МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра алгебры и математической логики

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Учебно-методическое пособие

Барнаул

Издательство
Алтайского государственного
университета
2019

Составитель: к. ф.-м. н., доц. ***С.А. Шахова***
Рецензент: д. ф.-м. н., проф. ***А.И. Будкин***

Пособие содержит варианты индивидуальных заданий по теме «Определители», разбор решений некоторых типов задач и необходимый теоретический материал. Предназначено для студентов факультета математики и информационных технологий, изучающих данную тему в курсе линейной алгебры.

Подписано в печать 25.02.2019. Формат 60x84/16
Усл.-печ. л. 4,42. Тираж 100 экз. Заказ № 74
Типография Алтайского государственного университета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66

Начальные сведения из теории определителей

Пусть A — квадратная матрица порядка n,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

S_n — симметрическая группа подстановок степени n, $\delta(\alpha)$ — обозначение декремента подстановки α из S_n, который вычисляется по формуле $\delta(\alpha) = n - (k + s)$, где k — число независимых циклов в разложении подстановки α, s — число неподвижных элементов подстановки α.

Определение 1. ***Определителем*** *матрицы A, обозначаемым $|A|$, называется сумма выражений вида*

$$(-1)^{\delta(\alpha)} a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} \dots a_{n\alpha(n)}$$

по всем подстановкам α из S_n, т.е.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha \in S_n} (-1)^{\delta(\alpha)} a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} \dots a_{n\alpha(n)}.$$

Элемент a_{ij} матрицы A называется элементом определителя $|A|$, строка (столбец) матрицы A называется строкой (столбцом) определителя $|A|$. Порядок матрицы A называется порядком определителя $|A|$.

Очевидно, число слагаемых из определения определителя совпадает с числом подстановок в группе S_n, т.е. равно $n!$.

Множитель $(-1)^{\delta(\alpha)}$ определяет знак, с которым каждый член определителя $a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} \dots a_{n\alpha(n)}$ входит в сумму из определения определителя.

Упражнение 1. *Из определения определителя вывести формулу для вычисления определителя 2-го порядка.*

Решение. Выпишем элементы симметрической группы S_2 :

$$S_2 = \{\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12)\}.$$

Вычислим декремент каждой подстановки:

$$\delta(\alpha_1) = 2 - (0+2) = 0, \quad \delta(\alpha_2) = 2 - (1+0) = 1.$$

Тогда по определению определителя имеем формулу для вычисления определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{\delta(\alpha_1)} a_{11}a_{22} + (-1)^{\delta(\alpha_2)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$\square$

Точно таким же образом можно вывести формулу для нахождения определителя 3-го порядка. Она называется правилом треугольников и имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Упражнение 2. *Решить уравнение*

$$\begin{vmatrix} 3 & x+4 \\ x-1 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

Решение. Применяя формулу для вычисления определителя 2-го порядка, получим квадратное уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3 & x+4 \\ x-1 & 5 \end{vmatrix} = 15 - (x+4)(x-1) = 1,$$

которое имеет два решения $x = -6, \quad x = 3$.

$\square$

Заметим, что каждый член определителя $a_{1\alpha(1)}a_{2\alpha(2)}...a_{n\alpha(n)}$ содержит ровно по одному элементу из каждой строчки и из каждого столбца матрицы A. Поэтому верно

Свойство 1. *Если в определителе есть нулевая строка (столбец), то он равен нулю.*

Свойство 2. *Определитель верхней (нижней) треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn}.$$

Доказательство. Пусть A — верхняя треугольная матрица,

$$(-1)^{\delta(\alpha)}a_{1\alpha(1)}a_{2\alpha(2)}...a_{n\alpha(n)}$$

— произвольное слагаемое из определителя этой матрицы, т.е. из определителя вида:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В каждом слагаемом из определителя обязательно должен быть в качестве множителя элемент из 1-го столбца определителя. Если этот элемент отличен от a_{11}, то слагаемое равно 0. Тогда $a_{1\alpha(1)} = a_{11}$, т.к. не может быть двух множителей из 1-ой строки.

Далее, в этом слагаемом обязательно должен быть в качестве множителя элемент из 2-го столбца определителя. Он не может быть из 1-ой строки, т.к. уже есть множитель из первой строки — a_{11}. Значит, это элемент a_{22}, иначе, слагаемое будет нулевым, т.е. $a_{2\alpha(2)} = a_{22}$.

Предположим, мы установили, что $a_{1\alpha(1)} = a_{11}$, $a_{2\alpha(2)} = a_{22}, ...,$ $a_{k\alpha(k)} = a_{kk}$. Тогда из $(k+1)$-го столбца в качестве множителя нельзя взять ни один из элементов $a_{1(k+1)}, a_{2(k+1)}, ..., a_{k(k+1)}$, т.к. из строк с номерами $1, 2, ..., k$ уже выбраны элементы. Таким образом, остаётся единственная возможность — выбрать из $(k+1)$-го столбца элемент $a_{(k+1)(k+1)}$, т.е. $a_{(k+1)\alpha(k+1)} = a_{(k+1)(k+1)}$.

Итак, мы доказали, что $a_{1\alpha(1)} = a_{11}$, $a_{2\alpha(2)} = a_{22}, ...,$ $a_{n\alpha(n)} = a_{nn}$. Значит, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}$ — тождественная подстановка, $\delta(\alpha) = 0$, $(-1)^{\delta(\alpha)} = 1$, и единственное ненулевое слагаемое из определителя верхней треугольной матрицы равно $a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

Для нижней треугольной матрицы утверждение доказывается поочерёдным выбором множителей для слагаемого определителя из строк, начиная с 1-ой строки. $\square$

Свойство 3. *При транспонировании матрицы определитель не меняется.*

Доказательство. Обозначим результат транспонирования матрицы A через

$$A^T = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

По определению операции транспонирования $a'_{ij} = a_{ji}$ для всех i, j. По определению определителя имеем следующие равенства:

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha \in S_n} (-1)^{\delta(\alpha)} a'_{1\alpha(1)} a'_{2\alpha(2)} \dots a'_{n\alpha(n)} =$$

$$= \sum_{\alpha \in S_n} (-1)^{\delta(\alpha)} a_{\alpha(1)1} a_{\alpha(2)2} \dots a_{\alpha(n)n}.$$

По определению обратной к α подстановки α^{-1} имеем:

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha(1) & \alpha(2) & \dots & \alpha(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha^{-1}(1) & \alpha^{-1}(2) & \dots & \alpha^{-1}(n) \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $\delta(\alpha^{-1}) = \delta(\alpha)$, т.к. α^{-1} отличается от α только порядком следования элементов в каждом из независимых циклов в разложении α.

Эти факты, а также замечание, что отображение φ группы S_n на себя, при котором каждая подстановка α отображается в подстановку α^{-1}, является взаимно однозначным, позволяют нам записать последнее равенство, доказывающее теорему:

$$\sum_{\alpha \in S_n} (-1)^{\delta(\alpha)} a_{\alpha(1)1} a_{\alpha(2)2} \dots a_{\alpha(n)n} =$$

$$= \sum_{\alpha^{-1} \in S_n} (-1)^{\delta(\alpha^{-1})} a_{1\alpha^{-1}(1)} a_{2\alpha^{-1}(2)} \dots a_{n\alpha^{-1}(n)} = |A|.$$

$\square$

Следствие 1. *Все свойства определителя, верные для строк, верны и для столбцов.*

Свойство 4. *Если в определителе поменять местами две строки, то он сменит знак (сохранив абсолютное значение).*

Доказательство. Поменяем в матрице A строки с номерами i, j. Полученную матрицу обозначим B. Тогда

$$|B| = \sum_{\beta \in S_n} (-1)^{\delta(\beta)} b_{1\beta(1)} ... b_{i\beta(i)} ... b_{j\beta(j)} ... b_{n\beta(n)} =$$

$$= \sum_{\beta \in S_n} (-1)^{\delta(\beta)} a_{1\beta(1)} ... a_{j\beta(i)} ... a_{i\beta(j)} ... a_{n\beta(n)}.$$

