

**Материалы молодежной прикладной IT школы.
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
И МОДЕЛИ В ЭКОЛОГИИ**

УДК 579.64

Исследование аналитического решения математической модели производства биогаза из растительного сырья

А.А. Баюк

АлтГУ, г. Барнаул

В последнее время всё более актуальной становится проблема поиска альтернативных возобновляемых источников энергии. Одним из таких источников является биогаз – смесь газов: метана и углекислого газа. Его получают путём анаэробного сбраживания органического сырья в установке, называемой биореактором. В процессе получения биогаза выделяют четыре стадии: первая – гидролиз высокомолекулярных органических соединений (углеводов, белков и жиров) – их разложение до составляющих их полимеров (соответственно сахаров, аминокислот и жирных кислот); вторая стадия – ацидогенез, в процессе которой под действием анаэробных бактерий происходит образование сложных спиртов и карбоновых кислот; на третьей стадии ацетогенеза сложные спирты и карбоновые кислоты разлагаются до уксусной и муравьиной кислот, а также метанола с выделением водорода; в ходе четвертой стадии метаногенеза происходит образование биогаза. Работы, посвященные исследованию и оптимизации процесса производства биогаза, можно найти в [1–4].

Автором исследуется аналитическое решение следующей нелинейной динамической системы [5]:

$$\dot{W} = -kWf_H(S) + K_{flom}(W_0 - W), \lim_{x \rightarrow \infty} \quad (1)$$

$$\dot{S} = \gamma kWf_H(S) - \rho_m f_M(S) \frac{SB}{K_S + S} - K_{flom} S, \quad (2)$$

$$\dot{B} = Y \rho_m f_M(S) \frac{SB}{K_S + S} - (K_D + K_{flom})B, \quad (3)$$

$$\dot{P} = \theta \cdot (1-Y) f_M(S) \rho_m \frac{SB}{K_S + S}, \quad (4)$$

где W и S – концентрация исходного субстрата и продуктов гидролиза соответственно (г/л); B – концентрация биомассы метаногенных микроорганизмов (г/л); P – суммарный выход биогаза (г/л); k – константа скорости гидролиза (1/сут); γ – коэффициент конверсии субстрата в жирные кислоты; ρ_m – максимальная удельная скорость метаногенеза в терминах утилизации биомассы летучих жирных кислот (1/сут); K_S – константа полунасыщения в уравнении Моно для интенсивности метаногенеза (г/л); Y – доля субстрата, идущая на рост микробной биомассы; $(1-Y)$ – доля субстрата, идущая на образование биогаза, K_D – коэффициент распада микробной биомассы (1/сут), θ – переводной коэффициент потока утилизации жирных кислот в биогаз (мл/г); K_{flow} – интенсивность притока свежего субстрата неизменного структурного состава, равная интенсивности оттока общего интермедиата из рабочей области реактора (1/сут); \dot{W} , \dot{S} , \dot{P} , \dot{B} – производные по времени t .

Функции $f_H(S)$ и $f_M(S)$ описывают ингибирование реакций гидролиза и микробной ферментации жирными кислотами. Для упрощения исследования полагаем $f_H(S) = f_M(S) = f(S)$.

Для замыкания системы (1)–(4) запишем начальные условия:

$$W(0) = W_0; \quad S(0) = 0; \quad B(0) = B_0; \quad P(0) = 0. \quad (5)$$

Для исследования устойчивости стационарного решения линеаризуем систему (1)–(4).

При $\gamma = 1$, $K_{flow} = 0$, $K_D = 0$ для системы (1)–(4) выполнен закон сохранения: $(W + S + B + P)_i = 0$. Это означает, что

$W + S + B + P = W_0 + S_0 + B_0 + P_0$. Воспользовавшись начальными условиями (5), получим: $W + S + B + P = W_0 + B_0$. В этом случае неподвижными точками системы являются:

$$W = 0, \quad S = 0, \quad B + P = W_0 + B_0 \quad (6)$$

или

$$W = 0, \quad B = 0, \quad S + P = W_0 + B_0. \quad (7)$$

Соотношения (6) означают, что органическое вещество полностью переработано, и конечный продукт содержит только метаногенную биомассу и газ. В случае (7) – органическое вещество полностью пере-

работано, и конечный продукт содержит только жирные кислоты и газ. При исследовании точек первого типа (6) и второго типа (7) было выявлено, что при заданных условиях об устойчивости системы (1)–(4) ничего сказать нельзя.

Найдем неподвижную точку системы (1)–(3):

$$W^* > 0, S^* > 0, B = 0, \quad (8)$$

где w^* , s^* определяются из уравнений (1), (2). Данная система имеет единственное положительное решение. Тогда по критерию Гурвица неподвижная точка (8) устойчива при условии:

$$Y\rho_m f(S^*) \frac{S^*}{K_S + S^*} < K_D + K_{flow}.$$

Рассмотрим неподвижные точки, для которых $B \neq 0$. Существование таких точек возможно, если уравнение, полученное из (3)

$$f(S) \frac{S}{K_S + S} = \frac{(K_D + K_{flow})}{Y\rho_m}, \quad (9)$$

имеет положительное решение s^* и при этом

$$B^* = \gamma k \frac{K_{flow} W_0}{K_{flow} + kf(S^*)} f(S^*) - K_{flow} S^* > 0$$

или

$$f(S^*) > \frac{K_{flow} S^*}{k(\gamma W_0 - S^*)}, \quad \text{где } S^* < \gamma W_0. \quad (10)$$

Очевидно, что при достаточно малых значениях $(K_D + K_{flow})/Y\rho_m$ уравнение (9) имеет два положительных корня. Выбором W_0 можно добиться выполнения неравенства (10) для одного или даже двух корней (9).

