МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра алгебры и математической логики

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ

Учебно-методическое пособие

Барнаул

Издательство
Алтайского государственного
университета
2019

Составитель: к. ф.-м. н., доц. ***С.А. Шахова***
Рецензент: д. ф.-м. н., проф. ***А.И. Будкин***

Учебно-методическое пособие содержит теоретический материал по комбинаторике и индивидуальные задания, предлагаемые студентам для самостоятельного решения при освоении данного раздела математики. Предназначается для студентов факультета математики и информационных технологий, изучающих комбинаторику в рамках курса дискретной математики и математической логики.

Подписано в печать 01.02.2019. Формат 60х84/16
Усл.-печ. л. 3,25. Тираж 100 экз. Заказ № 38
Типография Алтайского государственного университета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66

Начальные сведения из комбинаторики

Правила суммы и произведения

Одна из основных задач комбинаторики — пересчёт элементов в конечных множествах. Приведём некоторые начальные сведения из комбинаторики.

Пусть X — конечное множество, состоящее из n элементов. Тогда говорят, что объект x из множества X может быть выбран n способами и пишут $|X| = n$. Если $X_1, ..., X_k$ — попарно непересекающиеся множества ($X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$), товерно равенство, называемое ***правилом суммы***:

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\Big| = \sum_{i=1}^{k} |X_i|.$$

При $k = 2$ правило суммы можно записать так: $|X \cup Y| = |X| + |Y|$. Это правило означает, что если объект x из множества X можно выбрать n способами, объект y из множества Y можно выбрать m способами (т.е. $|X| = n, |Y| = m$), то выбрать элемент из объединения непересекающихся множеств X и Y (т.е. осуществить выбор «либо x из множества X, либо y из множества Y») можно $n + m$ способами.

Другим часто применяемым правилом является ***правило произведения***: если объект x можно выбрать n способами, а после каждого такого выбора объект y можно выбрать m способами, то выбор упорядоченной пары (x, y) можно осуществить $n \cdot m$ способами.

Это правило вытекает из правила суммы. Действительно, если объект x выбирается их множества элементов $\{a_1, ..., a_n\}$, то обозначим через X_i множество пар вида (a_i, y). В каждом X_i содержится m элементов, и различные X_i не пересекаются. Множество всех пар есть $\bigcup\limits_{i=1}^{k} X_i$. Тогда по правилу суммы имеем:

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\Big| = \sum_{i=1}^{n} |X_i| = n \cdot m.$$

Мы сформулировали и доказали правило произведения для двух объектов. В общем случае правило произведения формулируется следующим образом. Если объект x_1 может быть выбран n_1 способами, а вслед за ним объект x_2 может быть выбран n_2 способами, а после этого объект x_3 может быть выбран n_3 способами и т.д., то выбор упорядоченной последовательности из k объектов может быть осуществлён $n_1 n_2 n_3 ... n_k$ способами. Это правило является следствием правила произведения для упорядоченной пары объектов и доказывается методом математической индукции.

Упражнение 1. *Сколько существует четырёхзначных чисел, которые оканчиваются цифрами* 3 *или* 4*?*

Решение. Сначала найдём количество чисел, оканчивающихся на 3. Рассмотрим, как устроено произвольное такое число. В нём на первой позиции (в разряде тысяч) может находиться любая цифра из множества $\{1, ..., 9\}$. Таким образом, выбор цифры на первую позицию можно осуществить 9-ю способами.

Предположим, что мы выбрали эту цифру. Независимо от того, какая это цифра, выбор второй цифры числа (для разряда сотен) можно сделать 10-ю способами, взяв произвольную цифру из множества $\{0, 1, ..., 9\}$. Согласно правилу произведения выбрать первые две цифры в записи числа можно $9 \cdot 10 = 90$ способами.

Пусть первые две цифры в записи числа выбраны. Неважно, какие это цифры. Выбор третьей цифры числа (для разряда десятков) снова можно сделать 10-ю способами, взяв произвольную цифру из множества $\{0, 1, ..., 9\}$. Итак, по правилу произведения осуществить выбор первых трёх цифр в записи числа можно $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ способами. Следовательно, есть ровно 900 четырёхзначных чисел, оканчивающихся на 3.

Рассуждая аналогичным образом, получим, что есть ровно 900 четырёхзначных чисел, оканчивающихся на 4. По правилу суммы количество четырёхзначных чисел, оканчивающихся на 3 или 4, находится сложением количества четырёхзначных чисел, оканчивающихся на 3, с количеством четырёхзначных чисел, оканчивающихся на 4, т.е. равно $900 + 900 = 1800$.

Размещения и сочетания

Рассмотрим простейшие комбинаторные схемы, применяемые при решении задач комбинаторики.

Определение 1. *Набор элементов* $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r}$ *из множества* *элементов* $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *называется* ***выборкой объёма r*** *или* ***(n, r)-выборкой*** *или* ***выборкой из n элементов по r***.

Определение 2. *Выборка называется* ***упорядоченной****, если порядок следования элементов в ней задан.*

Две упорядоченные выборки, различающиеся лишь порядком следования элементов, считаются различными.

Определение 3. *Если порядок следования элементов в выборке не является существенным, то такая выборка называется* ***неупорядоченной***.

В выборках могут допускаться или не допускаться повторения элементов.

Определение 4. *Упорядоченная выборка, элементы в которой могут повторяться, называется* ***размещением с повторениями***.

Определение 5. *Если элементы упорядоченной выборки попарно различны, то она называется* ***размещением без повторений*** *или просто* ***размещением***.

Определение 6. (n, n)*-размещение называется* ***подстановкой***.

Определение 7. *Неупорядоченная выборка, элементы в которой могут повторяться, называется* ***сочетанием с повторениями***.

Определение 8. *Если элементы неупорядоченной выборки попарно различны, то она называется* ***сочетанием без повторений*** *или просто* ***сочетанием***.

Пример. Пусть $X = \{a, b, c|\}$. Тогда:

1) $(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)$ — все упорядоченные выборки объёма 2 из множества X, представляющие множество так называемых $(3, 2)$-*размещений с повторениями.*

2) $(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)$ — все упорядоченные выборки объёма 2 из множества X, представляющие множество так называемых $(3, 2)$-*размещений* (без повторений).

3) $\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, b\}, \{b, c\}, \{c, c\}$ — все неупорядоченные выборки объёма 2 из множества X, представляющие множество так называемых $(3, 2)$-*сочетаний с повторениями.*

4) $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ — все неупорядоченные выборки объёма 2 из множества X, представляющие множество так называемых $(3, 2)$-*сочетаний* (без повторений).

Упражнение 2. *Для множества $X = \{a, b, c\}$ выписать все*
1) $(3, 3)$-выборки, являющиеся размещениями с повторениями;
2) $(3, 3)$-выборки, являющиеся размещениями (без повторений);
3) $(3, 3)$-выборки, являющиеся сочетаниями с повторениями;
4) $(3, 3)$-выборки, являющиеся сочетаниями (без повторений).

Будем использовать следующие обозначения.

$\overline{A}_n^r$ — число всех (n, r)-размещений с повторениями.

A_n^r — число всех (n, r)-размещений (без повторениий); P_n — число всех подстановок на n элементах.

$\overline{C}_n^r$ — число всех (n, r)-сочетаний с повторениями.

C_n^r — число всех (n, r)-сочетаний (без повторениий).

Утверждение 1. $\overline{A}_n^r = n^r$.

Доказательство. Произвольное (n, r)-размещение с повторениями представляет собой упорядоченный набор $(x_{i_1}, ..., x_{i_r})$ элементов из некоторого множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Первый член последовательности $(x_{i_1}, ..., x_{i_r})$ может быть выбран n способами — это может быть совершенно любой из элементов $x_1, x_2, ..., x_n$. Так как рассматривается размещение с повторениями, то, независимо от того, какой элемент x_{i_1} из множества X выбран на первое место, всё равно остаётся n способов выбрать элемент x_{i_2} на второе место в последовательности $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r})$. Таким образом, по правилу произведения, количество способов заполнить первые два места в этой последовательности равно $n \cdot n = n^2$. Поскольку каждый член этой последовательности может быть выбран n способами, то по обобщённому правилу произведения, число способов заполнить все r мест в последовательности $(x_{i_1}, ..., x_{i_r})$ равно n^r. □

Упражнение 3. *Сколько существует трёхзначных чисел, начинающихся с 5?*

Решение. Каждое из чисел, о которых идёт речь в данной задаче, представляет упорядоченную последовательность трёх цифр, в которой на первом месте стоит 5, а два других места могут быть заняты произвольными цифрами из множества цифр $\{0, 1, ..., 9\}$. Таким образом, речь идёт о количестве 2-размещений с повторениями из десяти элементов. Их число равно $\overline{A}_{10}^2 = 10^2 = 100$.

