

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФГБОУ ВО «АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Физико-технический факультет
Кафедра радиофизики и теоретической физики



Лабораторные работы по квантовой электродинамике

Методические указания

Барнаул, 2019

УДК 539.12.01

Лабораторные работы по квантовой электродинамике: методические указания. — Барнаул: изд-во АлтГУ, 2019. — 28 с.

Автор:

канд. физ.-мат. наук *А. И. Гончаров*

Рецензент:

д.ф.-м.н., профессор *А. М. Сагалаков*

Методичка содержит указания к теоретическим лабораторным работам по квантовой электродинамике. Она предназначена для студентов, обучающихся по направлению 03.04.03 «Радиофизика».

Печатается по решению кафедры радиофизики и теоретической физики и учебно-методической комиссии физико-технического факультета АлтГУ

© А. И. Гончаров, 2019

© Алтайский государственный университет, 2019

Введение

Данные лабораторные работы относятся к скалярной электродинамике. В этой теории имеются только следующие частицы: скалярная (т.е. бесспиновая) частица χ^+ , ее античастица χ^- и фотон γ . Других частиц в этой теории нет; например, фотон не может образовать обычную электрон-позитронную пару. Образование пары скалярных частиц фотоном возможно; аннигиляция пары скалярных частиц происходит с образованием фотонов. Считаем, что заряженные скалярные частицы участвуют только в электромагнитном взаимодействии. В природе таких частиц нет: заряженные (псевдо)скалярные частицы встречаются только среди мезонов, но модель «бесспиновых электронов» часто применяют в учебных целях, так как уравнение Клейна — Гордона — Фока значительно проще уравнения Дирака. В некоторых случаях, когда можно пренебречь сильным взаимодействием по сравнению с электромагнитным, эту модель можно применять для приближенного описания электромагнитного взаимодействия К-мезонов или пи-мезонов. В дальнейшем для краткости вместо «заряженная скалярная частица» будем говорить «пи-мезон» (π^\pm), в том числе и в тех случаях, когда в действительности сильное взаимодействие пи-мезонов является существенным.

Лабораторная работа 1. Лагранжианы свободных полей

Цель работы: построение лагранжианов свободного комплексного скалярного поля и электромагнитного поля.

1. Комплексное скалярное поле

Дано: уравнения Клейна — Гордона — Фока

$$(\partial_k \partial^k + m^2)u(x) = 0, \quad (1)$$

$$(\partial_k \partial^k + m^2)u^*(x) = 0 \quad (2)$$

и уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{d}{dx^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \frac{d}{dx^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u^*} = 0. \quad (4)$$

Задание: построить минимальный лагранжиан (с точностью до постоянного множителя), при подстановке которого в уравнения (3), (4) получаются уравнения (1), (2).

Указания

Требования к лагранжиану \mathcal{L}

Обязательные требования:

1) $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$; 2) \mathcal{L} — скаляр; 3) \mathcal{L} не зависит явно от x (локальность).

Условие «минимальности»:

4) \mathcal{L} не содержит 2-й и более старших производных.

Итак, структура лагранжиана: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u_j(x), \frac{\partial u_j}{\partial x^k})$.

В случае комплексного скалярного поля $u_1(x) = u(x)$, $u_2(x) = u^*(x)$. Все функции, входящие в лагранжиан (u , u^* , $\partial_0 u$, $\partial_1 u$...), являются независимыми.

2. Действительное векторное поле

Дано: уравнение Даламбера

$$\partial_k \partial^k A_n(x) = 0. \quad (5)$$

Задание: построить минимальный лагранжиан (с точностью до постоянного множителя), при подстановке которого в уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_n} - \frac{d}{dx^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k A_n} = 0 \quad (6)$$

получается уравнение (5).

Указание. Предварительно вычислите производные

$$\frac{\partial a_n a^n}{\partial a_k}, \quad \frac{\partial a_{mn} a^{mn}}{\partial a_{kl}},$$

где a_n — некоторый 4-вектор, a_{mn} — некоторый тензор 2-го ранга.

Лабораторная работа 2. Расчет матричного элемента комптоновского рассеяния фотона. Часть I

Цель работы: освоить технику подробного расчета (без применения диаграмм Фейнмана) матричного элемента S -оператора, не содержащего хронологического произведения. Для процесса $\gamma + \pi^+ \rightarrow \gamma + \pi^+$ найти слагаемое матричного элемента S -оператора, содержащее однократный интеграл по объему 4-пространства.

Обозначения: p — 4-импульс пи-мезона до рассеяния; k, λ — 4-импульс и индекс поляризации фотона до рассеяния; p', k', λ' — эти величины после рассеяния.

Для краткости не пишем шляпки над следующими операторами: $u(x), \varphi^{(\pm)}(p)$ — операторы поля пи-мезонов, $u^*(x), \varphi^{(\pm)*}(p)$ — сопряженные мезонные операторы, $A_n(x), a_\lambda^{(\pm)}(k)$ — операторы электромагнитного поля. Эрмитово сопряжение операторов обозначено звездочкой.

