УДК 517.54

Применение векторов при решении задач по элементарной математике

А.К. Бакишев[1], Р.О. Нурканова[2], О.Д. Апышев[1]
[1,]ВКГУ им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан;
[2]КНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Понятие вектора может быть успешно применено не только в геометрии, но и при изучении некоторых вопросов элементарной математики, например, при решении систем уравнений (не только алгебраических), доказательстве неравенств, решении тригонометрических, иррациональных неравенств и уравнений, а также при нахождении крайних значений функций. При этом, как будет видно ниже, решения получаются моментально, оригинально и красиво по сравнению со стандартными, традиционными способами.

Для достижения этой цели нам достаточно вспомнить со школьного курса понятия скалярного произведения для конечномерного пространства евклида, неравенство треугольника и коллинеарность векторов.

Теперь перейдем к решению нескольких примеров в действительной области с применением векторов.

Пример 1. Найти все решения уравнения

$$2\sqrt{\mathrm{x}+7} + 3\sqrt{37-2\mathrm{x}} + 6\sqrt{3\mathrm{x}+93} = 7\sqrt{2\mathrm{x}+137}$$

Решение. Введем два трехмерных вектора:

$\vec{a} = (2; 3; 6)$, $\vec{b} = \left(\sqrt{x+7}; \sqrt{37-2x}; \sqrt{3x+93}\right)$. Тогда левая часть данного уравнения будет являться скалярным произведением этих векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Найдем длины этих векторов:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+3^2+6^2} = 7,$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(x+7)+(37-2x)+(3x+93)} = \sqrt{2x+137}.$$

Поэтому, исходное уравнение можно переписать в виде $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|$

Так как оба вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые, отсюда делаем вывод, что угол между векторами равен нулю, поэтому векторы коллинеарные, равносильно тому, что $\exists$ число $k > 0$, что $\vec{b} = k\cdot\vec{a}$, в координатной записи $\sqrt{x+7} = 2k,\ \sqrt{37-2x} = 3k,\ \sqrt{3x+93} = 6k.$

Единственным решением этой системы является пара $(x;k)=(5;\sqrt{3})$ => $x=5$.

Примечание: Если воспользоваться классическим неравенством Коши-Буняковского, то сразу придем к последней системе.

Ответ: $x=5$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+y-2} \end{cases} \quad (1)$$

Решение: Из системы уравнений имеем $x>1$. Введем два двумерных вектора

$\vec{a}=(x;y)$, $\vec{b}=\left(\sqrt{y-1};\sqrt{x-1}\right)$, тогда $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{x+y-2}$. Теперь найдем скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тогда, $\vec{a}\cdot\vec{b}=x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}$.

Так как $|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|=2\sqrt{x+y-2}$, то из второго уравнения системы (1) следует, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|$, значит вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются коллинеарными, следовательно, соответствующие координаты пропорциональны: $\frac{x}{\sqrt{y-1}}=\frac{y}{\sqrt{x-1}}$ => $x\sqrt{x-1}=y\sqrt{y-1}$.

Введем вспомогательную функцию $\varphi(x)=x\sqrt{x-1}$. Тогда получим функциональное уравнение $\varphi(x)=\varphi(y)$. Так как $\varphi'(x)=\sqrt{x-1}+\frac{x}{2\sqrt{x-1}}>0$ при $x>1$ => функция $\varphi(x)$ является возрастающей, то из $\varphi(x)=\varphi(y)$ => $x=y$. (Монотонная функция каждое свое значение принимает только один раз). В таком случае первое уравнение системы (1) дает $x^2=2$ => $x=\pm\sqrt{2}$, так как $x>1$ => $x=y=\sqrt{2}$

Ответ: $(\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Пример 3. Решить уравнение

$$sinx\sqrt{1+cos^2x}+cosx\sqrt{1+sin^2x}=\sqrt{3}$$

Решение: На плоскости XOY рассмотрим векторы $\vec{a}=(sinx;cosx)$ и $\vec{b}=\left(\sqrt{1+cos^2x};\ \sqrt{1+sin^2x}\right)$, тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=sinx\sqrt{1+cos^2x}+cosx\sqrt{1+sin^2x}=\sqrt{3};$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{sin^2x+cos^2x}=1;\ \left|\vec{b}\right|=\sqrt{1+sin^2x+1+cos^2x}=\sqrt{3}.$$

Поэтому исходное уравнение можно записать в виде $|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|=\vec{a}\cdot\vec{b}$ => векторы коллинеарные, значит соответствующие координаты пропорциональны, т.е.

$\frac{sinx}{\sqrt{1+cos^2x}} = \frac{cosx}{\sqrt{1+sin^2x}}$ => $sin^2x + sin^4x = cos^2x + cos^4x$ => $cos2x$=0 => $2x = \frac{\pi}{2} + n\pi,$ => $x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2},\ n \in Z.$

Из условия системы следует, что $sinx > 0$ и $cosx > 0$ => $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

Пример 4. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{9x^2 - 24x + 41} + \sqrt{9x^2 - 12x + 53}$$

Решение: Запишем функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \sqrt{(3x-4)^2 + 5^2} + \sqrt{(2-3x)^2 + 7^2}$$

Введем векторы $\vec{a} = (3x - 4; 5)$, $\vec{b} = (2 - 3x; 7)$ тогда

$$|\vec{a}| = \sqrt{9x^2 - 24x + 41}, \qquad |\vec{b}| = \sqrt{9x^2 - 12x + 53}$$

$\vec{a} + \vec{b} = (-2; 12)$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{37}$, итак, $f(x) \geq 2\sqrt{37}$, поэтому наименьшее значение $f(x)$ есть $2\sqrt{37}$. Знак равенства достигается тогда и только тогда, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, т.е. $\frac{3x-4}{2-3x} = \frac{5}{7}$ => $21x - 28 = 10 - 15x$ => $36x = 38$ => $x = \frac{19}{18}$.

Поэтому, $\min_{x\in R} f(x) = f\left(\frac{19}{18}\right) = 2\sqrt{37}.$

Ответ: $2\sqrt{37}$.

Библиографический список

1. Супрун В.П., Математика для старшеклассников. Нестандартные методы решения задач. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 270 с.

2. Севрюков П.Ф. Смоляков А.Н. Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства. – М.: Илекса: Народное образование; Ставрополь: Сервис-школа, 2008. – 352 с.

3. Фалин Г.И. Фалин А.И. Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ. – Москва, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 367 с.:ил. (Поступаем в вуз).

4. Лихтарников Л.М. Элементарное ведение в функциональные уравнения. – Санк-Петербург : Изд. «Лань», 1997. – 160 с.