Упражнение 4. *Сколькими способами можно разложить 8 различных купюр по трём кошелькам?*

Решение. Пусть A, B, C — условное обозначение кошельков. Распределение купюр по кошелькам может быть представлено в виде упорядоченной последовательности длины 8 элементов из множества $\{A, B, C\}$.

Так, например, последовательность (A, A, B, A, B, B, B, C) представляет распределение купюр, при котором первая, вторая и четвёртая купюры попали в кошелёк A, восьмая купюра попала в кошелёк C, а остальные — в кошелёк B.

Очевидно, что способов распределения восьми купюр по трём кошелькам столько, сколько существует различных последовательностей длины 8 из элементов множества $\{A, B, C\}$. Это число есть $\overline{A}_3^8 = 3^8 = 6561$ — число всевозможных размещений с повторениями из трёх элементов по восемь.

Утверждение 2. $A_n^r = n(n-1)(n-2)...(n-(r-1)) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ *при* $n \geq r$, *и* $A_n^r = 0$ *при* $n < r$.

Доказательство. Очевидно, что размещение без повторений из n элементов по r невозможно, если $n < r$. Рассмотрим случай, когда $n \geq r$. Каждое (n, r)-размещение без повторений является упорядоченной последовательностью$(x_{i_1}, ..., x_{i_r})$ длины r, члены которой попарно различны и выбираются из множества с $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ с n элементами. Тогда первый член этой последовательности может быть выбран n способами. После каждого выбора первого члена последовательности второй член может быть выбран $n-1$ способами, третий — $n-2$ способами и т.д. Наконец, r-ый член последовательности может быть выбран $n-(r-1) = n-r+1$ способами. По обобщённому правилу произведения получаем формулу: $A_n^r = n(n-1)(n-2)...(n-(r-1)) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$. □

Следствие 1. $P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)...(n-(n-1)) = n(n-1)(n-2)...1 = n!$

Упражнение 5. *Определить, сколькими способами можно выбрать актив (старосту, профорга и культорга) в группе из 30 человек, если ни один человек не может быть выбран сразу на две должности?*

Решение. Результат выбора можно представить в виде упорядоченной тройки фамилий студентов группы, в которой фамилии не могут повторяться. Например, тройка (Иванов, Петров, Сидоров) описывает ситуацию, при которой старостой выбран Иванов, профоргом — Петров, а культоргом — Сидоров. Значит количество различных вариантов выбора актива совпадает с количеством размещений без повторений из 30 элементов по 3, т.е. равно

$$A_{30}^{3} = 30 \cdot 29 \cdot 28 = \frac{30!}{(27)!} = 24360.$$

Упражнение 6. *Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры в числе 43521?*

Решение. Количество таких чисел равно числу перестановок на множестве из пяти элементов, т.е. равно $P_5 = 5! = 120$.

Утверждение 3. $C_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ *при* $n \geq r$, *и* $C_n^r = 0$ *при* $n < r$.

Доказательство. Заметим, что сочетание без повторений из n элементов по r невозможно, если $n < r$. Рассмотрим случай, когда $n \geq r$. Каждое (n, r)-сочетание можно упорядочить $r!$ способами. Значит, количество (n, r)-сочетаний в $r!$ раз меньше количества (n, r)-размещений. Таким образом,

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

□

Упражнение 7. *Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 10 карт. Определить, в скольких случаях среди них окажется пиковая дама?*

Решение. Чтобы получить набор из 10 карт, содержащий пиковую даму, нужно выбрать 9 карт из 51 карты. Это можно сделать $C_{51}^{9} = \dfrac{51!}{42!9!} = 3042312350$ способами.

Упражнение 8. *В зоомагазине продаются 4 хомяка и 5 кроликов. Петя хочет приобрести трёх хомяков и двух кроликов. Сколькими способами он может это сделать?*

Решение. Осуществить выбор трёх хомяков Петя может $C_4^3 = \dfrac{4!}{1!3!} =$ 4 способами, а выбор двух кроликов — $C_5^2 = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$ способами. Чтобы совершить покупку, Пете нужно выбрать трёх хомяков, а затем двух кроликов. Первый выбор он может сделать 4 способами, а второй 10 способами. По правилу произведения последовательность из двух выборов он может совершить $4 \cdot 10 = 40$ способами.

Утверждение 4. $\overline{C}_n^r = C_{r+n-1}^r = C_{r+n-1}^{n-1}$.

Доказательство. Каждое (n,r)-сочетание с повторениями можно представлять в виде последовательности из r нулей (объектов) и $(n-1)$-ой единицы, которые отделяют объекты одного вида от другого.

Например, при $n = 4$ $(4,12)$-сочетание с повторениями из элементов множества $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ вида

$$\{x_1, x_1, x_1, x_1, x_2, x_3, x_3, x_3, x_3, x_4, x_4, x_4\}$$

можно представить как последовательность 000010100001000, а последовательность 110100000000000 представляет $(4,12)$-сочетание с повторениями вида

$$\{x_3, x_4, x_4, x_4, x_4, x_4, x_4, x_4, x_4, x_4, x_4, x_4\}.$$

Указанное соответствие между (n,r)-сочетаниями с повторениями и последовательностями, состоящими из $n-1$ единицы и r нулей, является взаимно однозначным. Количество же таких последовательностей равно числу способов выбрать номера мест для r нулей (что автоматически приводит к выбору мест для $n-1$ единицы)в последовательности, т.е. равно $C_{r+n-1}^r = C_{r+n-1}^{n-1}$. $\square$

Упражнение 9. *Сколькими способами можно купить в кондитерском магазине 20 пирожных, если в магазине продаются пирожные четырёх видов: шу, корзиночки, трубочки и бисквитные?*

Решение. Набор купленных пирожных представляет собой $(4,20)$-сочетание с повторениями, которое, как мы видели выше, легко представляется в виде последовательности из 20 нулей (пирожных) и 3 единиц, отделяющих один вид пирожных от другого.

Так последовательность 11100000000000000000000 представляет набор, состоящий из 20 бисквитных пирожных. Число таких последовательностей равно $\overline{C}_4^{20} = C_{23}^3 = 1771$.

Упражнение 10. *Сколькими способами по четырём различным урнам можно разложить 20 одинаковых шаров?*

Решение. Число способов разложить 20 одинаковых шаров по четырём различным урнам совпадает с числом целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$. Каждое из решений можно представить последовательностью из 20 единиц и трёх нулей, играющих роль разделителей между слагаемыми. Например, последовательность 11111110111001111111111 представляет решение $(7, 3, 0, 10)$ уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ и одновременно способ распределения 20 шаров по урнам, при котором в первую урну попадут 7 шаров, во вторую — 3 шара, в третью — 0 шаров, а в четвёртую — 10 шаров. Число таких последовательностей, очевидно, равно $\overline{C}_4^{20} = C_{23}^3 = 1771$.

Разбиения

Пусть X — конечное множество, $|X| = n$. Подсчитаем число разбиений множества X на k подмножеств $X_1, X_2, ..., X_k, k \geq 1$, таких, что $|X_i| = n_i, i = 1, ..., k$, и $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Отметим, что некоторые множества X_i могут быть пустыми, т.е. $n_i = 0$. Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$.

Будем считать, что набор подмножеств $X_1, X_2, ..., X_k$ является упорядоченным. Зафиксируем n_i и обозначим число указанных разбиений через $C_n^{n_1,...,n_k}$.

Утверждение 5. $C_n^{n_1,...,n_k} = \dfrac{n!}{n_1!...n_k!}$.

