стокса

$$\Delta\Omega=f(x,y),\qquad (9)$$

$$\Delta\Psi=\Omega,\quad (x,\mathrm{y})\in D,\qquad (10)$$

с краевыми условиями вида (3). Здесь, для простоты изложения, полагаем, что $\nu=1$.

В этом случае соотношения (4), (5) могут быть представлены в следующей форме:

$$\Delta_h\Omega_{k,m}=\frac{\Omega_{k+1,m}-2\Omega_{k,m}+\Omega_{k-1,m}}{h_1^2}+\frac{\Omega_{k,m+1}-2\Omega_{k,m}+\Omega_{k,m-1}}{h_2^2}=f_{k,m},\qquad (11)$$

$$\Delta_h\Psi_{k,m}=\frac{\Psi_{k+1,m}-2\Psi_{k,m}+\Psi_{k-1,m}}{h_1^2}+\frac{\Psi_{k,m+1}-2\Psi_{k,m}+\Psi_{k,m-1}}{h_2^2}=\Omega_{k,m},\qquad (12)$$

$$k\in\overline{1,N_1-1},\ m\in\overline{1,N_2-1}$$

Исследуем устойчивость решения разностной задачи (11), (12) с краевыми условиями вида (7), (8). Соотношение (11) умножим на $\Psi_{k,m}h_1h_2$, просуммируем по внутренним узлам сетки D_h, далее, используя формулы суммирования по частям и краевые условия (7), имеем энергетическое тождество:

$$\sum_{m=1}^{N_2-1}\left(\Omega_{0,m}\Psi_{x,0,m}-\Omega_{N_1,m}\Psi_{\bar{x},N_1,m}\right)h_2+\sum_{k=1}^{N_1-1}\left(\Omega_{k,0}\Psi_{y,k,0}-\Omega_{k,N_2}\Psi_{\bar{y},k,N_2}\right)h_1+\|\Delta_h\Psi\|^2=(f,\Psi)$$

где $\|f\|$ – норма сеточной функции в пространстве $L_{2,h}(D_h)$. Отсюда, учитывая краевые условия вида (8), после несложных преобразований имеем:

$$\|\Delta_h\Psi\|^2+\frac{h_1h_2}{4}\left(\sum_{m=1}^{N_2-1}\left(|\Omega_{0,m}|^2+|\Omega_{N_1,m}|^2\right)+\sum_{k=1}^{N_1-1}\left(|\Omega_{k,0}|^2+|\Omega_{k,N_2}|^2\right)\right)-$$

$$-\frac{h_1h_2}{12}\left(\sum_{m=1}^{N_2-1}\left(|\Omega_{1,m}|^2+|\Omega_{N_1-1,m}|^2\right)+\sum_{k=1}^{N_1-1}\left(|\Omega_{k,1}|^2+|\Omega_{k,N_2-1}|^2\right)\right)+$$

$$+\frac{h_1h_2}{12}\sum_{m=1}^{N_2-1}\left(\left(\Omega_{0,m}+\Omega_{1,m}\right)^2+\left(\Omega_{N_1,m}+\Omega_{N_1-1,m}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{h_1h_2}{12}\sum_{k=1}^{N_1-1}\left(\left(\Omega_{k,0}+\Omega_{k,1}\right)^2+\left(\Omega_{k,N_2}+\Omega_{k,N_2-1}\right)^2\right)=\left(f,\Psi\right).$$

Следовательно, можно записать, что

$$\frac{11}{12}\|\Delta_h\Psi\|^2\le\left|\left(f,\Psi\right)\right|.$$

Отсюда, используя неравенство Коши-Буняковского получим оценку:

$$\|\Delta_h\Psi\|\le c_0\|f\|.$$

Здесь c_0 константа не зависящая от параметров сетки $h_1,\ h_2$.

Библиографический список

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.

2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904 с.

3. Белоцерковский О.М., Гущин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. –1975. – Т.15, №1. – С.197–207.

4. Данаев Н.Т., Урмашев Б.А. Итерационные схемы для решения вспомогательных сеточных уравнений Навье-Стокса // Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика. – 2000. – № 4. – С. 74–78.