Пусть $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & .. & j & ... & i & ... & n \\ \beta(1) & ... & \beta(i) & ... & \beta(j) & ... & \beta(n) \end{pmatrix}$. Ясно, что

$$\alpha = (ij)\beta.$$

Так как умножение на транспозицию меняет чётность подстановки, то верно равенство

$$-(-1)^{\delta(\alpha)} = (-1)^{\delta(\beta)}.$$

Наконец, принимая во внимание тот факт, что отображение φ группы S_n на себя, при котором каждая подстановка β отображается в подстановку $(ij)\beta$, является взаимно однозначным, запишем последнее равенство, доказывающее теорему:

$$\sum_{\beta \in S_n} (-1)^{\delta(\beta)} a_{1\beta(1)} ... a_{j\beta(i)} ... a_{i\beta(j)} ... a_{n\beta(n)} =$$

$$= \sum_{\alpha \in S_n} -(-1)^{\delta(\alpha)} a_{1\alpha(1)} ... a_{i\alpha(i)} ... a_{j\alpha(j)} ... a_{n\alpha(n)} = -|A|.$$

□

Следствие 2. *Если в определителе есть две одинаковые строки, то он равен нулю.*

Доказательство. Поменяем одинаковые строки местами. По свойству 4 получаем: $|A| = -|A|$, откуда $|A| = 0$. □

Свойство 5. *Общий множитель всех элементов некоторой строки определителя можно вынести за знак определителя.*

Доказательство. Пусть элементы i-ой строки определителя имеют общий множитель k, т.е. $a_{i1} = ka'_{i1}, ..., a_{in} = ka'_{in}$. Тогда

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha \in S_n} (-1)^{\delta(\alpha)} a_{1\alpha(1)} ... a_{i\alpha(i)} ... a_{n\alpha(n)} =$$

$$= \sum_{\alpha \in S_n} (-1)^{\delta(\alpha)} a_{1\alpha(1)} ... ka'_{i\alpha(i)} ... a_{n\alpha(n)} =$$

$$= k \sum_{\alpha \in S_n} (-1)^{\delta(\alpha)} a_{1\alpha(1)} ... a'_{i\alpha(i)} ... a_{n\alpha(n)} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ .. & .. & ... & .. \\ a'_{i1} & a'_{i2} & ... & a'_{in} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

□

Следствие 3. *Если в определителе есть пропорциональные строки, то он равен нулю.*

Доказательство. Пусть строки определителя $|A|$ с номерами i, j пропорциональны, т.е. найдётся k такое, что $a_{i1} = ka_{j1}, ..., a_{in} = ka_{jn}$. Тогда, используя свойство 5, по следствию 2 получим

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{jn} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ .. & .. & ... & .. \\ ka_{j1} & ka_{j2} & ... & ka_{jn} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{jn} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{jn} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{jn} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

$\square$

Упражнение 3. *Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & x^2+1 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & x^2+3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Решение. Ясно, что если выписать слагаемые из определения определителя и привести подобные, то получится многочлен 4-ой степени от переменной x с целыми коэффициентами, т.е.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & x^2+1 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & x^2+3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = a_0x^4 + \ldots.$$

Нетрудно заметить, что при $x=-2$, $x=2$, $x=-1$, $x=1$ строки определителя пропорциональны, и он равен 0. Таким образом, $x=-2$, $x=2$, $x=-1$, $x=1$ — корни многочлена $a_0x^4+\ldots$, равного искомому определителю.

Хорошо известно, что если x_0 — корень многочлена, то этот многочлен делится на двучлен $x-x_0$.

Таким образом, получаем разложение определителя на линейные множители

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & x^2+1 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & x^2+3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = a_0x^4 + \ldots = a_0(x-2)(x+2)(x-1)(x+1).$$

Чтобы определить значение коэффициента a_0, нужно выписать слагаемые определителя, содержащие множитель x^4. Очевидно, это слагаемые вида

$$(-1)^{\delta(\alpha)}a_{14}a_{2\alpha(2)}a_{3\alpha(3)}a_{42},$$

а именно:

$$(-1)^{\delta(\alpha_1)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}, \quad (-1)^{\delta(\alpha_2)}a_{14}a_{21}a_{33}a_{42},$$

где $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Поскольку $\delta(\alpha_1) = 3$, $\delta(\alpha_2) = 2$, то

$$(-1)^{\delta(\alpha_1)} a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + (-1)^{\delta(\alpha_2)} a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} =$$

$$-(x^2+1)\cdot 8\cdot 3\cdot(x^2+3) + (x^2+1)\cdot 4\cdot 5\cdot(x^2+3) = -4x^4 - 16x^2 - 16.$$

Значит, $a_0 = -4$,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & x^2+1 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & x^2+3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -4(x-2)(x+2)(x-1)(x+1).$$

□

Свойство 6. *Если каждый элемент некоторой строки определителя представим в виде суммы двух слагаемых, то определитель представим в виде суммы двух определителей, в одном из которых данная строка заполнена первыми слагаемыми, а в другом — вторыми, а остальные строки как в исходном определителе.*

Доказательство. Пусть элементы i-ой строки определителя матрицы A имеют вид $a_{i1} = a'_{i1} + a''_{i1}, ..., a_{in} = a'_{in} + a''_{in}$. Тогда

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha\in S_n} (-1)^{\delta(\alpha)} a_{1\alpha(1)}...a_{i\alpha(i)}...a_{n\alpha(n)} =$$

$$= \sum_{\alpha\in S_n} (-1)^{\delta(\alpha)} a_{1\alpha(1)}...(a'_{i\alpha(i)} + a''_{i\alpha(i)})...a_{n\alpha(n)} =$$

$$= \sum_{\alpha\in S_n} (-1)^{\delta(\alpha)} a_{1\alpha(1)}...a'_{i\alpha(i)}...a_{n\alpha(n)} +$$

$$+ \sum_{\alpha\in S_n} (-1)^{\delta(\alpha)} a_{1\alpha(1)}...a''_{i\alpha(i)}...a_{n\alpha(n)} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ .. & .. & ... & .. \\ a'_{i1} & a'_{i2} & ... & a'_{in} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ .. & .. & ... & .. \\ a''_{i1} & a''_{i2} & ... & a''_{in} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

□

Следствие 4. *Определитель не изменится, если к некоторой его строке прибавить другую строку, умноженную на любое число.*

Доказательство. Прибавим к i-ой строке определителя матрицы A j-ую строку, умноженную на k. Получим определитель, который представим по свойству 6 в виде суммы двух определителей, один из которых — это определитель исходной матрицы A, а другой равен 0, т.к. содержит пропорциональные строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ .. & .. & \ldots & .. \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \ldots & a_{in}+ka_{jn} \\ .. & .. & \ldots & .. \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ .. & .. & \ldots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ .. & .. & \ldots & .. \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ .. & .. & \ldots & .. \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ .. & .. & \ldots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ .. & .. & \ldots & .. \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \ldots & ka_{jn} \\ .. & .. & \ldots & .. \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ .. & .. & \ldots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A|.$$

□

Упражнение 4. *Вычислить методом приведения к треугольному виду определитель*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \ldots & x \\ x & a_2 & x & \ldots & x \\ x & x & a_3 & \ldots & x \\ .. & .. & .. & \ldots & .. \\ x & x & x & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычтем 1-ю строку из всех остальных:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \ldots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \ldots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \ldots & 0 \\ .. & .. & .. & \ldots & .. \\ x-a_1 & 0 & 0 & \ldots & a_n-x \end{vmatrix}.$$

Из 1-го столбца выносим $a_1 - x$, из второго $a_2 - x$, ..., из n-го $a_n - x$:

$$D = (a_1-x)(a_2-x)...(a_n-x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & ... & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 0 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ -1 & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix}.$$

Наконец, прибавим все столбцы к 1-му:

$$D = (a_1 - x)(a_2 - x)...(a_n - x)\times$$

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{x}{a_1-x}+\frac{x}{a_2-x}+...+\frac{x}{a_n-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & ... & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x(a_1 - x)(a_2 - x)...(a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + ... + \frac{1}{a_n - x}\right).$$

□

Следствие 5. *Если некоторая строка определителя является линейной комбинацией других его строк, то определитель равен 0.*

Доказательство. Пусть i-ая строка является линейной комбинацией других строк. Тогда

$$a_{i1} = k_1a_{11} + .. + k_{i-1}a_{(i-1)1} + k_{i+1}a_{(i+1)1} + ... + k_na_{n1},$$

$$a_{i2} = k_1a_{12} + .. + k_{i-1}a_{(i-1)2} + k_{i+1}a_{(i+1)2} + ... + k_na_{n2},$$

$$...$$

$$a_{in} = k_1a_{1n} + .. + k_{i-1}a_{(i-1)n} + k_{i+1}a_{(i+1)n} + ... + k_na_{nn}.$$