Требуется вычислить матричный элемент $S_{fi}^{(1)} = (\Phi_f^* \hat{S}^{(1)} \Phi_i)$ оператора

$$\hat{S}^{(1)} = -i \int_{R_4} \hat{\mathcal{H}}_I(x) dx,$$

где

$$\Phi_i = \varphi^{*(+)}(p) a_\lambda^{(+)}(k) \Phi_0, \quad \Phi_f = \Phi_0 \varphi^{(-)}(p') a_{\lambda'}^{(-)}(k'),$$

$$\hat{\mathcal{H}}_I(x) = \hat{\mathcal{H}}_I'(x) + \hat{\mathcal{H}}_I''(x),$$

$$\hat{\mathcal{H}}_I'(x) = izN \left(u^*(x) \partial_n u(x) - (\partial_n u^*(x)) u(x) \right) A^n(x),$$

$$\hat{\mathcal{H}}_I''(x) = -z^2 N \left(u^*(x) u(x) A_n(x) A^n(x) \right).$$

Указания

Перечислим свойства вектора состояния вакуума и операторов, необходимые для расчета матричного элемента.

1) По определению вакуума, $b^{(-)} \Phi_0 = 0, \Phi_0^* b^{(+)} = 0$, где b — любой полевой оператор. Нормировка вектора состояния вакуума: $(\Phi_0^* \Phi_0) = 1$.

2) Коммутатор двух любых полевых операторов представляет собой обычную функцию.

Отсюда вытекает метод вычисления скалярных произведений.

Пример 1.

$(\Phi_0^* a^{(-)} b^{(+)} \Phi_0) = /a^{(-)} b^{(+)} = [a^{(-)}, b^{(+)}] + b^{(+)} a^{(-)} / =$
 $= [a^{(-)}, b^{(+)}] (\Phi_0^* \Phi_0) + (\Phi_0^* b^{(+)} a^{(-)} \Phi_0) = [a^{(-)}, b^{(+)}]$. Здесь учтено, что коммутатор полевых операторов является обычной функцией и поэтому выносится из скалярного произведения.

Пример 2.

Покажите, что $(\Phi_0^* a^{(-)} b^{(+)} c^{(+)} M \Phi_0) = 0$, $(\Phi_0^* M a^{(-)} b^{(-)} c^{(+)} \Phi_0) = 0$, где a, b, c, M — любые полевые операторы.

Вывод: два оператора рождения «пробиваются» к сопряженному вакууму сквозь оператор уничтожения, и annullают скалярное произведение; аналогично, один оператор рождения не может загородить обычный вакуум от двух операторов уничтожения.

3) Мезонные операторы u, φ коммутируют с электромагнитными A, a . Вообще, операторы, относящиеся к разным полям, коммутируют.

4) Операторы одинаковой частотности коммутируют.

5) В случае комплексного поля операторы с одинаковым сопряжением коммутируют.

6) Коммутаторы, отличные от тождественного нуля:

$$[\varphi^{(-)}(p), \varphi^{(+)}(p')] = \delta_3(\vec{p} - \vec{p}'), \quad [\varphi^{(-)}(p), \varphi^{(+)}(p')] = \delta_3(\vec{p} - \vec{p}'),$$

$$[a_{\lambda}^{(-)}(k), a_{\lambda'}^{(+)}(k')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_3(\vec{k} - \vec{k}').$$

Задания

1. Если вы не прделали вычисления в Примере 2, то прделайте их.

2. Вычислите $S_{fi}^{(1)'} (учитывается только \hat{H}_I'(x))$.

Указание. Обычно матричный элемент состоит из большого числа слагаемых, но многие из них равны нулю. Рассматривая очередное слагаемое, нужно прежде всего попытаться показать, что оно равно нулю. Можно рассматривать мезонные и фотонные операторы по очереди, пользуясь тем, что операторы этих двух типов коммутиру-

ют. Целесообразно начинать с операторов, для которых выражение проще. В этом задании более простая — фотонная часть. Обозначим мезонную часть \hat{M} :

$$\hat{M} = \varphi^{(-)}(p')N \left(\overset{*}{u}(x)\partial_n u(x) - (\partial_n \overset{*}{u}(x))u(x) \right) \varphi^{(+)}(p).$$

Рассмотрите скалярное произведение

$$(\Phi_0 \hat{M} a_{\lambda'}^{(-)}(k') A^n(x) a_{\lambda}^{(+)}(k) \Phi_0).$$

Для этого запишите оператор $A^n(x)$ в виде суммы $A^{n(+)}(x) + A^{n(-)}(x)$ и используйте результаты из Примера 2. Не обращайте внимания на оператор \hat{M} , который можно написать в любом месте между векторами состояний $\overset{*}{\Phi}_0$ и Φ_0 .

3. Расчет $S_{fi}^{(1)''}$ (слагаемое, соответствующее $\hat{\mathcal{H}}_I''(x)$).

