book_red&id=429150&sr=1.
2. Максимова О.Д., Смирнов Д.М. История математики : учебное пособие для вузов. – М.: Юрайт, 2018. – 319 с.

УДК 372.851

Об одной методике изложения темы «Построение решения линейного уравнения с постоянными коэффициентами произвольного порядка»

Г.Х. Мухамедиев[1], П.Б. Бейсебай[2]
[1]ВКГУ им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан;
[2]КАТУ им. С. Сейфулллина, Астана, Казахстан

При традиционном изложении темы о построении решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в случае, когда характеристическое уравнение имеет комплексные корни или правая часть уравнения задана в виде комбинации экспоненциальной и тригонометрических функций, решение уравнения строится с применением элементов комплексного анализа. Но в типовых программах некоторых нематематических специальностей в содержании предмета математики не предусмотрены элементы комплексного анализа, хотя в него включена теория линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В следствии чего вид решения уравнения выдается без обоснования, как известный факт или, только ради этого случая, предварительно выдаются элементы комплексного анализа.

В работах 1 и 2 была приведена одна методика построения решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами не применяя элементов комплексного анализа. Данная работе является продолжением этой методики до уравнений произвольного порядка, в которой предлагается одна методика построения фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_1 y' + p_0 y = 0 \qquad (1)$$

и частного решения неоднородного уравнения вида

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_1 y' + p_0 y = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x\right), \qquad (2)$$

не прибегая к теории комплексного анализа.

Левой части уравнения (1) соответствуют дифференциальная форма n - го порядка

$$L_n(y) = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_0 \qquad (3)$$

и характеристический многочлен

$$P_{L_n}(k) = k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots. + p_1 k + p_0, \qquad (4)$$

В дальнейшем, дифференциальную форму, соответствующую многочлену $P(k)$, обозначим в виде $L_{P(k)}y$.

Характеристический многочлен $P_{L_n}(k)$ представим в виде

$$P_{L_n}(k) = (k-k_1)^{m_1}(k-k_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (k-k_\nu)^{m_\nu}\left(k^2+\rho_1 k+q_1\right)^{l_1}\left(k^2+\rho_2 k+q_2\right)^{l_2} \cdot \ldots \cdot \left(k^2+\rho_\mu k+q_\mu\right)^{l_\mu} \qquad (5)$$

где m_i и l_j – неотрицательные целые числа, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu + 2\left(l_1 + l_2 + \ldots + l_\mu\right) = n,$ $k_i \neq k_j$ и $p_i \neq p_j$ или $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$, $D = p_j^2 - 4q_j < 0$ при любом $j = 1, 2, \ldots, \mu$.

Фундаментальная система частных решений линейно–однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения строятся на основе разложения (5) характеристического многочлена $P_{L_n}(k)$ и следующих свойств дифференциальной формы $L_n y$.

Свойство 1. Если для характеристического многочлена (4) дифференциального уравнения (1) имеет место разложение

$$P_{L_n}(k) = Q_s(k) \cdot G_{n-s}(k),$$

где $Q_s(k)$ и $G_{n-s}(k)$ – многочлены вида (4) со степенями s и $n-s$ соответственно, то дифференциальная форма (3) представима в виде $L_n y = L_{Q_s(k)} L_{G_{n-s}(k)} y.$

Свойство 2. Если $L_n y = 0$, то $L_n^m\left(x^{s-1}y\right) = 0$ для любого $m = 1, 2, \ldots$ и $s = 1, 2, \ldots, m$, где $L_n^m y = \underbrace{L_n L_n \ldots L_n y}_{m \text{ раз}}$.

Переходим к построению фундаментальной системы частных решений однородного уравнения (1).

Если в разложении (5) содержится множитель вида то его можно преобразовать к виду $P_{L_n}(k) = P_{n-m_i}(k)(k-k_i)^{m_i}$, где $P_{n-m_i}(k)$ – многочлен степени $n-m_i$ вида (4), которому соответствует, по свойству 1, представление

$$L_n y = L_{n-m_i} L_{1,i}^{m_i} y \tag{6}$$

дифференциальной формы $L_n y$, где $L_{n-m_i} y = L_{P_{n-m_i}(k)} y$, $L_{1,i} y = y' - k_i y$. Из равенства (6) и свойства 2 дифференциальной формы следует, что решению $y = e^{k_i x}$ уравнения $y' - k_i y = 0$ соответствуют m_i линейно независимые решения

$$e^{k_i x}, xe^{k_i x}, ..., x^{m_i - 1} e^{k_i x} \tag{7}$$

уравнения (1).