По свойству 6 $|A|$ представим в виде суммы определителей с пропорциональными строками, т.е. равен 0:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ .. & .. & ... & .. \\ k_1a_{11} & k_1a_{12} & ... & k_1a_{1n} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$
... + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ .. & .. & ... & .. \\ k_{i-1}a_{(i-1)1} & k_{i-1}a_{(i-1)2} & ... & k_{i-1}a_{(i-1)n} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} +
$$

$$
+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ .. & .. & ... & .. \\ k_{i+1}a_{(i+1)1} & k_{i+1}a_{(i+1)2} & ... & k_{i+1}a_{(i+1)n} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + ...
$$

$$
+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ .. & .. & ... & .. \\ k_n a_{n1} & k_n a_{n2} & ... & k_n a_{nn} \\ .. & .. & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.
$$

□

Определение 2. ***Минором*** *k-го порядка матрицы A называется определитель матрицы, составленной из элементов, стоящих на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов матрицы A.*

Определение 3. *Пусть A — квадратная матрица порядка n, M — минор k-го порядка матрицы A. Вычеркнем из матрицы A строки и столбцы, на пересечении которых стоит минор M.* ***Дополнительным минором*** *к минору M называется определитель матрицы, составленной из элементов матрицы A, оставшихся после вычёркивания. Он обозначается через $M^{'}$.*

Определение 4. *Пусть A — квадратная матрица порядка n, M — минор k-го порядка матрицы A, элементы которого стоят на пересечении строк с номерами $i_1, ..., i_k$ и столбцов с номерами $j_1, ..., j_k$,*

$$
S_M = i_1 + ... + i_k + j_1 + ... + j_k,
$$

$M^{'}$ — дополнительный минор к минору M. ***Алгебраическим дополнением*** *к минору M называется $(-1)^{S_M} M^{'}$.*

Лемма 1. *Слагаемые из произведения $M(-1)^{S_M} M^{'}$ являются слагаемыми из определителя матрицы A.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда минор M находится в левом верхнем углу матрицы A, т.е. его элементы стоят на пересечении первых k строк и k столбцов. В этом случае $S_M = 1 + 2 + ... + k + 1 + 2 + ... + k = 2(1 + ... + k)$ — чётное число. Поэтому

$$M(-1)^{S_M} M' = MM' =$$

$$\sum_{\alpha \in S_k} (-1)^{\delta(\alpha)} a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} ... a_{k\alpha(k)} \times$$

$$\times \sum_{\beta \in S_{(n-k)}} (-1)^{\delta(\beta)} a_{(k+1)\beta(k+1)} a_{(k+2)\beta(k+2)} ... a_{n\beta(n)} =$$

$$= \sum_{\gamma \in S_n} (-1)^{\delta(\alpha)+\delta(\beta)} a_{1\alpha(1)} ... a_{k\alpha(k)} a_{(k+1)\beta(k+1)} ... a_{n\beta(n)} =$$

$$= \sum_{\gamma \in S_n} (-1)^{\delta(\gamma)} a_{1\gamma(1)} ... a_{k\gamma(k)} a_{(k+1)\gamma(k+1)} ... a_{n\gamma(n)},$$

где $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & ... & k & k+1 & ... & n \\ \alpha(1) & ... & \alpha(k) & \beta(k+1) & ... & \beta(n) \end{pmatrix}$, α — подстановка на множестве $\{1, ..., k\}$, β — подстановка на множестве $\{k+1, ..., n\}$.

Действительно, число инверсий в нижней строке подстановки γ равно сумме числа инверсий в нижней строке подстановки α и числа инверсий в нижней строке подстановки β. Как известно, чётность подстановки совпадает с чётностью суммарного числа инверсий в верхней и нижней строках подстановки. Поэтому

$$(-1)^{\delta(\alpha)+\delta(\beta)} = (-1)^{\delta(\gamma)}.$$

Осталось рассмотреть общий случай, когда элементы минора M находятся в строках с номерами $i_1, i_2, ..., i_k$ и столбцах с номерами $j_1, j_2, ..., j_k$, причём $i_1 < i_2 < ... < i_k$, $j_1 < j_2 < ... < j_k$.

Меняя соседние строки местами, переставим строку с номером i_1 на место 1-ой строки. Для этого понадобится $i_1 - 1$ перестановка соседних строк. Затем строку с номером i_2 за $i_2 - 2$ перестановки соседних строк поставим на место 2-ой строки. Для того, чтобы минор M оказался в левом верхнем углу матрицы, необходимо совершить в общем $(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + ... + (i_k - k)$ перестановок соседних строк и $(j_1 - 1) + (j_2 - 2) + ... + (j_k - k)$ перестановок соседних столбцов.

По свойству 4 определитель матрицы B, возникшей в результате перестановок строк и столбцов, связан с определителем матрицы A следующим равенством:

$$(-1)^{(i_1-1)+...+(i_k-k)+(j_1-1)+...+(j_k-k)}|A| =$$

$$= (-1)^{S_M-2(1+2+..+k)}|A| = (-1)^{S_M}|A| = |B|$$

или, что то же самое,

$$|A| = (-1)^{S_M}|B|.$$

В матрице B минор M находится на пересечении первых k строк и первых k столбцов. Как доказано в самом начале, слагаемые из произведения MM' — это слагаемые из $|B|$. Значит, слагаемые из произведения $M(-1)^{S_M}M'$ это слагаемые из $|A|$. $\square$

Докажем теорему Лапласа.

Теорема 1. *Пусть в определителе $|A|$ порядка n произвольно выбраны k строк (или k столбцов), $1 \leq k \leq n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения равна определителю $|A|$.*

Доказательство. С учётом леммы, достаточно показать, что заставляя M пробегать все миноры k-го порядка, расположенные в выбранных строках с номерами $i_1, i_2, ..., i_k$, мы получим все члены определителя, причём ни один из них не встретится дважды. Последнее понятно, т.к. миноры различаются набором входящих в них столбцов. Поэтому всегда найдётся столбец такой, что в каждом члене одного минора есть множитель из этого столбца, а в каждом члене другого минора нет множителя из этого столбца. Осталось понять, что умножая миноры, содержащиеся в выбранных строках на их алгебраические дополнения, мы получим все слагаемые из определителя $|A|$.

Пусть $a_{1\alpha(1)}a_{2\alpha(2)}...a_{n\alpha(n)}$ — произвольный член определителя. Тогда его можно записать в виде:

$$a_{1\alpha(1)}a_{2\alpha(2)}...a_{n\alpha(n)} = (a_{i_1\alpha_(i_1)}...a_{i_k\alpha(i_k)})(...),$$

выделив произведение тех элементов, которые принадлежат к выбранным строкам с номерами $i_1, i_2, ..., i_k$. Эти элементы находятся в столбцах с номерами $\alpha(i_1), \alpha(i_2), ..., \alpha(i_k)$. Обозначим через M минор k-го порядка, стоящий на пересечении выбранных ранее строк с номерами $i_1, i_2, ..., i_k$ и столбцов с номерами $\alpha(i_1), \alpha(i_2), ..., \alpha(i_k)$. Тогда выделенное произведение $a_{i_1\alpha_(i_1)}...a_{i_k\alpha(i_k)}$ будет одним из членов минора M, а произведение остальных элементов из члена определителя, не вошедших в выделенное произведение, будет членом дополнительного к M минора $M^{'}$.