Доказательство. Сначала выберем n_1 элементов, которые будут составлять множество X_1. Это можно сделать $C_n^{n_1}$ способами. Теперь из оставшихся $n - n_1$ элементов выберем n_2 элементов для множества X_2. Ясно, что это можно сделать $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами. По правилу произведения выбрать n_1 элемент для X_1, а затем n_2 элемента для X_2 можно числом способов, равным

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} = \frac{n!}{(n-n_1)!n_1!} \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-n_1-n_2)!n_1!n_2!}.$$

Продолжая процесс распределения элементов множества X по множествам, из оставшихся $n-n_1-n_2$ элементов выберем n_3 элемента для множества X_3. Этот выбор можно совершить $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ способами. Значит количество способов распределить элементы по первым трём множествам X_1, X_2, X_3 равно по правилу произведения

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} =$$

$$= \frac{n!}{(n-n_1-n_2)!n_1!n_2!} \frac{(n-n_1-n_2)!}{(n-n_1-n_2-n_3)!n_3!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-n_1-n_2-n_3)!n_1!n_2!n_3!}.$$

Применяя последовательно правило произведения, на $(k-2)$-ом шаге получаем следующую формулу для числа разбиений множества X на k подмножеств $X_1, X_2, ..., X_k, k \geq 1$, таких, что $|X_i| = n_i, i = 1, ..., k$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$:

$$C_n^{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{(n-n_1-...-n_{k-1})n_1!n_2!...n_{k-1}!} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

$\square$

Утверждение 6. *Число* $C_n^{n_1,\ldots,n_k} = \dfrac{n!}{n_1!...n_k!}$, *где* $n_i \geq 0$, *и* $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$, *равно числу* (k,n)*-размещений с повторениями, в которых среди* n *размещаемых элементов содержится* n_1 *элемент 1-го типа,* n_2 *элемента 2-го типа,* n_3 *элемента 3-го типа и т.д.,* n_k *элементов* k*-го типа. Иначе говоря, число* $C_n^{n_1,\ldots,n_k} = \dfrac{n!}{n_1!...n_k!}$ *— это количество всевозможных слов, которые можно составить, имея в своём арсенале* n_1 *карточку с буквой* a_1*,* n_2 *карточки с буквой* a_2*,* n_3 *карточки с буквой* a_3 *и т.д.,* n_k *карточек с буквой* a_k*.*

Доказательство. Рассмотрим разбиение множества X в объединение непересекающихся подмножеств $X_1, X_2, ..., X_k$.

Каждый из элементов $x_1, x_2, ..., x_n$ множества X пометим карточкой с изображением a_1, если элемент попал в множество X_1, карточкой с изображением a_2, если элемент попал в множество X_2 и т.д., карточкой с изображением a_k, если элемент попал в множество X_k. Получим слово из n букв, среди которых n_1 раз встречается буква a_1, n_2 раза встречается буква a_2, n_3 раза в это слово входит буква a_3 и т.д., n_k раз используется буква a_k. Нетрудно заметить, что разным разбиениям соответствуют разные слова.

С другой стороны, по каждому слову можно определить разбиение множества X на подмножества, которому это слово соответствует: x_k попадёт в подмножество X_i, если на k-ом месте в слове стоит буква a_i.

Таким образрм, нами получено взаимно однозначное соответствие между разбиениями множества X на подмножества и множеством (k, n)-размещений с повторениями, в которых среди n размещаемых элементов содержится n_1 элемент 1-го типа, n_2 элемента 2-го типа, n_3 элемента 3-го типа и т.д., n_k элементов k-го типа, что и доказывает утверждение. $\square$

Упражнение 11. *Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова ПАРАЛЛЕЛОГРАММ?*

Решение. Если бы все буквы в слове были разные, то получилось бы в точности 14! различных слов (перестановок) из букв данного слова. Но в нашем распоряжении нет 14 различных букв, а есть 3 буквы А, 1 буква Г, 1 бука Е, 3 буквы Л, 2 буквы М, 1 буква О, 1 буква П, 2 буквы Р. При данном расположении букв 3! перестановок букв А между собой будут давать то же самое слово. То же самое слово будет получаться при 2! перестановок букв М между собой и т.д. Следовательно, каждому слову из букв данного слова будут соответствовать 3!1!1!3!2!1!1!2! различных перестановок на множестве из 14 элементов, никак не меняющие это слово. Значит, слов будет в 3!1!1!3!2!1!1!1!2! раз меньше, чем перестановок на множестве из 14 символов, т.е. число слов равно $\dfrac{14!}{3!1!1!3!2!1!1!1!2!} = C_{14}^{3,1,1,3,2,1,1,2} = 605404800$.

Упражнение 12. *В студенческой группе, состоящей из 25 человек, при выборе старосты за данную кандидатуру проголосовали 17 человек, против — 6 человек, воздержались — 2 человека. Сколькими способами могло осуществиться голосование с таким исходом?*

Решение. Поставим напротив фамилии каждого студента группы одну из букв З (за), П (против), В (воздержался). Получим слово из 25 букв, в записи которого участвуют 17 букв З, 6 букв П, 2 буквы В. Таких слов $\dfrac{25!}{17!6!2!} = C_{25}^{17!6!2!} = 30284100$.

Можно было рассуждать по-другому. Пусть X — множество студентов в группе. X_1 — множество студентов, проголосовавших за выдвинутую кандидатуру, X_2 — множество студентов, проголосовавших против, X_3 — множество студентов, воздержавшихся при голосовании. Тогда $|X| = 25$, $|X_1| = 17$, $|X_2| = 6$, $|X_3| = 2$, $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Значит искомое число равно $C_{25}^{17,6,2} = \dfrac{25!}{17!6!2!}$.

Упражнение 13. *Сколькими способами можно раскрасить витражное окно, состоящее из 9 секций, четырьмя цветами таким образом, чтобы в первый цвет были окрашены 3 секции, во второй — 2, в третий — 3, в четвёртый — 1?*

Решение. Каждое раскрашивание, рассматриваемое как последовательность цветов, в которые окрашиваются пронумерованные секции окна, является упорядоченной выборкой с повторениями объёма 9 из множества X четырёх цветов., т.е. $(4, 9)$-размещением с повторениями. При этом нас интересуют размещения с заданной комбинацией элементов: 3 элемента — 1-ый цвет, 2 элемента — 2-ой цвет, 3 элемента — 3-ий цвет, 1 элемент —- 4-ый цвет. По утверждению 6 получаем, что искомое число равно $C_9^{3,2,3,1} = \dfrac{9!}{3!2!3!1!} = 5040$.

Теперь рассмотрим случай, когда набор подмножеств в разбиении не является упорядоченным. Так, например, разбиения множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ вида

$$\{1, 3\}, \{5\}, \{2, 4\},$$

$$\{1, 5\}, \{3\}, \{2, 4\},$$

$$\{2, 3\}, \{5\}, \{3, 4\}$$

считаются одинаковыми.

Утверждение 7. *Разобьём множество X, где $|X| = n$, на непересекающиеся подмножества, среди которых m_1 подмножеств с одним элементом, m_2 подмножеств с двумя элементами, m_3 подмножеств с тремя элементами, и т.д., m_n подмножеств с n элементами. Таким образом, $1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + ... + n \cdot m_n = n$. (Кстати, m_n может принимать только значения 0 и 1. Если $m_n = 1$, то все остальные $m_i = 0$.) Тогда число неупорядоченных разбиений $N(m_1, m_2, ..., m_n) = \dfrac{n!}{m_1!m_2!...m_n!(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}...(n!)^{m_n}}$.*

Доказательство. Рассмотрим некоторое упорядоченное разбиение X в объединение непересекающихся подмножеств, среди которых m_1 подмножеств с одним элементом, m_2 подмножеств с двумя элементами, m_3 подмножеств с тремя элементами, и т.д., m_n подмножеств с n элементами. Переставляя между собой m_1 одноэлементных множеств, мы получим $m_1!$ различных упорядоченных разбиений, представляющих собой одно и то же неупорядоченное разбиение. Точно также, переставляя между собой m_2 двухэлементных множеств, мы получим $m_2!$ различных упорядоченных разбиений, представляющих собой одно и то же неупорядоченное разбиение. Таким образом, каждое неупорядоченное разбиение даёт нам $m_1!m_2!...m_n!$ различных упорядоченных. Значит,

$$N(m_1, m_2, ..., m_n) = \frac{C_n^{1,...,2,...}}{m_1!m_2!...m_n!} =$$

$$= \frac{n!}{m_1!m_2!...m_n!(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}...(n!)^{m_n}}.$$

□

Упражнение 14. *Сколькими способами из группы в 30 человек можно сформировать 3 подгруппы по 10 человек?*

Решение. По условию задачи $m_{10} = 3$, остальные $m_i = 0$. Тогда искомое число разбиений на подгруппы будет

$$N(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, ..., 0) = \frac{30!}{3!(10!)^3}.$$

Полиномиальная формула

Утверждение 8. *Верна следующая формула, называемая* ***полиномиальной формулой:***

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum_{n_1+...+n_k=n} C_n^{n_1,...,n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k}.$$

Суммирование в этой формуле производится по всем решениям $(n_1, n_2, ..., n_k)$ уравнения $x_1 + ... + x_k = n$ в целых неотрицательных числах.