Аналогично, множителю вида разложения (5) соответствует l_j линейно независимых частных решений

$$y, xy, ..., x^{l_j - 1} y \tag{8}$$

уравнения (1), где y ненулевое решение уравнения $y'' + p_i y' + q_i y = 0$.

Введя подстановку $y = u(x)v(x)$ находим два линейно независимые решения $y_1 = e^{-\frac{p}{2}} \sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x, \quad y_2 = e^{-\frac{p}{2}} \cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x$ уравнения $y'' + p_i y' + q_i y = 0$ и полагая в (8) с начала $y = y_1$, затем $y = y_2$ получим следующие $2l_j$ линейно независимые частные решения

$$e^{-\frac{p_j}{2}x} \sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x,\ xe^{-\frac{p_j}{2}x} \sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x, ..., x^{l_j - 1} e^{-\frac{p_j}{2}x} \sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x,$$

$$e^{-\frac{p_j}{2}x} \cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x,\ xe^{-\frac{p_j}{2}x} \cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x, ..., x^{l_j - 1} e^{-\frac{p_j}{2}x} \cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x$$

уравнения (1).

Переходим к построению частного решения неоднородного уравнения (2)

$$y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + ... + p_1 y' + p_0 y = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x\right),$$

где α, β – заданные постоянные, $P_m(x), Q_l(x)$ – заданные многочленысо степенями m и l, соответственно, $m, l = 0, 1, 2, \ldots$.

Ограничимся рассмотрением случая $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. В случаях $\alpha = \beta = 0$ и $\alpha \neq 0, \beta = 0$ вид частного решения неоднородного уравнения определяется аналогично.

Частное решение $\bar{y}$ уравнения (2) будем искать в виде

$$\bar{y} = e^{\alpha x}\left(M_\theta(x)\cos\beta x + N_\eta(x)\sin\beta x\right), \tag{9}$$

где $M_\theta(x)$ и $N_\eta(x)$ – многочлены степени θ и η, соответственно.

Дифференциальная форма $L_n\left(\bar{y}\right)$ представляется в виде

$$L_n\left(\bar{y}\right) = e^{\alpha x}\left(F_t(x)\cos\beta x + G_\tau(x)\sin\beta x\right) \tag{10}$$

Многочлены $M_\omega(x) = A_0 x^\omega + A_1 x^{\omega-1} + \ldots + A_{\omega-1}x + A_\omega$ и $N_\omega(x) = B_0 x^\omega + B_1 x^{\omega-1} + \ldots + B_{\omega-1}x + B_\omega$ – степени с неизвестными коэффициентами $A_0, A_1, \ldots, A_\omega,\quad B_0, B_1, \ldots, B_\omega$.

Неизвестные коэффициенты находятся методом неопределенных коэффициентов.

Библиографический список

1. Бейсебай П.Б., Мухамедиев Г.Х. Об одной методике изложения темы «Построение частных решений линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // Вестник Казахского национального технического университета имени К.И. Сатпаева. Серия «Физико-математические науки». – 2012. – №2 (38). – С. 47–53.

2. Бейсебай П.Б., Мухамедиев Г.Х. О построении решений линейно дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка и их систем // Вестник Казахского национального технического университета имени К.И. Сатпаева. Серия «Физико-математические науки». – 2015. – №1(107). – С. 379–385.

УДК 681.2(07)

Из опыта конструирования инновационных технологий изучения физических эффектов в системе профессионального образовании

К.А. Нурумжанова, К.Р.Досумбеков

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар, Казахстан

В настоящее время на постсоветском пространстве модернизация системы высшего профессионального образования происходит в условиях новой парадигмы предпринимательского образования. На системе подготовки и технологиях обучения будущих специалистов