Таким образом, всякий член определителя входит в произведение некоторого минора k-го порядка из выбранных строк на его дополнительный минор. Чтобы получить взятый член определителя с тем знаком, с которым он присутствует в определителе, остаётся, следуя лемме, заменить дополнительный минор алгебраическим дополнением. $\square$

В качестве непосредственного следствия этой теоремы получим формулу вычисления определителя, которая называется ***формулой разложения определителя по строке (столбцу)***. Для этого обозначим дополнительный минор к элементу a_{ij} через M_{ij}, а алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} через A_{ij}. Согласно определению они связаны равенством:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Следствие 6. *Для любого i, $1 \le i \le n$, имеют место следующие равенства:*

$$(1)\quad |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in},$$

$$(2)\quad |A| = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + ... + a_{ni}A_{ni}.$$

Равенство (1) *называется формулой разложения определителя $|A|$ по i-ой строке, а равенство* (2) — *формулой разложения определителя $|A|$ по i-ому столбцу.*

Следствие 7. *Для любых i, j $1 \le i, j \le n$, $i \ne j$, выполняются следующие равенства:*

$$(3)\quad a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + ... + a_{in}A_{jn} = 0,$$

$$(4)\quad a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + ... + a_{ni}A_{nj} = 0.$$

Доказательство. Действительно, левая часть равенства (3) представляет собой формулу разложения определителя по j-ой строке, заполненной элементами i-ой строки. По следствию 2 такой определитель равен 0. Аналогичные рассуждения со столбцами доказывают формулу (4). $\square$

Упражнение 5. *Вычислить методом рекуррентных соотношений определитель порядка n*

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 12 & 7 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 12 & 7 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение. Обозначим этот определитель через D_n и разложим его по 1-му столбцу. Возникает следующее соотношение:

$$D_n = 7D_{n-1} - 12D_{n-2}.$$

Перепишем это соотношение в виде

$$D_n - 3D_{n-1} = 4(D_{n-1} - 3D_{n-2}).$$

Тогда имеем:

$$D_n - 3D_{n-1} = 4(D_{n-1} - 3D_{n-2}) = 4^2(D_{n-2} - 3D_{n-3}) = ... =$$

$$= 4^{n-2}(D_2 - 3D_1) = 4^n,$$

$$D_n = 4^n + 3D_{n-1} = 4^n + 3(4^{n-1} + 3D_{n-2}) = 4^n + 3 \cdot 4^{n-1} + 3^2 D_{n-2} =$$

$$= ... = 4^n + 3 \cdot 4^{n-1} + ... + 3^{n-2} D_2 = 4^n + 3 \cdot 4^{n-1} + ... + 3^{n-2}(4^2 + 3 \cdot 4 + 3^2) =$$

$$= 4^n + 3 \cdot 4^{n-1} + ... + 3^{n-2}4^2 + 3^{n-1}4 + 3^n = 4^{n+1} - 3^{n+1}.$$

Итак, имеем формулу $D_n = 4^{n+1} - 3^{n+1}$. Методом математической индукции проверим, что она верна. При $n = 1$ получим из этой формулы верное равенство $D_1 = 7$. Предположив, что формула верна при всех значениях $< n$, получим равенства:

$$D_n = 7D_{n-1} - 12D_{n-2} = 7(4^n - 3^n) - 12(4^{n-1} - 3^{n-1}) = 4^{n+1} - 3^{n+1}.$$

□

Замечание. Рекуррентное соотношение $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$ можно записать в виде $D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$, где α, β — корни уравнения $x^2 - px - q = 0$. Действительно, по теореме Виета $-p = -\alpha - \beta, -q = \alpha\beta$. Тогда $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2} = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$. Откуда $D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$.

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1. Решить уравнения

   $a)\begin{vmatrix} 2 & 4-x \\ 7-x & 2 \end{vmatrix} = 0,$

   $b)\begin{vmatrix} 2 & 1 & x+6 \\ x+8 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -x \end{vmatrix} = 40.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определитель, применяя свойства определителя.

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{31}a_{42}a_{13}a_{54}a_{25}a_{6i}a_{7j}$$

   входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Как изменится определитель, если к каждой его строке (включая последнюю) прибавить последнюю строку?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 8 & 3 & 3 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} -70 & 90 & 101 & 64 \\ -8 & 65 & 49 & 29 \\ -12 & 6 & 11 & 7 \\ -18 & 71 & 59 & 35 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & 0 & 3 & ... & n \\ 1 & 2 & 0 & ... & n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 1 & 2 & 3 & ... & 0 \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & x & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_2 & x & ... & a_n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & x \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & ... & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & ... & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & ... & a_3b_n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & ... & a_nb_n \end{vmatrix}$$

Вариант 2

1. Решить уравнения

$$a) \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$b) \begin{vmatrix} 2 & x-1 & 3 \\ 2x+1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 40.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} c & b & a \\ b & a & c \\ a & c & b \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определитель, применяя свойства определителя.

$$\begin{vmatrix} x & x^{'} & ax+bx^{'} \\ y & y^{'} & ay+by^{'} \\ z & z^{'} & az+bz^{'} \end{vmatrix}$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{41}a_{12}a_{23}a_{6i}a_{35}a_{7j}a_{57}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком минус.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

6. Как изменится определитель, если к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец и в то же время к первому столбцу прибавить последний (ещё не изменённый)?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 & 12 & 16 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 89 & 34 & 76 & -52 \\ -66 & -26 & -41 & 56 \\ -83 & -33 & -69 & 52 \\ -84 & -31 & -66 & 54 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ a_{21} & x_2 & x_2 & \dots & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & x_3 & \dots & x_3 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2-x & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3-x & \dots & 2 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n-x \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

Вариант 3

1. Решить уравнения

$$a)\begin{vmatrix} -x & -5+x \\ 2 & 7+x \end{vmatrix} = 0,$$

$$b)\begin{vmatrix} 2x+1 & 2 & 1 \\ 2x & 3x+2 & 3 \\ 3x & 4 & 2 \end{vmatrix} = -3.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определитель, применяя свойства определителя.

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{51}a_{32}a_{23}a_{14}a_{75}a_{4i}a_{6j}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 & a_{35} \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 & a_{45} \\ 0 & a_{52} & 0 & 0 & a_{55} \end{vmatrix}$$

6. Как изменится определитель порядка n, если его матрицу повернуть на 90° вокруг центра?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 & -2 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 43 & -18 & 176 & -84 \\ 50 & -18 & 195 & -108 \\ 35 & -11 & 175 & -66 \\ 42 & -14 & 185 & -86 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & ... & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & ... & n & n & n \\ .. & .. & .. & ... & .. & .. & .. \\ n & n & n & ... & n & n & n \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & ... & b_n \\ b_0 & y & b_2 & ... & b_n \\ b_0 & b_1 & y & ... & b_n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ b_0 & b_1 & b_2 & ... & y \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} b_0 & -x_1 & 0 & ... & 0 \\ b_1 & y_1 & -x_2 & ... & 0 \\ b_2 & 0 & y_2 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ b_n & 0 & 0 & ... & y_n \end{vmatrix}$$

Вариант 4

1. Решить уравнения

$a)\begin{vmatrix} 1+x & 3 \\ 3+x & 7-x \end{vmatrix} = 0,$

$b)\begin{vmatrix} -x+1 & 2 & x+3 \\ 2 & 5 & 2x+7 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -3.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определитель, применяя свойства определителя.

$$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix}$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{71}a_{62}a_{4i}a_{14}a_{25}a_{3j}a_{57}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком минус.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Как изменится определитель порядка n, если его матрицу повернуть на 180° вокруг центра?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 3 & 12 & -3 & -2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 47 & 29 & -9 & 144 \\ 49 & 42 & -14 & 152 \\ 36 & 22 & -9 & 118 \\ 49 & 35 & -11 & 150 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & ... & a_n - b_n \\ 1 & a_1 & a_2 & ... & a_n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 1 & a_1 & a_2 - b_2 & ... & a_n \\ 1 & a_1 - b_1 & a_2 & ... & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 & ... & a_n \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} y & a & b & c \\ a & y & c & b \\ b & c & y & a \\ c & b & a & y \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} a_0 & x_1 & x_2 & ... & x_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & x_n \end{vmatrix}$$

Вариант 5

1. Решить уравнения

$a)\begin{vmatrix} 2-x & x-1 \\ -x-4 & 12 \end{vmatrix} = 0,$

$b)\begin{vmatrix} 4 & -x+5 & 5 \\ 3 & -2 & x \\ x-7 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 100.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} b & a & c \\ c & b & a \\ a & c & b \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определитель, применяя свойства определителя.

$$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{31}a_{4i}a_{73}a_{64}a_{1j}a_{26}a_{57}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & a_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

6. Чему равен определитель, у которого сумма строк с чётными номерами равна сумме строк с нечётными номерами?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 70 & -98 & 45 & 54 \\ -21 & 29 & 22 & -4 \\ -9 & 10 & 17 & 0 \\ 68 & -93 & 40 & 52 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель порядка n приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 & ... & 5 \\ 5 & 6 & 5 & ... & 5 \\ 5 & 5 & 6 & ... & 5 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 5 & 5 & 5 & ... & 6 \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1+x^2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 7-x^2 \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 1 & 0 & 0 & ... & a_n \end{vmatrix}$$

Вариант 6

1. Решить уравнения

$a)\begin{vmatrix} -4-x & 6-x \\ -4x & 4 \end{vmatrix} = 0,$

$b)\begin{vmatrix} 4 & -2x+1 & 5 \\ x+1 & -2 & 4x \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 100.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определитель, применяя свойства определителя.

$$\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y-b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z+c^{-z})^2 & (c^z-c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{71}a_{62}a_{2i}a_{14}a_{35}a_{5j}a_{47}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком минус.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & a_{35} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{vmatrix}$$

6. Найти сумму всех определителей порядка $n \geq 2$, в каждом из которых в каждой строке и в каждом столбце один элемент равен 1, а остальные равны 0. Сколько всего таких определителей?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 2 & -10 & 3 & 6 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 114 & 193 & -98 & -79 \\ -83 & -165 & 52 & 59 \\ -69 & -131 & 50 & 49 \\ -5 & -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & ... & a_n \\ x & -x & 0 & ... & 0 \\ 0 & x & -x & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & -x \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 2 & x+1 & 2 & ... & 2 \\ 3 & 3 & x+1 & ... & 3 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ n & n & n & ... & x+1 \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & ... & .. & .. \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

Вариант 7

1. Решить уравнения

   $a)$ $\begin{vmatrix} 6-x & x-2 \\ x-3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$

   $b)$ $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2 & -2x \\ 4 & x-1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определитель, применяя свойства определителя.