Доказательство. Пересчитаем полученные в результате перемножения n скобок $(x_1+x_2+...+x_k)(x_1+x_2+...+x_k)...(x_1+x_2+...+x_k)$ одночлены, в которых x_1 встречается n_1 раз, x_2 встречается n_2 раз, и т.д., x_k встречается n_k раз, т.е. одночлены вида $x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_k^{n_k}$, где $n_1+n_2+...+n_k=n$. Обозначим через X_1 номера тех скобок, из которых в этот одночлен войдут переменные x_1, X_2 — номера тех скобок, из которых в этот одночлен войдут переменные x_2, и т.д., X_k — номера тех скобок, из которых в этот одночлен войдут переменные x_k. Возникло разбиение множества $X=\{1,...,n\}$ в объединение непересекающихся подмножеств $X_1,...,X_k$. Нетрудно заметить, что указанное соответствие между одночленами и разбиениями является взаимно однозначным. Но тогда количество одночленов вида $x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_k^{n_k}$, где $n_1+n_2+...+n_k=n$, возникающих при перемножении n скобок $(x_1+x_2+...+x_k)(x_1+x_2+...+x_k)...(x_1+x_2+...+x_k)=(x_1+x_2+...+x_k)^n$, равно $C_n^{n_1,...,n_k}=\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$. □

Упражнение 15. *Определить коэффициент с в одночлене* $cx_1^4x_2^3x_3$ *многочлена с приведёнными подобными членами, получаемого из выражения* $(3x_1-2x_2+x_k)^8$.

Решение. По утверждению 8 после приведения подобных слагаемых получится одночлен

$$C_8^{4,3,1}(3x_1)^4(-2x_2)^3x_3=-181440x_1^4x_2^3x_3.$$

Формула включений и исключений

В следующем утверждении доказывается формула, которая называется ***формулой включений и исключений***.

Утверждение 9. *Пусть* $X_1,X_2,...,X_n$ *— конечные множества. Тогда*

$$|X_1\cup X_2\cup...\cup X_n|=|X_1|+..+|X_n|-|X_1\cap X_2|-...-|X_{n-1}\cap X_n|+$$
$$+|X_1\cap X_2\cap X_3|+...+|X_{n-2}\cap X_{n-1}\cap X_n|-...+$$
$$+(-1)^{n-1}|X_1\cap X_2\cap...\cap X_n|.$$

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по n. При $n=2$ формула имеет вид $|X_1\cup X_2|=|X_1|+|X_2|-|X_1\cap X_2|$. Эта формула верна, т.к. в $|X_1|+|X_2|$ каждый элемент учтён дважды.

Предположим, что формула верна для числа множеств $< n$. Докажем, что формула верна для n множеств.

Заметим для начала, что для любого натурального n верно равенство

$$(X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{n-1}) \cap X_n = (X_1 \cap X_n) \cup (X_2 \cap X_n) \cup ... \cup (X_{n-1} \cap X_n).$$

Тогда имеем:

$$|X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{n-1} \cup X_n| = |(X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{n-1}) \cup X_n| =$$

$$|X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{n-1}| + |X_n| - |(X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{n-1}) \cap X_n| =$$

$$= |X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{n-1}| + |X_n| - |X_1 \cap X_n) \cup (X_2 \cap X_n) \cup ... \cup (X_{n-1} \cap X_n|.$$

Применим предположение индукции к первому и последнему слагаемым. Первое слагаемое даст все слагаемые без X_n из правой части доказываемой формулы, а последнее — все слагаемые с X_n из правой части доказываемой формулы. □

Следствие 2. *Пусть* $X_1, X_2, ..., X_n$ *— конечные множества. Тогда*

$$|X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n)| = |X| - |X_1| - .. - |X_n| +$$

$$+ |X_1 \cap X_2| + ... + |X_{n-1} \cap X_n| -$$

$$- |X_1 \cap X_2 \cap X_3| - ... - |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n| + ... +$$

$$+ (-1)^n |X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n|.$$

Доказательство. Действительно,

$$(X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n)) \cup (X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n) = X,$$

$$(X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n)) \cap (X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n) = \emptyset,$$

откуда

$$|X| = |X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n)| + |X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n|,$$

$$|X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n)| = |X| - |X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n|.$$

Для получения требуемой формулы остаётся применить формулу включений и исключений. □

Приведём ещё одну наиболее распространённую форму записи формулы включений и исключений. Пусть X — конечное множество, состоящее из N элементов,

X_1 — подмножество множества X, состоящее из всех элементов множества X, обладающих свойством α_1, $|X_1| = N(\alpha_1)$ — количество элементов в X, обладающих свойством α_1.

X_2 — подмножество множества X, состоящее из всех элементов множества X, обладающих свойством α_2, $|X_2| = N(\alpha_2)$ — количество элементов в X, обладающих свойством α_2.

...

X_n — подмножество множества X, состоящее из всех элементов множества X, обладающих свойством α_n, $|X_n| = N(\alpha_n)$ — количество элементов в X, обладающих свойством α_n.

Обозначим также $|X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap ... \cap X_{i_k}| = N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k})$ — количество элементов из множества X, обладающих одновременно свойствами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k}$.

Кроме того, введём следующее обозначение:

$|X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n| = N(\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_n)$ — количество тех элементов из множества X, которые не обладают ни одним из свойств $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Формулу, из следствия 2 можно записать в виде:

$$N(\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_n) = N - N(\alpha_1) - ... - N(\alpha_n) +$$
$$+ N(\alpha_1, \alpha_2) + ... + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - ... +$$
$$+ (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n).$$

Упражнение 16. *Определить количество трёхзначных чисел, в которых сумма цифр равняется 21.*

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3 первую, вторую и третью цифры числа соответственно. Для решения задачи достаточно определить количество целочисленных решений системы

$$x_1 + x_2 + x_3 = 21, \quad 1 \leq x_1 \leq 9, \quad 0 \leq x_2 \leq 9, \quad 0 \leq x_3 \leq 9.$$

Пусть X — множество целочисленных решений системы

$$(*) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 21, \quad x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

N — количество элементов в X. Ясно, что $N = C_{22}^2 = 231$. Введём следующие три свойства:

$$\alpha_1 : \text{"}x_1 \geq 10\text{"}, \quad \alpha_2 : \text{"}x_2 \geq 10\text{"}, \quad \alpha_3 : \text{"}x_3 \geq 10\text{"}.$$

Тогда $N(\alpha_1) = C_{13}^2 = 78$, $N(\alpha_2) = N(\alpha_3) = C_{12}^2 = 66$, $N(\alpha_1, \alpha_2) = N(\alpha_1, \alpha_3) = C_3^2 = 3$, $N(\alpha_2, \alpha_3) = C_2^2 = 1$, $N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$. Теперь по формуле из следствия найдём число целочисленных решений системы $(*)$, не удовлетворяющих ни одному из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$N(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3') = 231 - 78 - 66 - 66 + 3 + 3 + 1 - 0 = 28.$$

Это и есть искомое число трёхзначных чисел, в которых сумма цифр равна 21.

Следующая задача называется ***задачей о беспорядках***.

Упражнение 17. *Пусть имеется n различных предметов, которые мы обозначим $a_1, a_2, ..., a_n$, и n различных ячеек $b_1, b_2, ..., b_n$. Сколькими способами можно разместить предметы по ячейкам так, чтобы никакой предмет a_i не попал в ячейку b_i?*

Решение. Пусть X — совокупность всевозможных расположений предметов по ячейкам. Тогда $N = |X| = n!$. Введём свойства α_i : "a_i находится в ячейке b_i", $i = 1, ..., n$. Число $N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k})$ расположений, при которых предмет a_{i_j} находится в ячейке b_{i_j} для $j = 1, ..., k$, равно $(n-k)!$ Тогда по формуле из следствия получаем формулу для нахождения числа беспорядков на множестве из n элементов:

$$N(\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_n') = n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - ... + (-1)^n C_n^n 0! =$$

$$= n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!}).$$

Вопросы коллоквиума

1. Правила суммы и произведения, типы выборок (дать определение, пояснить на примере).
2. Доказать, что $\overline{A}_n^r = n^r$.
3. Доказать, что $A_n^r = n(n-1)(n-2)...(n-(r-1)) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ при $n \geq r$, и $A_n^r = 0$ при $n < r$.
4. Доказать, что $C_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ при $n \geq r$, и $C_n^r = 0$ при $n < r$.
5. Доказать, что $\overline{C}_n^r = C_{r+n-1}^r$.
6. Доказать теорему о числе упорядоченных разбиений множества на k подмножеств.
7. Доказать теорему о числе слов, записанных с помощью определённого набора букв.
8. Доказать теорему о числе неупорядоченных разбиений множества на k подмножеств.
9. Полиномиальная формула.
10. Формула включений и исключений.
11. Следствие из формулы включений и исключений и её особая форма записи.
12. Задача о беспорядках.

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1. Зал освещается 10-ю лампочками. Каждая из них может гореть, а может не гореть. Сколькими способами может быть организовано освещение зала?

