2. Порабощение человека. Как роботы стали музыкантами, учителями, актерами и даже руководителями. https://lenta.ru/articles/2014/09/05/socialrobots/

3. Джандигулов А.Р. Сборник задач по дискретной математике. Учебное пособие. Алматы: «Эверо», 2017, 96 с.

УДК 512

Метод сопряженных градиентов для решения систем линейных алгебраических уравнений

А.Р. Джандигулов, Л. Назик
Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

Одной из задач обучения баклавров специальности «математика» является привите им навыков исследовательской работы. В настоящей работе мы ставим цель разработать методические рекомендации для обучающихся университетов к изыскательской детятельности на примере темы «Метод сопряженных градиентов для решения систем линейных алгебраических уравнений». Выбор данной темы обусловлен следующими причинами:

1. Тема является естественным развитием курсов высшей алгебры и математического анализа.
2. Задачи указанных курсов рассматриваются с точки зрения численных методов, тем самым расширяя кругозор обучающихся в область вычислительной математики, алгоритмизации и программирования.
3. Указанные методы сопряженных градиентов применяются в различных прикладных задачах и являются в настоящее время развивающимися. Так что обучающихся погружаем в новую исследовательскую область знаний, например, в организацию параллельных вычислений.

Постановка задачи в методе сопряженных градиентов стандартная. Требуется решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Сложность решения таких систем заключается, во-первых, в огромном количестве вычислительных операций, таких, что с ними не справляется даже современный компьютер, во-вторых, при выполнении операции деления неизбежно возникает необходимость округления результатов, что вызывает возникновение ошибок, которые накапливаются и, в конечном счете, приводит не всегда к правильному результату. Поэтому разрабатываются различные итерационные методы, к которым и относится рассматриваемы метод сопряжённых градиентов.

Итак, требуется решить СЛАУ

$$\begin{array}{llll} a_{0,0}x_0 & +a_{0,1}x_1 & +\ldots+a_{0,n-1}x_{n-1} & =b_0 \\ a_{1,0}x_0 & +a_{1,1}x_1 & +\ldots+a_{1,n-1}x_{n-1} & =b_1 \\ \ldots & & & \\ a_{n-1,0}x_0 & +a_{n-1,1}x_1 & +\ldots+a_{n-1,n-1}x_{n-1} & =b_{n-1} \end{array}$$

или в матричной форме:

$$Ax=b$$

Метод сопряженных градиентов – один из наиболее известных итерационных методов решения систем линейных уравнений. Он может быть применен для решения системы линейных уравнений с симметричной, то есть если она совпадает со своей транспонированной матрицей $A=A^T$ и положительно определенной матрицей, то есть если выполняется неравенство $x^TAx>0$ для любых x. К таким матрицам приводятся, например, различные численные аппроксимации краевых задач дифференциальных уравнений. Метод сопряженных градиентов достаточно быстро сходящий метод, другими словами после выполнения n итераций метода сопряженных градиентов (n есть порядок решаемой системы линейных уравнений), очередное приближение Xn совпадает с точным решением.

Если матрица A симметричная и положительно определена, то функция:

$$q(x)=\frac{1}{2}x^T\cdot A\cdot x-x^Tb+c$$

имеет единственный минимум, который достигается в точке X*, совпадающий с решением системы линейных уравнений.

Итерация метода сопряженных градиентов состоит в вычислении очередного приближения к точному решению

$$x^k=x^{k-1}+s^kd^k,$$

где

x^k – очередное приближение;

x^{k-1} – приближение, построенное на предыдущем шаге;

s^k – скалярный шаг;

d^k – вектор направления.

Перед выполнением первой итерации X_0 и d_0 полагаются равными нулю, а для вектора g_0 устанавливается значение – b.

Алгоритм применения метода состоит из следующих итерационных шагов:

1. Вычисление градиента $g^k = A \cdot x^{k-1} - b$
2. Вычисление вектора направления

$$d^k = -g^k + \frac{\left((g^k)^T, g^k\right)}{\left((g^{k-1})^T, g^{k-1}\right)} d^{k-1}.$$

3. Вычисление величины смещения по заданному направлению

$$s^k = \frac{\left(d^k, g^k\right)}{(d^k)^T \cdot A \cdot d^k}.$$

4. Вычисление нового приближения

$$x^k = x^{k-1} + s^k d^k.$$

Вычислительная сложность алгоритма

Для освоения данной темы обучающимся предлагается изучить следующие работы по направлениям:

1. Применение метода сопряженных методов в различных областях [1, 2, 3].
2. Использование различных пакетов прикладных программ для решения задач методом сопряженных градиентов [4, 5, 6].

Библиографический список

1. Васильев В.И., Кардашевский А.М., Попов В.В. Решение задачи Дирихле для уравнения колебаний струны методом сопряженных градиентов // Вестник СВФУ. 2015.

2. Осипов А.И., Скиба М. В. Применение метода сопряженных градиентов для эффективного управления промышленным предприятием // Известия Самарского научного центра РАН. 2006. №4.

3. Земскова Ю. Н. Метод сопряженных градиентов при решении краевых задач в трехмерном пространстве на нейронных сетях с радиальными базисными функциями активации // Известия ПГУ им. В.Г. Белинского. 2011.

4. Монаков А.В., Платонов В. А. Оптимизация метода решения линейных систем уравнений в OpenFOAM для платформы MPI + CUDA // Труды ИСП РАН. 2014. №3.

5. The conjugate gradient method for solving systems of linear algebraic equations. A thesis submitted to the University of Manchester for the degree

of Master of Philosophy in the Faculty of Engineering and Physical Sciences in2014.

6. Mike Rambo. The Conjugate Gradient Method for Solving Linear Systems of Equations. May 2016, Department of Mathematics, Saint Mary's College of California.

УДК 37.016:51

Самоучитель решения математической задачи как средство обучения элементарной математике студентов бакалавриата педагогического вуза

И.В. Кисельников
АлтГПУ, г. Барнаул

В современных условиях внедрения в практику высшего педагогического образования обновленных ФГОС ВО (3++) и предстоящего введения в действие профессионального стандарта педагога, возрастают требования к подготовке будущих учителей, в частности учителей математики. В формировании универсальных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций существенная роль отводится самостоятельной работе студентов, учебно-методическое обеспечение которой при изучении профильных предметных математических дисциплин претерпевает изменения.

Одними из средств обучения, обеспечивающим реализацию системно-деятельностного подхода к обучению и положительно зарекомендовавших себя на практике организации самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины «Элементарная математика» в педагогическом вузе, являются самоучители математических задач (далее – самоучители).

При разработке самоучителей целесообразным представляется учет следующих положений (1–9), основанных на изучении опыта, полученного студентами на предыдущем уровне образования, анализа предметных результатов ЕГЭ по математике профильного уровня у абитуриентов педагогического вуза [1], изучении результативных практик и идей развития познавательной самостоятельности учащихся [2, 3] и обеспечения понимания учебного материала [4].

1. Использование самоучителя может создавать условия для развития у обучающихся мыслительных действий анализа, сравнения, обобщения, конкретизации. Схематизация решения задачи, достигаемая, в частности составлением интеллект-карт (ментальных карт) способствует пониманию учебного материала обучающимися.