$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}, \text{ где } \varepsilon^3 = 1.$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{6i}a_{12}a_{33}a_{2j}a_{45}a_{76}a_{57}$$

   входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Найти сумму определителей порядка $n \geq 2$:

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \dots & a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \dots & a_{2\alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} & \dots & a_{n\alpha_n} \end{vmatrix},$$

где сумма берётся по всем значениям $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, независимо друг от друга изменяющимся от 1 до n.

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} -8 & 12 & -9 & 9 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -8 & 8 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} -4 & 70 & 77 & 62 \\ -2 & 10 & 6 & 6 \\ 3 & 68 & 72 & 46 \\ -7 & 79 & 83 & 70 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ x_1 & -x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & -x_3 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x_n \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3-y & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 4-y & \dots & 3 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n+2-y \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & ... & .. & .. \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

Вариант 8

1. Решить уравнения

   $a)\begin{vmatrix} -2-x & x \\ -8-x & 3 \end{vmatrix} = 0,$

   $b)\begin{vmatrix} 3 & x2 & 4x \\ -3x+1 & 1 & 2x \\ 2x+7 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}.$

3. Вычислить определитель, применяя свойства определителя.

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{61}a_{32}a_{23}a_{5i}a_{45}a_{16}a_{7j}$$

   входило в определитель 7-го порядка со знаком минус.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Как изменится определитель порядка n, если у всех его элементов изменить знак на противоположный?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 7 & -14 & -5 & 9 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 75 & 108 & 117 & 94 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 92 & 149 & 155 & 108 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель порядка n, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = n - min(i,j)$.

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_0 & a_0 & ... & a_0 \\ a_1 & x & a_1 & ... & a_1 \\ a_2 & a_2 & x & ... & a_2 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ a_n & a_n & a_n & ... & x \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 2 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 \end{vmatrix}$$

Вариант 9

1. Решить уравнения

$a)\begin{vmatrix} x-2 & x-5 \\ 2x & 3 \end{vmatrix} = 0,$

$b)\begin{vmatrix} 3 & x+1 & -5 \\ 3x-1 & 7 & -x+1 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 0.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} x & x & a \\ x & b & x \\ c & x & x \end{vmatrix}.$

3. Вычислить определитель, применяя свойства определителя.

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i-b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ где } i^2=-1.$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{71}a_{32}a_{23}a_{1i}a_{45}a_{5j}a_{67}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

6. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент a_{ik} умножить на c^{i-k}, где $c \neq 0$?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 7 & 10 & 12 & 13 \\ 3 & -3 & -2 & -5 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 112 & 96 & 1 & 107 \\ 64 & 20 & 0 & 21 \\ -113 & -97 & 8 & -12 \\ 45 & 30 & -8 & -55 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель порядка n, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = max(i, j) + 1$.

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} 1-x & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1-x & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & 1-x & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1-x \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 3 & 2 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 3 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 3 \end{vmatrix}$$

Вариант 10

1. Решить уравнения

$a)$ $\begin{vmatrix} 1-x & x \\ -4x+1 & 5x \end{vmatrix} = 0,$

$b)$ $\begin{vmatrix} x+1 & 2x & -5 \\ 8 & 3x+1 & -2 \\ x & -1 & 8 \end{vmatrix} = 0.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ c+x & x & x \end{vmatrix}.$

3. Вычислить определитель, применяя свойства определителя.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} & \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} & 1 \end{vmatrix}$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{31}a_{42}a_{2i}a_{1j}a_{75}a_{56}a_{67}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком минус.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Определитель называется кососимметрическим, если элементы, симметрично лежащие относительно главной диагонали, отличаются знаком, т.е. $a_{ij} = -a_{ji}$ для любых индексов i, j. Доказать, что кососимметрический определитель нечётного порядка n равен 0.

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 5 & -8 & 2 & 13 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 145 & 44 & -126 & -76 \\ -154 & -17 & 146 & 79 \\ -14 & -32 & 101 & 60 \\ -42 & 24 & -13 & -13 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель порядка n, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = -max(i,j)$.

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & x^2-5 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \\ x^2+2 & 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 4 & 3 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 4 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 4 \end{vmatrix}$$

Вариант 11

1. Решить уравнения

   $a)\begin{vmatrix} 3 & x+5 \\ x-2 & 3x-1 \end{vmatrix} = 0,$

   $b)\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ x & 2x-7 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}.$

   Указание. Вынести из строк α, β, γ.

3. Вычислить определитель, применяя свойства определителя.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{71}a_{52}a_{4i}a_{24}a_{3j}a_{16}a_{67}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Найти элемент определителя порядка n, симметричный элементу a_{ij} относительно побочной диагонали. Как изменится определитель, если каждый его элемент заменить симметричным с данным относительно побочной диагонали?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 6 & -14 & 12 & 8 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 26 & -76 & -19 & 96 \\ 27 & 40 & 44 & 109 \\ 13 & -13 & -20 & 50 \\ 20 & 21 & 64 & 80 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & ... & -n \\ 1 & 0 & -3 & ... & -n \\ 1 & 2 & 0 & ... & -n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 1 & 2 & 3 & ... & 0 \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & x+a_2-2 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3-3 & ... & a_n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & x+a_{n+1}-(n+1) \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 & ... & 0 \\ 2 & 7 & 3 & ... & 0 \\ 0 & 2 & 7 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 7 \end{vmatrix}$$

Вариант 12

1. Решить уравнения

$a)$ $\begin{vmatrix} 3x+1 & x-4 \\ x+5 & -2 \end{vmatrix} = 0,$

$b)$ $\begin{vmatrix} x+7 & 2 & -1 \\ -x+2 & -x & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} x & x & a+x \\ x & b+x & x \\ c+x & x & x \end{vmatrix}$.

3. Применяя свойства определителя, вычислить

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1y & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2y & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3y & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix}, \text{ если } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a.$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{61}a_{22}a_{53}a_{7i}a_{4j}a_{36}a_{17}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком минус.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

6. Найти элемент определителя порядка n, симметричный элементу a_{ij} относительно «центра» определителя. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент заменить элементом, симметричным с данным относительно «центра» определителя?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 11 & -13 & -7 & -7 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} -1550 & 1260 & -1750 \\ 3020 & -1848 & 3220 \\ -65 & 246 & -165 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & ... & 2n-4 & 2n-2 & 2n \\ 4 & 6 & 8 & ... & 2n-2 & 2n & 2n \\ 6 & 8 & 10 & ... & 2n & 2n & 2n \\ .. & .. & .. & ... & .. & .. & .. \\ 2n & 2n & 2n & ... & 2n & 2n & 2n \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} a & a & a & ... & a \\ a & 2-x & a & ... & a \\ a & a & 3-x & ... & na \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ a & a & a & ... & n+1-x \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 5 & 4 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}$$

Вариант 13

1. Решить уравнения

   $a)$ $\begin{vmatrix} x+6 & x+2 \\ 5 & 3x \end{vmatrix} = 0,$

   $b)$ $\begin{vmatrix} 2x-5 & x-2 & 1 \\ 1 & x-1 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$

3. Применяя свойства определителя, вычислить

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix}, \text{ если } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a.$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{41}a_{32}a_{6i}a_{2j}a_{15}a_{76}a_{57}$$

   входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Как изменится определитель порядка n, если его строки написать в обратном порядке?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 7 & -14 & 3 & 9 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 60 & -384 & -1076 \\ 250 & 260 & 1290 \\ 415 & 14 & 371 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ y_2 & y_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ y_3 & y_3 & y_3 & \dots & a_{3n} \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ y_n & y_n & y_n & \dots & y_n \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x-1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x-2 & \dots & a_n \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x-n \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 6 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 6 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 6 \end{vmatrix}$$

Вариант 14

1. Решить уравнения

$a)\begin{vmatrix} 2x+1 & 2x \\ -1-x & -4 \end{vmatrix} = 0,$

$b)\begin{vmatrix} x+4 & 1 & -x-2 \\ 2x+7 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \beta^2+1 & \alpha\beta & \beta\gamma \\ \alpha\beta & \alpha^2+1 & \alpha\gamma \\ \beta\gamma & \alpha\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$.