2. Сколько существует пятизначных чисел, первая цифра которых 7?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово dbaa?

4. Сколькими способами можно разложить 9 монет различного достоинства по трём карманам?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1^2 p_2 p_3^5$;

   (б) 1400.

6. На полке стоят 6 книг. Сколькими способами можно взять с полки несколько книг?

7. Вершины правильного n-угольника занумерованы. Сколько различных замкнутых ломаных, вершинами которых являются все вершины n-угольника, можно построить? (Ломаная может быть самопересекающейся.)

8. Есть 1 гвоздика, 3 розы и 4 тюльпана. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

   (е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

Рассмотреть два случая:

1) все цветы одного сорта одинаковые;

2) все цветы одного сорта разные.

Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. На плоскости дано 10 точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?

10. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и 24 рядовых?

11. Сколько слов можно составить из четырёх букв А и не более чем из трёх букв Б?

12. Сколькими способами можно составить букет из 19 цветов, если в продаже имеются васильки, гвоздики, розы, ромашки и хризантемы?

13. Сколько решений, удовлетворяющих условиям: x_1, x_2 — чётные, x_3, x_4 — нечётные, имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 38$$

(а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 6, ни на 10, ни на 15.

15. Переплётчик должен переплести 6 различных книг в красный, жёлтый и зелёный переплёты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

Вариант 2

1. Слово — это произвольная последовательность букв. Сколько можно составить пятибуквенных слов русского алфавита, содержащих хотя бы одну букву Л?

2. Сколько пятизначных чисел оканчиваются на 7?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово daac?

4. В лифт девятиэтажного дома на 1-ом этаже вошли 4 человека. Сколькими способами они могут выйти из лифта, если известно, что первую остановку лифт сделал на пятом этаже?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1 p_2 p_3^4$;

   (б) 75^8.

6. Человек имеет 9 друзей и в течение нескольких дней приглашает их в гости так, что компания ни разу не повторяется. Сколько дней он может так делать?

7. Сколькими способами можно распределить по 15 вагонам 15 проводников, если за каждым вагоном закрепляется один проводник?

8. Есть 1 гвоздика, 4 розы и 3 тюльпана. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

   (е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

   Рассмотреть два случая:

   1) все цветы одного сорта одинаковые;

   2) все цветы одного сорта разные.

   Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. На прямой отмечено 12 точек, а на параллельной ей прямой 7 точек. Сколько существует четырёхугольников с вершинами в этих точках?

10. Сколькими способами из 12 девушек и 10 юношей можно выбирать команду, состоящую из 5 человек, если в неё должно войти не более трёх юношей?

11. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырёхместную?

12. Сколькими способами можно разделить 13 одинаковых пирожных между Таней, Ваней и Петей, если Таня должна получить не менее одного пирожного, Ваня — не менее трёх, а Петя — не более двух пирожных?

13. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 45, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$$

(а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 4, ни на 6, ни на 21.

15. Маляр должен покрасить 7 скамеек на детской площадке в белый, голубой и розовый цвета. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть покрашена хотя бы одна скамейка?

Вариант 3

1. Сколькими способами Оля может составить комплект из блузки, юбки и туфель, если в её гардеробе 6 блузок, 4 юбки и 5 пар туфель?

2. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на 5?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово cbbb?

4. С понедельника по пятницу доктор должен принять 7 человек. Ежедневно он может принять любое количество пациентов. Сколькими способами доктор может распределить пациентов по дням недели, если порядок приёма пациентов в течение дня не имеет значения?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1 p_2 p_3$;

   (б) 1000^3.

6. Лестница состоит из 7 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через несколько ступенек. Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?

7. Сколькими способами можно перетасовать колоду из 36 карт?

8. Есть 3 гвоздики, 1 роза и 4 тюльпана. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

   (е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

   Рассмотреть два случая:

   1) все цветы одного сорта одинаковые;

   2) все цветы одного сорта разные.

   Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. Для участия в лотерее "Спортлото"нужно указать 6 номеров из имеющихся на карточке 45 номеров. Сколькими способами можно заполнить карточку "Спортлото"? Каково число возможных вариантов заполнения карточки, при которых могло быть угадано ровно 3 номера?

10. Из трёх математиков и семи экономистов нужно составить комиссию из четырёх человек. Сколькими способами можно составить эту комиссию, если в неё должен входить хотя бы один математик?

11. Найти число слов в алфавите из пяти символов, в которые каждый символ входит ровно два раза.

12. Найти число слагаемых в разложении $([+y+z)^{10}$ после приведения подобных членов.

13. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 36, \\ x_1 \geq 5, x_2 \geq 4, x_3 \geq 3, x_4 \geq 2 \end{cases}$$

    (а) в целых неотрицательных числах;

    (б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 4, ни на 6, ни на 10.

15. Сколькими способами можно расселить 6 туристов по трём домикам так, чтобы ни один домик не остался пустым?

Вариант 4

1. На доске написаны 7 существительных, 5 глаголов и 4 прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из представленных частей речи. Сколькими способами это можно сделать?

2. Сколько пятизначных чисел делятся на 4?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово caac?

4. Сколькими способами можно разместить 30 различных книг на четырёх полках, если каждая полка может вместить все 30 книг, а порядок расположения книг на полке не имеет значения?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1^5 p_2 p_3^2$;

   (б) $3^8 5^3 14^9$.

6. В столовой предложено на выбор 6 блюд. Каждый день студент берёт некоторый набор блюд, причём этот набор должен быть отличен от всех наборов, которые он брал в предыдущие дни. Какое наибольшее количество дней студент сможет питаться по таким правилам?

7. Сколькими способами можно перетасовать колоду из 52 карт?

8. Есть 3 гвоздики, 4 розы и 1 тюльпан. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

   (е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

   Рассмотреть два случая:

   1) все цветы одного сорта одинаковые;

   2) все цветы одного сорта разные.

   Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. У Нины 8 разных шоколадных конфет, а у Коли 10 разных карамелек. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом шестью конфетами (6 на 6)?

10. В шахматном кружке занимаются 3 девочки и 8 мальчиков. Сколькими способами можно из них составить команду из четырёх человек, если в неё обязательно должна входить хотя бы одна девочка?

11. Сколькими способами можно разбить 15 человек на три команды по 5 человек в каждой?

12. В продаже есть ручки 4-х видов. Сколькими способами можно купить 10 ручек?

13. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23, \\ x_1 + x_2 + x_3 > 3 \end{cases}$$

    (а) в целых неотрицательных числах;

    (б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 4, ни на 6, ни на 14.

15. Сколькими способами можно расселить 8 гостей по четырём комнатам так, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

Вариант 5

1. Сколькими способами можно купить конверт с маркой, если на почте продаются 7 видов конвертов и 6 видов марок?

2. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на 8?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово bada?

4. В поезде 10 вагонов. Сколькими способами можно распределить по вагонам пятерых человек?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

    (а) $p_1 p_2^4 p_3$;

    (б) 10^{100}.

6. У человека 32 зуба. Может ли случиться так, что в России не найдётся двух человек с одинаковым набором зубов?

7. Сколькими способами можно перетасовать колоду из 52 карт так, чтобы чёрные и красные карты чередовались?

8. Есть 4 гвоздики, 3 розы и 1 тюльпан. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

   (е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

   Рассмотреть два случая:

   1) все цветы одного сорта одинаковые;

   2) все цветы одного сорта разные.

   Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. В классе 30 человек. Сколькими способами учитель может назначить четырёх дежурных при условии, что Петров и Сидоров не могут дежурить одновременно?

10. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых участвуют три чётных цифры и три нечётных?

11. Сколькими способами можно разместить 12 человек по трём комнатам так, чтобы в первых двух было по пять человек, а в третьей — 2 человека?

12. Сколькими способами можно разделить 17 одинаковых монет между 8 нумизматами, если каждому должна достаться хотя бы одна монета?

13. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 22, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \end{cases}$$

   (а) в целых неотрицательных числах;

   (б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 6, ни на 9, ни на 15.

15. Пятеро друзей собрались на празднование Нового года. Каждый пришёл с подарком. Сколько существует способов раздачи подарков, при которых каждый из друзей получает не свой подарок?

Вариант 6

1. В магазине продаются 5 видов чашек, 4 вида блюдец и 7 видов чайных ложек. Все предметы разные. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?

2. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых используются только цифры 1 и 2?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово cbbd?

4. В отделе работает 9 сотрудников. По итогам каждого месяца работы ровно один (лучший) сотрудник получает премию. Сколько можно составить различных вариантов годового графика выплаты премий?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1 p_2^3 p_3^4$;

   (б) $2^3 3^7 35^{11}$.