При исследовании нового положения равновесия на устойчивость, получаем кубический полином, все коэффициенты которого положительны в случае

$$f(S^*) \frac{S^* B^*}{K_S + S^*} + f(S^*) \frac{B^* K_S}{(K_S + S^*)^2} > 0.$$

Следовательно, положение равновесия системы (1)–(3), для которого

$$W^* = \frac{K_{flow} W_0}{K_{flow} + kf(S^*)}, \quad B^* = \gamma k \frac{K_{flow} W_0}{K_{flow} + kf(S^*)} f(S^*) - K_{flow} S^*$$

и s^* – меньший корень уравнения (9), по критерию Гурвица является устойчивым. Положение равновесия, в котором s^* – больший корень уравнения (9), по критерию Гурвица является неустойчивым.

В дальнейшем предполагается рассмотреть задачу максимизации скорости выхода биогаза [6]:

$$(1-Y)f(S^*) \frac{S^* B^*}{K_S + S^*} \rightarrow \max$$

или

$$\left(\gamma k \frac{K_{flow} W_0}{K_{flow} + kf(S^*)} f(S^*) - K_{flow} S^* \right) (1-Y) \frac{K_D + K_{flow}}{Y} \rightarrow \max.$$

В качестве управляющих параметров логично выбрать начальное значение W_0 и K_{flow} .

Работа выполнена при поддержке Благотворительного Фонда В. Потанина

Библиографический список

1. Nicoletta Kythreotou, Georgios Florides, Savvas A. Tassou. A review of simple to scientific models for anaerobic digestion // *Renewable Energy*. – 2014. – №71. – P. 701–714.
2. Хворова Л.А., Брыксин В.М., Гавриловская Н.В., Топаж А.Г. Математическое моделирование и информационные технологии в экологии и природопользовании. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2013. – 277 с.
3. Баяк А.А., Топаж А.Г., Хворова Л.А. Имитационное моделирование процесса производства биогаза из растительного сырья // Сб. науч. статей межд. конф. «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования». – Барнаул, 2017. – С. 400–403.
4. Khvorova L.A. Information technologies, systems and models in the agricultural science and the practice of their using in the plant protection // *Mathematical modeling in plant protection*. Saint-Petersburg: All-Russian Research Institute of Plant Protection (VIZR), 2014. P. 23-30.
5. Топаж А.Г., Хворова Л.А., Жариков А.В., Баяк А.А. Исследование математической модели производства биогаза из растительного сырья // *Известия Алтайского гос. ун-та*. – 2018. – №1 (99). – С. 127–131.

6. Топаж А.Г., Вигонт В.А., Хворова Л.А. Имитационная модель процесса производства биогаза из многокомпонентного растительного сырья. Анализ и параметрическая оптимизация // Химия растительного сырья. – 2018. – № 1. – С. 171–184.

УДК 51-77

Пространственный анализ факторов миграции сельской молодежи в Алтайском крае

М.А. Биттер, Е.В.Понькина

АлтГУ, г. Барнаул

Одним из важных феноменов современного общества, подлежащих изучению и анализу, является миграция населения. Миграция населения в России из сельских территорий характеризуется преобладанием миграционного оттока населения над притоком. Отток населения, особенно молодежи (возраста 15–29 лет) влечет негативные последствия для территории в виде снижения обеспеченности экономики квалифицированными кадрами, изменения демографической структуры населения, экстенсивности социально-экономического развития территории. В последние годы наблюдается рост площадей урбанизированных территорий и численности их жителей, что является последствием миграционных процессов. Актуальным является изучение паттернов факторного пространства, характеризующих сложившиеся за последние 5 лет миграционные тенденции в регионе.

В качестве региона исследования рассматривается Алтайский край, сельские поселения. По данным Росстат, численность сельского населения сократилась на 36 485 тыс. чел. за период 2012–2016 гг., что в среднем в год составляет 7 297 тыс. чел. Статистические данные по сельским поселениям показывают устойчивое преобладание оттока молодежи в возрасте 15–29 лет и работающего населения в возрасте 30–34 лет. В исследованиях Быкова Н.И. и Еремина А.А. [1] показано, что перемещение сельского населения в основном ориентировано из малых (мало населенных поселений) в направлении крупных населенных пунктов и городов. Сергиенко А.М. и Иванова О.А. [2] исследовали мотивационные факторы сельской молодежи, ограничивающие или стимулирующие к въезду или выезду из села. В работе Беднарикова З. и др. [3] выполнен анализ факторов миграции молодежи аграрных профессий по данным опроса 500 студентов аграрного университета.

Целью данного исследования является анализ пространственных паттернов («картин»), описывающих действие различных простран-