   Указание. Вынести из строк α, β, γ.

3. Вычислить определитель d, применяя свойства определителя.

$$d = \begin{vmatrix} a_1+b_1 i & a_1 i + b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 i & a_2+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 i & a_3 i + b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ где } i^2=-1, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a.$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{71}a_{62}a_{53}a_{3i}a_{45}a_{26}a_{1j}$$

   входило в определитель 7-го порядка со знаком минус.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Как изменится определитель порядка n, если первый столбец переставить на последнее место, а остальные столбцы передвинуть влево, сохраняя их расположение?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 & 3 & 3 \\ 7 & 13 & 12 & 9 & 6 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 1617 & 2100 & -2619 \\ 637 & 700 & -1559 \\ 721 & 1100 & -747 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & ... & a_n \\ 1 & a_1 - b_1 & a_2 & ... & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 - b_2 & ... & a_n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 1 & a_1 & a_2 & ... & a_n - b_n \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x-2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & x-2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & x-2 \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & ... & 0 \\ 2 & 7 & 5 & ... & 0 \\ 0 & 2 & 7 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 7 \end{vmatrix}$$

Вариант 15

1. Решить уравнения

$a)\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ x+3 & x-7 \end{vmatrix} = 0,$

$b)\begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 1 \\ 1 & 0 & -x+3 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = 2.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \gamma^2+1 & \beta\gamma & \alpha\gamma \\ \beta\gamma & \beta^2+1 & \alpha\beta \\ \alpha\gamma & \alpha\beta & \alpha^2+1 \end{vmatrix}$.

Указание. Вынести из строк α, β, γ.

3. Вычислить определитель, применяя свойства определителя.

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ где } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a.$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{31}a_{42}a_{5i}a_{74}a_{6j}a_{26}a_{17}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

6. Чему равен определитель, у которого сумма столбцов с чётными номерами равна сумме столбцов с нечётными номерами?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 16 & 8 & 3 & 12 & 2 \\ 21 & 11 & 5 & 16 & 3 \\ 10 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & -7 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 70 & 98 & 45 & 54 \\ -21 & -29 & 22 & -4 \\ -9 & -10 & 17 & 0 \\ 68 & 93 & 40 & 52 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель порядка n приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & ... & 3 \\ 3 & 4 & 3 & ... & 3 \\ 3 & 3 & 4 & ... & 3 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 3 & 3 & 3 & ... & 4 \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & x^2-3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2x^2-1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & ... & 0 \\ 2 & 5 & 3 & ... & 0 \\ 0 & 2 & 5 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 5 \end{vmatrix}$$

Вариант 16

1. Решить уравнения

$a)$ $\begin{vmatrix} x+9 & 1 \\ 6x & x \end{vmatrix} = 0,$

$b)$ $\begin{vmatrix} x-3 & 1 & x-2 \\ 1 & x-3 & 1 \\ 1 & 3x-8 & 0 \end{vmatrix} = 2.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\gamma & \alpha\beta \\ \alpha\gamma & \gamma^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\beta & \beta\gamma & \beta^2+1 \end{vmatrix}$.

   Указание. Вынести из строк α, β, γ.

3. Применяя свойства определителя, доказать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(b-a).$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{7i}a_{6j}a_{23}a_{14}a_{45}a_{36}a_{57}$$

   входило в определитель 7-го порядка со знаком минус.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Назовём элемент a_{ij} определителя чётным или нечётным, в зависимости от того, будет ли сумма $i+j$ чётна или нечётна. Найти число элементов определителя порядка n, стоящих на чётных и на нечётных местах.

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -6 & -2 \\ 3 & 7 & -2 & 7 \\ 4 & 3 & -3 & 5 \\ 9 & 4 & -9 & 8 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 900 & 1229 & 443 \\ 500 & 347 & -51 \\ 900 & 1563 & 621 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} a_0 & x & 0 & ... & 0 \\ a_1 & -x & x & ... & 0 \\ a_2 & 0 & -x & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ a_n & 0 & 0 & ... & -x \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & y+1 & 3 & ... & n \\ 1 & 2 & y+1 & ... & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & y+1 \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 & ... & 0 \\ 2 & 6 & 4 & ... & 0 \\ 0 & 2 & 6 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 6 \end{vmatrix}$$

Вариант 17

1. Решить уравнения

$a)$ $\begin{vmatrix} x+6 & 5 \\ -4x & 2x+5 \end{vmatrix} = 0,$

$b)$ $\begin{vmatrix} x-4 & 5-x & 1 \\ 1 & x-4 & x-3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ -\cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

3. Применяя свойства определителя, доказать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(b-a).$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{61}a_{32}a_{2i}a_{7j}a_{45}a_{56}a_{17}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент a_{ik} умножить на c^{2k-i}, где $c \neq 0$?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 70 & 90 & 101 & 64 \\ 8 & 65 & 49 & 29 \\ 12 & 6 & 11 & 7 \\ 18 & 71 & 59 & 35 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ -y_1 & y_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -y_2 & y_3 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y_n \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.
$$\begin{vmatrix} b & b & b & ... & b \\ b & 2-y & b & ... & b \\ b & b & 3-y & ... & b \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ b & b & b & ... & n+1-y \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.
$$\begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 & ... & 0 \\ 3 & 8 & 5 & ... & 0 \\ 0 & 3 & 8 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 8 \end{vmatrix}$$

Вариант 18

1. Решить уравнения

$a)\begin{vmatrix} 4-x & x-1 \\ -2-x & -2 \end{vmatrix} = 0,$

$b)\begin{vmatrix} 4x+1 & 6 & 3x \\ x-1 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 4.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta\cos\alpha & \cos\beta\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

3. Применяя свойства определителя, доказать, что
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(b-a)(a+b+c).$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение
$$a_{3i}a_{22}a_{13}a_{4j}a_{65}a_{76}a_{57}$$
входило в определитель 7-го порядка со знаком минус.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

6. Доказать, что если в определителе на пересечении k строк и k столбцов стоят элементы, равные нулю, причём $k+l>n$, то определитель равен нулю.

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 6 & 10 & 3 & 2 \\ 8 & 8 & 5 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 6 \\ 10 & 8 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} -89 & 34 & 76 & -52 \\ 66 & -26 & -41 & 56 \\ 83 & -33 & -69 & 52 \\ 84 & -31 & -66 & 54 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель порядка n, элементы которого заданы условиями$a_{ij} = n + min(i,j)$.

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & ... & b_n \\ b_0 & x-2 & b_2 & ... & b_n \\ b_0 & b_1 & x-3 & ... & b_n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ b_0 & b_1 & b_2 & ... & x-(n+1) \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & ... & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Вариант 19

1. Решить уравнения

   $a)\begin{vmatrix} -x+4 & 2x-1 \\ 3x-2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$

   $b)\begin{vmatrix} x+6 & 6 & 3 \\ x+1 & 1 & x+1 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 4.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta \\ 0 & -\cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix}$.

3. Применяя свойства определителя, доказать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(b-a)(ab+ac+bc).$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{41}a_{32}a_{53}a_{74}a_{6i}a_{2j}a_{17}$$

   входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

6. С каким знаком входит в определитель порядка n произведение элементов побочной диагонали?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 9 & 12 & -9 & 8 \\ 5 & 7 & -7 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 3 \\ 6 & 8 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 43 & 18 & 176 & -84 \\ 50 & 18 & 195 & -108 \\ 35 & 11 & 175 & -66 \\ 42 & 14 & 185 & -86 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель порядка n, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = 2max(i, j)$.