6. Сколько всего букетов можно составить из 10 различных цветов? Сколько среди них будет букетов с нечётным количеством цветов?

7. Сколькими способами можно перетасовать колоду из 36 карт так, чтобы чёрные и красные карты чередовались?

8. Есть 4 гвоздики, 1 роза и 3 тюльпана. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

(г) букет, в котором чётное количество цветов;

(д) букет, в котором нечётное количество цветов;

(е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

Рассмотреть два случая:

1) все цветы одного сорта одинаковые;

2) все цветы одного сорта разные.

Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чётные цифры шли в порядке возрастания, а нечётные — в порядке убывания? Например, 0, 9, 7, 2, 4, 5, 3, 6, 1, 8.

10. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых участвуют две чётных цифры и четыре нечётных?

11. У бедного студента осталось риса на две порции, гречки на три порции и овсянки на на две порции. Сколько у студента способов съесть это на завтраки в течение недели по одной порции в день?

12. Сколькими способами 4 человека могут распределить между собой 11 яблок?

13. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 38, \\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + x_5 \end{cases}$$

(а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 9, ни на 12, ни на 15.

15. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, ..., n$, в которых ровно два элемента стоят на своих исходных местах?

Вариант 7

1. На вершину горы ведут 9 дорог. Сколькими способами можно подняться на гору и спуститься с неё?

2. Сколько существует пятизначных чисел, все цифры которых чётны?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово abbd?

4. Каждая из трёх посылок может содержать не более 10 книг. Сколькими способами можно разложить 11 различных книг по трём посылкам? (Некоторые посылки могут не содержать книг.)

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1^2 p_2 p_3$;

   (б) 68^{10}.

6. У крокодила 68 зубов. Доказать, что среди 16^{17} крокодилов можно не найти двух крокодилов с одинаковым набором зубов.

7. Сколькими способами можно перетасовать колоду из 52 карт так, чтобы четыре подряд идущие карты были всех четырех мастей?

8. Есть 1 гвоздика, 2 розы и 5 тюльпанов. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

   (е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

   Рассмотреть два случая:

   1) все цветы одного сорта одинаковые;

   2) все цветы одного сорта разные.

   Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. Сколько существует шестизначных чисел, записанных с помощью цифр 4 и 5, в записи которых число четвёрок больше числа пятёрок?

10. Сколько существует шестизначных чисел, первые три цифры в записи которых образуют возрастающую последовательность, а последние три цифры образуют убывающую последовательность?

11. Сколькими способами можно разбить $2n$ человек на пары? Индукцией по n доказать, что количество этих способов выражается нечётным числом.

12. Сколькими способами 4 человека могут распределить между собой 10 яблок? 1 апельсин, 1 киви и 1 банан?

13. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 43, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 15 \end{cases}$$

    (а) в целых неотрицательных числах;

    (б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 4, ни на 6, ни на 14.

15. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, ..., n$, в которых ровно четыре элемента стоят на своих исходных местах?

Вариант 8

1. Игральную кость бросают трижды. Среди последовательностей результатов есть такие, у которых хотя бы один раз встречается шестёрка. Сколько их?

2. Сколько существует пятизначных чисел, все цифры которых нечётны?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово ddab?

4. Поезду, в котором находятся 15 пассажиров, предстоит сделать 10 остановок. Сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1^3 p_2 p_3^5$;

   (б) $121^{15} 34$.

6. Человек имеет 10 друзей и в течение нескольких дней приглашает их в гости так, что компания ни разу не повторяется. Сколько дней он может так делать?

7. Сколькими способами можно перетасовать колоду из 36 карт так, чтобы четыре подряд идущие карты были всех четырех мастей?

8. Есть 1 гвоздика, 5 розы и 2 тюльпана. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

   (е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

   Рассмотреть два случая:

   1) все цветы одного сорта одинаковые;

   2) все цветы одного сорта разные.

   Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. Сколько существует шестизначных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей?

10. Сколько существует шестизначных чисел, первые три цифры в записи которых образуют убывающую последовательность, а последние три цифры образуют возрастающую последовательность?

11. В группе 25 человек. Сколькими способами группу можно разбить на подгруппы составом в 7, 9, и 9 человек для прохождения производственной практики?

12. Сколько решений имеет неравенство

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 8$$

(а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах?

13. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 12, ни на 15, ни на 20.

14. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, ..., n$, в которых 1 и 2 не стоят на своих исходных местах?

Вариант 9

1. Игральную кость бросают трижды. Среди последовательностей результатов есть такие, у которых хотя бы один раз встречается шестёрка или тройка. Сколько их?

2. Сколько существует пятизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую чётность?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово dcac?

4. В лифт девятиэтажного дома на 1-ом этаже вошли 3 человека. Сколькими способами они могут выйти из лифта, если известно, что первую остановку лифт сделал на четвёртом этаже?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1 p_2 p_3^8$;

   (б) $169_3 51$.

6. На полке стоят 7 книг. Сколькими способами можно взять с полки несколько книг?

7. Сколько имеется десятизначных чисел, в записи которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

8. Есть 2 гвоздики, 1 роза и 5 тюльпанов. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

   (е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

   Рассмотреть два случая:

   1) все цветы одного сорта одинаковые;

   2) все цветы одного сорта разные.

   Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. Сколько существует семизначных чисел, сумма цифр которых равна 4?

10. Имеется 20 человек — 10 юношей и 10 девушек. Сколько существует способов составить из них компанию, в которой было одинаковое число юношей и девушек?

11. Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры числа 22345626236634?

12. Имеется m белых шаров и n чёрных, $m \geq n$. Сколькими способами можно разложить все шары в ряд так, чтобы никакие чёрные шары не лежали рядом? Рассмотреть два случая: все шары одного цвета одинаковые и все шары одного цвета разные.Перечислить все возможные способы взаимного расположения при $m = 3$ и $n = 2$.

13. Сколько решений имеет неравенство

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 7$$

   (а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах;

(в) в числах $1, 2$?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 8, ни на 12, ни на 20.

15. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, ..., n$, в которых ни один из элементов $1, 2, 3$ не стоит на своём месте?

Вариант 10

1. Бросают две игральные кости.

   (а) Сколькими способами они могут упасть?

   (б) Сколькими способами они могут упасть так, что на каждой грани выпадет чётное число очков?

2. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?(Например, 54345, 60206 и т.д.

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово cbba?

4. Сколькими способами можно расселить 7 гостей по четырём комнатам?(Некоторые комнаты при этом могут остаться пустыми.)

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1^2 p_2 p_3^7$;

   (б) 2500.

6. Лестница состоит из 6 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через несколько ступенек. Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?

7. Сколькими способами 7 человек могут разместиться в очереди, если A не должен находиться рядом с B?

8. Есть 2 гвоздики, 5 роз и 1 тюльпан. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

   (е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

   Рассмотреть два случая:

   1) все цветы одного сорта одинаковые;

   2) все цветы одного сорта разные.

   Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых участвуют три чётных и три нечётных цифры?(Все цифры разные.)

10. На школьном вечере присутствуют 13 юношей и 10 девушек. Сколькими способами можно выбрать из них 6 пар для танца?

11. Сколько буквенных последовательностей можно получить, переставляя буквы в слове ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ?

12. Сколькими способами можно разместить 9 кроватей в четырёх комнатах, если требуется, чтобы в каждой комнате была хотя бы одна кровать?

13. Сколько решений имеет неравенство

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6$$

   (а) в целых неотрицательных числах;

   (б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 6, ни на 12, ни на 14.

15. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, ..., n$, в которых, по крайней мере, 2 элемента стоят на своих местах?

Вариант 11

1. Бросают две игральные кости. Сколькими способами они могут упасть?Сколькими способами они могут упасть так, что на каждой грани выпадет нечётное число очков?

2. Сколько существует пятизначных чисел, в запись которых входит цифра 5?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово dccb?

4. Сколькими способами может произойти голосование по выбору председателя в обществе из 20 членов, если каждый голосует за одного человека (быть может, и за себя)?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1^3 p_2^2 p_3^7$;

   (б) 28^{11}.

6. В столовой предложено на выбор 7 блюд. Каждый день студент берёт некоторый набор блюд, причём этот набор должен быть отличен от всех наборов, которые он брал в предыдущие дни. Какое наибольшее количество дней студент сможет питаться по таким правилам?

7. Сколько различных (возможно бессмысленных) слов можно составить из букв слова ЛОЗА, если буквы в слове не должны повторяться?

8. Есть 5 гвоздик, 1 роза и 2 тюльпана. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

(е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

Рассмотреть два случая:

1) все цветы одного сорта одинаковые;

2) все цветы одного сорта разные.

Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. Сколькими способами можно составить комиссию из 3 человек, выбирая её членов из 8 супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

10. Сколькими способами из 12 юношей и 14 девушек можно выбрать из них 4 пары для танца?

11. Сколько существует способов разложить 16 различных шаров по восьми различным ящикам так, чтобы в каждом ящике было по два шара?

12. Ящики занумерованы числами от 1 до 7. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 18 одинаковых шаров?

13. Сколько решений имеет неравенство $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 5$

    (а) в целых неотрицательных числах;

    (б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 8, ни на 12, ни на 18.

15. Переплётчик должен переплести 7 различных книг в красный, жёлтый и зелёный переплёты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

Вариант 12

1. Бросают две игральные кости. Сколькими способами они могут упасть?Сколькими способами они могут упасть так, что на каждой грани выпадет число очков одинаковой чётности?

2. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на 4 и состоят из цифр 5, 2, 3, 4?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово dbab?

4. В отделе работает 10 сотрудников. По итогам каждого месяца работы ровно один (лучший) сотрудник получает премию. Сколько можно составить различных вариантов годового графика выплаты премий?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1^2 p_2 p_3^4$;

   (б) 999^{10}.

6. У человека 32 зуба. Может ли случиться так, что в нашем городе не найдётся двух человек с одинаковым набором зубов?

7. Сколькими способами 11 человек могут выстроиться в очередь, если Иванов, Петров и Сидоров хотят стоять подряд (в произвольном порядке)?

8. Есть 5 гвоздик, 2 розы и 1 тюльпан. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

   (е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

   Рассмотреть два случая:

   1) все цветы одного сорта одинаковые;

   2) все цветы одного сорта разные.

   Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой половине было по 2 туза?

10. У Вани 10 марок, а у Пети 12 марок. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом четырьмя марками (4 на 4)?

11. Есть 11 цветков разного цвета. Сколькими способами можно раздать их трём девочкам так, чтобы одной досталось 5 цветков, а другим по 3 цветка?

12. Сколькими способами можно разделить 90 одинаковых акций между 6-ю людьми так, чтобы каждому досталась хотя бы одна акция?

13. Сколько решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

    (а) в целых неотрицательных числах;

    (б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 6, ни на 9, ни на 12.

15. Маляр должен покрасить 6 скамеек на детской площадке в белый, голубой и розовый цвета. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть покрашена хотя бы одна скамейка?

Вариант 13

1. В магазине продаются 5 видов чашек, 4 вида блюдец и 7 видов чайных ложек. Все предметы разные. Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями?

2. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на 4 и состоят из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, причём каждая цифра может встречаться в записи числа только один раз?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово ccab?

4. Переплётчик должен переплести 13 разных книг в красный, зелёный и синий переплёты. Сколькими способами он может это сделать?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1^4 p_2 p_3^5$;

   (б) $3^7 5^3 14$.

6. Сколько всего букетов можно составить из 11 различных цветов? Сколько среди них будет букетов с нечётным количеством цветов?

7. Сколькими способами 12 человек могут выстроиться в очередь, если Иванов и Петров не хотят стоять в очереди рядом друг с другом?

8. Есть 3 гвоздика, 3 розы и 2 тюльпана. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

   (е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

   Рассмотреть два случая:

   1) все цветы одного сорта одинаковые;

   2) все цветы одного сорта разные.

   Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 6 карт так, чтобы были представители только одной масти?

10. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых первые три позиции заняты различными нечётными цифрами, а последние три — различными чётными?

11. Определить количество различных слов, получаемых перестановкой букв в слове ПАПАРАЦЦИ.

12. С понедельника по пятницу доктор должен осуществить 12 приёмов пациентов. Сколькими способами можно составить расписание приёмов, если ежедневно он может принимать любое количество пациентов?

13. Сколько решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

(а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 6, ни на 12, ни на 15.

15. Сколькими способами можно расселить 8 туристов по трём домикам так, чтобы ни один домик не остался пустым?

Вариант 14

1. В магазине продаются 5 видов чашек, 4 вида блюдец и 7 видов чайных ложек. Все предметы разные. Сколькими способами можно купить два комплекта, состоящего из чашки, блюдца и ложки?

2. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых некоторая цифра встречается ровно 4 раза?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово cbbc?

4. Каждая из трёх посылок может содержать не более 9 книг. Сколькими способами можно распределить 10 различных книг по трём посылкам? (Некоторые посылки могут не содержать книг.)

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1^2 p_2^3 p_3^2$;

   (б) 100^{10}.

6. У крокодила 68 зубов. Доказать, что среди 16^{17} крокодилов можно не найти двух крокодилов с одинаковым набором зубов.

7. Сколькими способами 11 человек могут выстроиться в очередь, если Иванов хочет стоять рядом с Петровым?

8. Есть 3 гвоздики, 2 розы и 3 тюльпана. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

   (е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

   Рассмотреть два случая:

   1) все цветы одного сорта одинаковые;

   2) все цветы одного сорта разные.

   Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 6 карт так, чтобы среди них был ровно один туз?

10. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых все цифры разные и нечётные цифры чередуются с чётными?

11. Сколькими способами можно распределить 13 задач между четырьмя студентами так, чтобы один получил 4 задачи, а остальные — по 3 задачи?

12. Сколькими способами можно выложить в ряд 5 синих, 5 красных и 5 зелёных шаров так, чтобы никакие зелёные шары не лежали рядом?

13. Сколько решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

   (а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах;

(в) в числах 0, 1, 2?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 4, ни на 14, ни на 20.

15. Сколькими способами можно расселить 7 гостей по четырём комнатам так, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

Вариант 15

1. Петя и Коля — начинающие коллекционеры. У Пети 10 марок, а у Коли 8 марок. Все марки разные. Сколькими способами они могут осуществить обмен одной марки на одну марку?

2. Сколько существует пятизначных чисел, которые не содержат цифру 2 в своей записи?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово caad?

4. Сколькими способами можно разложить 10 монет различного достоинства по четырём кошелькам?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1^7 p_2 p_3^3$;

   (б) 450^4.

6. На полке стоят 9 книг. Сколькими способами можно взять с полки несколько книг?

7. Сколькими способами 11 человек могут выстроиться в очередь, если Иванов и Петров не хотят стоять друг за другом?

8. Есть 2 гвоздики, 3 розы и 3 тюльпана. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

(г) букет, в котором чётное количество цветов;

(д) букет, в котором нечётное количество цветов;

(е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

Рассмотреть два случая:

1) все цветы одного сорта одинаковые;

2) все цветы одного сорта разные.

Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 6 карт так, чтобы среди них был хотя бы один туз?

10. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 44 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из одного офицера, трёх сержантов и 20 рядовых?

11. У продавца антиквариата 15 различных монет. Нумизматы А, Б, В, Г купили эти монеты: А купил 4 монеты, Б — 5 монет, В — 3 монеты и Г — 3 монеты. Сколькими способами они могли осуществить свои покупки?

12. Сколькими способами m пассажиров могут выйти на n остановках? (Учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.)

13. Сколько решений, удовлетворяющих условиям: x_1, x_2 — чётные, x_3, x_4 — нечётные, имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40$$

(а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 15, ни на 21, ни на 35.

15. Четверо друзей собрались на празднование Нового года. Каждый пришёл с подарком. Сколько существует способов раздачи подарков, при которых

(а) каждый из друзей получает не свой подарок;

(б) каждый из друзей обменивается с кем-нибудь подарками?

Вариант 16

1. Имеется материя пяти различных цветов. Сколькими способами можно сделать трёхцветный флаг с полосками одинаковой ширины, если все полоски на флаге должны быть разных цветов?

2. Сколько существует чётных пятизначных чисел, все цифры в записи которых различны?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово daac?

4. В лифт девятиэтажного дома на 1-ом этаже вошли 3 человека. Сколькими способами они могут выйти из лифта, если известно, что первую остановку лифт сделал на шестом этаже?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1^2 p_2^3 p_3^4$;

   (б) 1620^5.

6. Человек имеет 11 друзей и в течение нескольких дней приглашает их в гости так, что компания ни разу не повторяется. Сколько дней он может так делать?

7. Сколько существует способов размещения 12 человек за столом с занумерованными местами, если A не должен сидеть рядом с B?

8. Есть 2 гвоздики, 3 розы и 4 тюльпана. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

(е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

Рассмотреть два случая:

1) все цветы одного сорта одинаковые;

2) все цветы одного сорта разные.

Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. Сколькими способами можно переставить буквы слова ИВОЛГА так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?

10. Сколько существует способов составить компанию из 8 юношей и 12 девушек, в которой было одинаковое число юношей и девушек?