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & y+1 \\ 2 & 3 & y+1 & 1 \\ 1 & y+1 & 3 & 2 \\ y+1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & \dots & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Вариант 20

1. Решить уравнения

$a)\begin{vmatrix} 2x+6 & 2 \\ -5x-6 & -2x \end{vmatrix} = 0,$

$b)\begin{vmatrix} 5 & 2x & 3 \\ x-3 & x-2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 4.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a^2 & b\sin\alpha & c\sin\alpha \\ b\sin\alpha & 1 & \cos\alpha \\ c\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}.$

3. Применяя свойства определителя, доказать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(b-a)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc).$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{51}a_{32}a_{23}a_{14}a_{45}a_{7i}a_{6j}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком минус.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

6. Назовём элемент a_{ij} определителя чётным или нечётным, в зависимости от того, будет ли сумма $i+j$ чётна или нечётна. Доказать, что в каждый член определителя входит чётное число элементов, занимающих нечётное место; элементов же, занимающих чётное место, входит чётное число, если определитель чётного порядка, и нечётное число, если определитель нечётного порядка.

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 9 & -5 & -14 & 7 \\ 7 & -3 & -9 & 4 \\ 4 & 4 & 7 & -4 \\ 2 & -3 & -6 & 2 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 47 & 29 & 9 & 144 \\ 49 & 42 & 14 & 152 \\ 36 & 22 & 9 & 118 \\ 49 & 35 & 11 & 150 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель порядка n, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = 2|i - j|$.

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & x^2+2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ x^2-1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & 10 \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & ... & 0 \\ .. & .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

Вариант 21

1. Решить уравнения

$a)$ $\begin{vmatrix} x-8 & 2x-5 \\ -x+11 & -10 \end{vmatrix} = 0,$

$b)$ $\begin{vmatrix} x+7 & x+5 & 3 \\ 7 & 1 & 1-x \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -8.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} b^2 & a\sin\beta & c\sin\beta \\ a\sin\beta & 1 & \cos\beta \\ c\sin\beta & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}$.

3. Применяя свойства определителя, вычислить

$$\begin{vmatrix} a_1x & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2x & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3x & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix}, \text{ если } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a.$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{71}a_{52}a_{2i}a_{34}a_{1j}a_{46}a_{67}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

6. С каким знаком входит в определитель порядка n произведение элементов главной диагонали?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 13 & 12 & 10 & 7 \\ -5 & -2 & -3 & 3 \\ 7 & 8 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 70 & 98 & 45 & 54 \\ -21 & -29 & 22 & -4 \\ -9 & -10 & 17 & 0 \\ 68 & 93 & 40 & 52 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 & ... & a+n \\ -a & 0 & a+2 & ... & a+n \\ -a & -a-1 & 0 & ... & a+n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ -a & -a-1 & -a-2 & ... & 0 \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & ... & b_n \\ b_1 & y & b_3 & ... & b_n \\ b_1 & b_2 & y & ... & b_n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ b_1 & b_2 & b_3 & ... & y \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 5 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 5 & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & ... & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Вариант 22

1. Решить уравнения

$a)\begin{vmatrix} x-6 & 9-x \\ -x+4 & -2 \end{vmatrix} = 0,$

$b)\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 7 & 1 & 6+x \\ 6 & 2x & 5 \end{vmatrix} = -8.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} c^2 & b\sin\gamma & a\sin\gamma \\ b\sin\gamma & 1 & \cos\gamma \\ a\sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

3. Применяя свойства определителя, вычислить

$$\begin{vmatrix} a_1x - c_1y & b_1 & b_1y + c_1 \\ a_2x - c_2y & b_2 & b_2y + c_2 \\ a_3x - c_3y & b_3 & b_3y + c_3 \end{vmatrix}, \text{ если } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a.$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{31}a_{22}a_{4i}a_{54}a_{15}a_{7j}a_{67}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком минус.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

6. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент a_{ik} умножить на c^{3k-i}, где $c \neq 0$?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 13 & 2 & -8 & 5 \\ 5 & 7 & -5 & 2 \\ -6 & 4 & 2 & -3 \\ -6 & 5 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 114 & -193 & -98 & -79 \\ -83 & 165 & 52 & 59 \\ -69 & 131 & 50 & 49 \\ -5 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 2 & 3 & 4 & ... & n \\ 3 & 4 & 5 & ... & n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ n-2 & n-1 & n & ... & n \\ n-1 & n & n & ... & n \\ n & n & n & ... & n \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & ... & 4 \\ 4 & x-1 & 4 & ... & 4 \\ 4 & 4 & x-2 & ... & 4 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 4 & 4 & 4 & ... & x-n \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 5 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 5 & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & ... & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

Вариант 23

1. Решить уравнения

$a)\begin{vmatrix} x+7 & 2x+11 \\ -x+1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$

$b)\begin{vmatrix} 2 & x-1 & 3x \\ 6x+1 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -8.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a^2 & b\cos\alpha & c\cos\alpha \\ b\cos\alpha & 1 & \sin\alpha \\ c\cos\alpha & \sin\alpha & 1 \end{vmatrix}$.

3. Применяя свойства определителя, вычислить

$$\begin{vmatrix} a_1x+b_1y & b_1x-c_1y & c_1x \\ a_2x+b_2y & b_2x-c_2y & c_2x \\ a_3x+b_3y & b_3x-c_3y & c_3x \end{vmatrix}, \text{ если } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a.$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{51}a_{32}a_{63}a_{7i}a_{45}a_{16}a_{2j}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

6. Назовём элемент a_{ij} определителя чётным или нечётным, в зависимости от того, будет ли сумма $i+j$ чётна или нечётна. Доказать, что определитель не изменится, если изменить знак всех элементов на нечётных местах.

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 8 & 12 & -14 & 6 \\ 5 & 8 & -9 & 4 \\ 5 & 7 & -4 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 4 & 70 & 77 & 62 \\ 2 & 10 & 6 & 6 \\ -3 & 68 & 72 & 46 \\ 7 & 79 & 83 & 70 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & ... & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & ... & a_{3n} \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ x_1 & x_2 & x_3 & ... & x_n \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_0 & y & a_2 & ... & a_n \\ a_0 & a_1 & y-1 & ... & a_n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ a_0 & a_1 & a_2 & ... & y-n+1 \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & ... & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Вариант 24

1. Решить уравнения

$a)$ $\begin{vmatrix} x+2 & 2x-5 \\ -2x+1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$

$b)$ $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2x+1 \\ 1 & x-5 & 4x+1 \\ 1 & 8 & 5x+4 \end{vmatrix} = 6.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

3. Применяя свойства определителя, вычислить

$$\begin{vmatrix} a_1x + c_1y & b_1x - c_1y & c_1x \\ a_2x + c_2y & b_2x - c_2y & c_2x \\ a_3x + c_3y & b_3x - c_3y & c_3x \end{vmatrix}, \text{ если } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a.$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{71}a_{2i}a_{63}a_{54}a_{3j}a_{46}a_{17}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком минус.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

6. Назовём элемент a_{ij} определителя чётным или нечётным, в зависимости от того, будет ли сумма $i + j$ чётна или нечётна. Доказать, что если изменить знак всех элементов на чётных местах, то определитель не изменится, если он чётного порядка, и изменит знак, если нечётного порядка.

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} -7 & -7 & -13 & 11 \\ 7 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & -3 & -5 & 4 \\ 6 & 3 & 9 & -3 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 75 & 108 & -117 & 94 \\ 29 & 49 & -65 & 50 \\ 43 & 68 & -72 & 52 \\ 92 & 149 & -155 & 108 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & ... & a_n \\ 1 & a_1-b_1 & a_2 & ... & a_n \\ 1 & a_1 & a_2-b_2 & ... & a_n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 1 & a_1 & a_2 & ... & a_n-b_n \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & z-1 \\ 4 & 5 & z-1 & 3 \\ 3 & z-1 & 5 & 4 \\ z-1 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & ... & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

Вариант 25

1. Решить уравнения

$a)\ \begin{vmatrix} 2x-2 & x-4 \\ 3x+1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$

$b)\ \begin{vmatrix} 1 & 5 & x \\ 1 & 7 & 2x-1 \\ 1 & 3x+1 & 64 \end{vmatrix} = 6.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & y & y \\ y & b & y \\ y & y & c \end{vmatrix}$.