11. У продавца антиквариата 16 различных монет. Двое нумизматов купили у него по три монеты, а другие двое по пять монет. Сколькими способами они могли купить?

12. Каждый из n членов общества голосует за одного человека (быть может и за себя). Сколько существует возможных исходов голосования (по количеству проголосовавших за каждого из членов общества)?

13. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 36, \\ x_1 \geq 3, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 6 \end{cases}$$

(а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 10, ни на 15, ни на 35.

15. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, ..., n$, в которых ровно три элемента стоят на своих исходных местах?

Вариант 17

1. Группа изучает 11 предметов. В среду по расписанию 5 пар по разным предметам. Сколькими способами можно составить расписание на среду?

2. Сколько существует нечётных пятизначных чисел, все цифры в записи которых различны?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово ccab?

4. Сколькими способами можно рассадить 8 кроликов по трём клеткам?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1 p_2 p_3^{17}$;

   (б) 122^{10}.

6. Лестница состоит из 5 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через несколько ступенек. Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?

7. Сколько существует способов размещения 12 человек за столом с занумерованными местами, если А должен сидеть во главе стола (на месте № 1)?

8. Есть 2 гвоздики, 4 розы и 3 тюльпана. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

   (е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

   Рассмотреть два случая:

   1) все цветы одного сорта одинаковые;

   2) все цветы одного сорта разные.

   Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. Сколькими способами можно разрезать ожерелье, состоящее из 32 различных бус, на 8 частей?

10. В шахматном кружке занимаются 4 девочки и 7 мальчиков. Сколькими способами из них можно составить команду из четырёх человек,если в неё обязательно должна входить хотя бы одна девочка?

11. Сколькими способами могут распределиться медали между 24 футбольными командами, если золотые медали получает команда — победитель, серебряные — команда, проигравшая в финале, бронзовые — две команды, которые проиграли в полуфинале?

12. Каждый из 34 человек может проголосовать только за одно предложение из пяти, и учитывается лишь количество голосов, поданных за каждое предложение. Сколькими способами могут распределиться голоса?

13. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 32, \\ x_1 + x_2 > 2 \end{cases}$$

   (а) в целых неотрицательных числах;

   (б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 4, ни на 10, ни на 18.

15. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, ..., n$, в которых 1 и 3 не стоят на своих исходных местах?

Вариант 18

1. Сколькими способами в лотерее "Спортпрогноз"можно заполнить карточку? (В этой лотерее нужно предсказать итог 13 матчей. Итог каждого матча — это победа одной из команд или ничья. Счёт роли не играет.)

2. Сколько существует пятизначных чисел, все цифры в записи которых различны?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово cbac?

4. Сколькими способами можно разместить 10 книг на трёх полках, если каждая полка может вместить все 10 книг, а порядок расположения книг на полке не имеет значения?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1^3 p_2^3 p_3^3$;

   (б) 1400.

6. В столовой предложено на выбор 7 блюд. Каждый день студент берёт некоторый набор блюд, причём этот набор должен быть отличен от всех наборов, которые он брал в предыдущие дни. Какое наибольшее количество дней студент сможет питаться по таким правилам?

7. Сколько существует способов размещения 12 человек за столом с занумерованными местами, если А должен сидеть во главе стола (на месте № 1), а В не должен сидеть рядом с А?

8. Есть 4 гвоздики, 2 розы и 3 тюльпана. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

   (е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

   Рассмотреть два случая:

   1) все цветы одного сорта одинаковые;

   2) все цветы одного сорта разные.

   Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 6 карт так, чтобы среди них было ровно два туза?

10. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть две чётных цифры и три нечётных?

11. Сколькими способами класс, в котором учатся 24 школьника, можно разбить на четыре разные группы для углубленного изучения английского языка, если в каждой группе должно быть ровно 6 школьников?

12. В почтовом отделении продаются 12 видов открыток. Сколькими способами можно купить в нём 9 открыток?

13. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 33, \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

(а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 6, ни на 14, ни на 21.

15. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, ..., n$, в которых 1 и 4 не стоят на своих исходных местах?

Вариант 19

1. Монету бросают 10 раз. Сколько различных последовательностей орлов и решек можно получить?

2. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых чётные цифры чередуются с нечётными?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово dbaa?

4. Вася привёз из путешествия 5 различных сувениров и хочет подарить их двум девушкам Оле и Тане. Сколькими способами он может это сделать, если хочет, чтобы у каждой девушки было хотя бы по одному подарку?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1^4 p_{2^4} p_3^5$;

   (б) $315^7 5$.

6. Стоматолог выяснил, что в его районе любые два человека отличаются набором зубов. Максимальное количество зубов у человека — 32. Каким может быть максимальное население района?

7. Сколько существует способов размещения 12 человек за столом с занумерованными местами, если A должен сидеть во главе стола (на месте № 1), а B не должен сидеть рядом с C?

8. Есть 4 гвоздики, 3 розы и 2 тюльпана. Сколькими способами из них можно составить ((а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

   (е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

   Рассмотреть два случая:

   1) все цветы одного сорта одинаковые;

   2) все цветы одного сорта разные.

   Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 6 карт так, чтобы среди них был хотя бы один туз?

10. Из 22 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из 5 человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду, чтобы в неё вошло не более трёх девушек?

11. Сколькими способами можно расположить в 19 лузах 2 белых и 7 чёрных шаров?

12. Сколькими способами можно разложить 5 чёрных, 3 белых и 4 серых шара в шесть различных ящиков?

13. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 40, \\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + x_5 \end{cases}$$

(а) в целых неотрицательных числах;

(б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 4, ни на 6, ни на 9.

15. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, ..., n$, в которых ни один из элементов $1, 3, 5$ не стоит на своём месте?

Вариант 20

1. В районе есть 4 города: А, Б, В, Г. Из А в Б ведёт 4 дороги, из Б в В — 3 дороги, из А в Г — 5 дорог, из Г в В — 2 дороги. Сколькими способами можно проехать из А в В?

2. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы один 0?

3. Племя использует латинский алфавит. В словаре племени сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово caab?

4. Три человека должны унести 8 предметов. Сколькими способами это можно сделать, если каждый способен унести любое количество имеющихся предметов?

5. Пусть p_1, p_2, p_3 — различные простые числа. Найти количество различных делителей числа

   (а) $p_1^3 p_2^4 p_3^5$;

   (б) 48^{29}.

6. У человека 32 зуба. Может ли случиться так, что в России не найдётся двух человек с одинаковым набором зубов?

7. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3, 4, 5 встречаются ровно по одному разу, а числа 1 и 2 не стоят рядом?

8. Есть 3 гвоздики, 4 розы и 2 тюльпана. Сколькими способами из них можно составить

   (а) букет;

   (б) букет из цветов одного сорта;

   (в) букет, в котором нечетное количество цветов каждого сорта;

   (г) букет, в котором чётное количество цветов;

   (д) букет, в котором нечётное количество цветов;

   (е) букет, в котором не менее, чем 3 цветка?

   Рассмотреть два случая: 1) все цветы одного сорта одинаковые; 2) все цветы одного сорта разные.

   Замечание. В букете должно быть не менее одного цветка.

9. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 6 карт так, чтобы среди них было четыре туза?

10. На школьном вечере присутствуют 15 юношей и 20 девушек. Сколькими способами можно выбрать из них 5 пар для танца?

11. Есть 23 шара: 4 белых, 5 красных, 6 синих и 8 зелёных. Шары одного цвета неразличимы. Сколько различных гирлянд можно создать, располагая шары друг за другом?

12. В большой коробке лежат шарики k цветов (одноцветные шарики ничем не отличаются). Для игры Петя хочет взять m шариков и положить их в n коробок. Сколькими способами это можно сделать?

13. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 45, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 17 \end{cases}$$

   (а) в целых неотрицательных числах; (б) в целых положительных числах?

14. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 210, не делящихся ни на 6, ни на 10, ни на 15.

15. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, ..., n$, в которых ни один из элементов $2, 4, 6$ не стоит на своём месте?

Библиографический список

1. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

2. Глибичук А.А., Ильинский Д.Г., Мусатов Д.В., Райгородский А.М., Чернов А.А. Основы комбинаторики и теории чисел. Сборник задач. ИД Интеллект, 2019.

3. Ильинская И.П., Ильинский А.И. Дискретная математика. Сборник задач. Комбинаторика, графы, вероятность. Учебно-методическое пособие. Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2008.

4. Нефёдов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. М.: МАИ, 1992.

5. Шварц Д.А. Задачи по комбинаторике. М., 2018. Режим доступа: `https://publications.hse.ru/books/225216295`