3. Применяя свойства определителя, вычислить

$$\begin{vmatrix} a_1x^2 & b_1y - a_1x & c_1y + b_1x \\ a_2x^2 & b_2y - a_2x & c_2y + b_2x \\ a_3x^2 & b_3y - a_3x & c_3y + b_3x \end{vmatrix}, \text{ если } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a.$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{51}a_{3i}a_{63}a_{7j}a_{45}a_{16}a_{27}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & a_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

6. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент a_{ik} умножить на c^{k-i}, где $c \neq 0$?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 & -14 & 7 \\ 7 & 2 & -9 & 5 \\ 4 & -1 & 7 & -3 \\ 2 & 1 & -6 & 4 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 112 & 96 & 1 & -107 \\ 64 & 20 & 0 & -21 \\ -113 & -97 & 8 & 12 \\ 45 & 30 & -8 & 55 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель порядка n приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 & ... & 4 \\ 4 & 5 & 4 & ... & 4 \\ 4 & 4 & 5 & ... & 4 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 4 & 4 & 4 & ... & 5 \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} x^2+1 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 9 & 12 \\ 1 & 2 & x^2-1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 9 & 6 & 0 & ... & 0 \\ 3 & 9 & 6 & ... & 0 \\ 0 & 3 & 9 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 9 \end{vmatrix}$$

Вариант 26

1. Решить уравнения

$a)$ $\begin{vmatrix} -2x-1 & 3x+1 \\ -5x-1 & 8 \end{vmatrix} = 0,$

$b)$ $\begin{vmatrix} 1 & x-24 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ x-9 & x & 3x+6 \end{vmatrix} = 20.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} y & y & a \\ y & b & y \\ c & y & y \end{vmatrix}$.

3. Применяя свойства определителя, вычислить

$$\begin{vmatrix} (a_1-b_1)x & a_1y^2 & (c_1-a_1)y \\ (a_2-b_2)x & a_2y^2 & (c_2-a_2)y \\ (a_3-b_3)x & a_3y^2 & (c_3-a_3)y \end{vmatrix}, \text{ если } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a.$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{71}a_{22}a_{4i}a_{64}a_{75}a_{3j}a_{17}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком минус.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & 0 & 0 & a_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

6. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент a_{ik} умножить на c^{4k-i}, где $c \neq 0$?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 8 & 3 & 6 \\ 9 & 7 & 13 & 6 & 12 \\ 8 & 6 & 7 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} -145 & 44 & -126 & -76 \\ 154 & -17 & 146 & 79 \\ 14 & -32 & 101 & 60 \\ 42 & 24 & -13 & -13 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} a_0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & x & -x & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & x & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ a_n & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & y+2 & 3 & ... & n \\ 1 & 2 & y+2 & ... & n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 1 & 2 & 3 & ... & y+2 \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.
$$\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & ... & 0 \\ 4 & 9 & 5 & ... & 0 \\ 0 & 4 & 9 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 9 \end{vmatrix}$$

Вариант 27

1. Решить уравнения

   $a)$ $\begin{vmatrix} x-1 & -x+6 \\ 2x-2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$

   $b)$ $\begin{vmatrix} x-8 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & x \\ 2x-2 & 25 & 9x+1 \end{vmatrix} = 20.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a+y & y & y \\ y & b+y & y \\ c+y & y & y \end{vmatrix}$.

3. Доказать, что
$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение
$$a_{31}a_{7i}a_{63}a_{54}a_{25}a_{1j}a_{47}$$
входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

6. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент a_{ik} умножить на c^{5k-i}, где $c \neq 0$?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 12 & 16 & 8 & 2 & 3 \\ 16 & 21 & 11 & 3 & 5 \\ 3 & 10 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 7 & 2 & -7 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 1550 & 1260 & -1750 \\ -3020 & -1848 & 3220 \\ 65 & 246 & -165 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} a_1 & -x_1 & 0 & ... & 0 \\ a_2 & x_2 & -x_2 & ... & 0 \\ a_3 & 0 & x_3 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ a_n & 0 & 0 & ... & x_n \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & 0 & 3 & ... & n \\ 1 & 2 & 0 & ... & n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 1 & 2 & 3 & ... & 0 \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 & 0 & ... & 0 \\ 2 & 8 & 6 & ... & 0 \\ 0 & 2 & 8 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 8 \end{vmatrix}$$

Вариант 28

1. Решить уравнения

   $a)\begin{vmatrix} 2x-4 & x-2 \\ 7-x & 2 \end{vmatrix} = 0,$

   $b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & x-3 & 6 \\ x-1 & 8 & x+1 \end{vmatrix} = 0.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} y & y & a+y \\ y & b+y & y \\ c+y & y & y \end{vmatrix}$.

3. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{51}a_{2i}a_{13}a_{34}a_{6j}a_{76}a_{47}$$

   входило в определитель 7-го порядка со знаком минус.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & a_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

6. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент a_{ik} умножить на c^{k-2i}, где $c \neq 0$?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 & 12 \\ 3 & 7 & 7 & 5 \\ -8 & -3 & -4 & 8 \\ 5 & 2 & 9 & 7 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} -60 & 384 & 1076 \\ 250 & 260 & 1290 \\ 415 & 14 & 371 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель порядка n, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = min(i, j)$.

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_0 & x & a_2 & ... & a_n \\ a_0 & a_1 & x & ... & a_n \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ a_0 & a_1 & a_2 & ... & x \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 & ... & 0 \\ 2 & -1 & -3 & ... & 0 \\ 0 & -1 & -3 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 \end{vmatrix}$$

Вариант 29

1. Решить уравнения

$a)$ $\begin{vmatrix} x-1 & 2x-9 \\ x+2 & -x+2 \end{vmatrix} = 0,$

$$b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & x-4 & 6 \\ 7 & x-1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & z & z \\ z & b & z \\ z & z & c \end{vmatrix}$.

3. Применяя свойства определителя, вычислить

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 x + c_1 y & c_1 z \\ a_2 - b_2 & b_2 x + c_2 y & c_2 z \\ a_3 - b_3 & b_3 x + c_3 y & c_3 z \end{vmatrix}, \text{ если } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a.$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение

$$a_{51} a_{12} a_{43} a_{64} a_{7i} a_{36} a_{2j}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & 0 & 0 & a_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

6. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент a_{ik} умножить на c^{k-3i}, где $c \neq 0$?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} -2 & 12 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & -3 & 7 \\ -3 & 8 & 8 & -4 \\ 2 & 7 & -5 & -9 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 1617 & 2100 & 2619 \\ 637 & 700 & 1559 \\ 721 & 1100 & 747 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель порядка n, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = max(i,j)$.

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.
$$\begin{vmatrix} 12 & 7 & 0 & ... & 0 \\ 5 & 12 & 7 & ... & 0 \\ 0 & 5 & 12 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 12 \end{vmatrix}$$

Вариант 30

1. Решить уравнения

   $a)$ $\begin{vmatrix} 2x-4 & -x+4 \\ 3x-7 & 1 \end{vmatrix} = 0,$

   $b)$ $\begin{vmatrix} 5 & x+8 & 3 \\ x+2 & 1 & x+2 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 4.$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} z & z & a \\ z & b & z \\ c & z & z \end{vmatrix}$.

3. Применяя свойства определителя, вычислить
$$\begin{vmatrix} a_1x+c_1y & b_1x-c_1 & c_1z \\ a_2x+c_2y & b_2x-c_2 & c_2z \\ a_3x+c_3y & b_3x-c_3 & c_3z \end{vmatrix}, \text{ если } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a.$$

4. Выбрать значение i, j так, чтобы произведение
$$a_{61}a_{2i}a_{53}a_{34}a_{4j}a_{76}a_{17}$$
входило в определитель 7-го порядка со знаком минус.

5. Вычислить определитель, пользуясь только его определением.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

6. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент a_{ik} умножить на c^{k-4i}, где $c \neq 0$?

7. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 70 & 98 & 45 & 54 \\ -21 & -29 & 22 & -4 \\ -9 & -10 & 17 & 0 \\ 68 & 93 & 40 & 52 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить определитель порядка n, элементы которого заданы условиями $a_{i,j} = |i - j|$.

10. Вычислить определитель методом выделения линейных множителей.

$$\begin{vmatrix} 2+x & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2-x & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3+y & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3-y \end{vmatrix}$$

11. Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 & \dots & 0 \\ 4 & -1 & -3 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & -1 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Библиографический список

1. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. СПб.: Изд-во «Лань», 2008.

2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. СПб.: Изд-во «Лань», 2008.

3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Изд-во «Лань», 2013.