Указания

3.1. Рассмотрим $\hat{h} \stackrel{def}{=} N(\overset{*}{u}u A_m A^m) = N(\overset{*}{u}u)N(A_m A^m) = N((\overset{*}{u}^{(+)} + \overset{*}{u}^{(-)})(u^{(+)} + u^{(-})))N((A_m^{(+)} + A_m^{(-)})(A^{m(+)} + A^{m(-)})) = (\overset{*}{u}^{(+)}u^{(+)} + \overset{*}{u}^{(+)}u^{(-)} + u^{(+)}\overset{*}{u}^{(-)} + u^{(-)}\overset{*}{u}^{(-)})(A_m^{(+)}A^{m(+)} + 2A_m^{(+)}A^{m(-)} + A_m^{(-)}A^{m(-)})$. Перемножим эти скобки и получим 12 слагаемых:

$$\hat{h} = \sum_{r=1}^{12} \hat{h}_r, \quad \hat{h}_1 = \overset{*}{u}^{(+)}u^{(+)}A_m^{(+)}A^{m(+)}, \quad \hat{h}_2 = 2\overset{*}{u}^{(+)}u^{(+)}A_m^{(+)}A^{m(-)}, \dots,$$

$$\hat{h}_5 = 2\overset{*}{u}^{(+)}u^{(-)}A_m^{(+)}A^{m(-)}, \dots, \quad \hat{h}_8 = 2u^{(+)}\overset{*}{u}^{(-)}A_m^{(+)}A^{m(-)}, \dots,$$

$$\hat{h}_{12} = \overset{*}{u}^{(-)}u^{(-)}A_m^{(-)}A^{m(-)}.$$

3.2. Исходя из свойств операторов 1) — 5) (особенно полезны результаты Примера 2), найдите по возможности все операторы \hat{h}_r , для которых матричные элементы $(h_r)_{fi} = 0$.

3.3. С помощью выкладки, приведенной в Примере 1, преобразуйте $h_{fi} = (\overset{*}{\Phi}_f \hat{h} \Phi_i)$ так, чтобы полевые операторы содержались только внутри коммутаторов; а именно, появятся коммутаторы смешанного типа [координатный полевой оператор, импульсный полевой оператор].

3.4. Вычислите коммутаторы $[\varphi^{(-)}(p'), \hat{u}^{(+)}(x)]$, $[u^{(-)}(x), \hat{\varphi}^{(+)}(p)]$, $[a_{\lambda'}^{(-)}(k'), A_m^{(+)}(x)]$, $[A^{m(-)}(x), a_{\lambda}^{(+)}(k)]$. Для этого запишите координатные полевые операторы в виде интегралов Фурье:

$$\hat{u}^{(+)}(x) = \int_{R_3} d\vec{p}'' \eta(p'') e^{ip_i'' x^i} \hat{\varphi}^{(+)}(p''),$$

$$u^{(-)}(x) = \int_{R_3} d\vec{p}''' \eta(p''') e^{-ip_i''' x^i} \varphi^{(-)}(p'''),$$

$$A_m^{(+)}(x) = \int_{R_3} d\vec{k}'' \eta(k'') e^{ik_i'' x^i} \varepsilon_m^{\lambda''}(k'') a_{\lambda''}^{(+)}(k''),$$

$$A^{m(-)}(x) = \int_{R_3} d\vec{k}''' \eta(k''') e^{-ik_i''' x^i} \varepsilon^{\lambda''' m}(k''') a_{\lambda'''}^{(-)}(k''')$$

($d\vec{p}$, $d\vec{k}$ — элементы объема пространства импульсов, $\eta(q) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2q_0}}$ — нормировочный множитель); используйте формулы для ненулевых коммутаторов импульсных операторов.

3.5. Вычислите интеграл по x , запишите $S_{fi}^{(1)''}$.

4. Для проверки полученной формулы для $S_{fi}^{(1)}$ убедитесь, что формула не содержит других свободных индексов, кроме индексов поляризации λ, λ' . Входящая в формулу дельта-функция должна отражать закон сохранения 4-импульса.

Лабораторная работа 3. Расчет матричного элемента комптоновского рассеяния фотона. Часть II

Цель работы: Освоить преобразование хронологических произведений с помощью теорем Вика; провести анализ слагаемого матричного элемента, которое содержит двойной интеграл и квадратично по заряду. В ходе работы формулируются выводы, на основе которых в дальнейшем (на лекции) будут введены диаграммы Фейнмана.

Введение

В лабораторной работе №2 мы вычислили первое ненулевое слагаемое $S_{fi}^{(1)''}$ ряда Неймана для матричного элемента S -оператора. Оно пропорционально z^2 , т.е. относится ко второму порядку теории возмущений. Такой же порядок малости имеет еще одно слагаемое — $S_{fi}^{(2)'} = (\Phi_f \hat{S}^{(2)'} \Phi_i)$

— матричный элемент оператора

$$\hat{S}^{(2)'} = \frac{(-i)^2}{2} \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P(\hat{\mathcal{H}}_I'(x)\hat{\mathcal{H}}_I'(y))$$

(обозначения см. в работе №2). Его необходимо вычислить для того, чтобы задача во втором порядке теории возмущений была решена полностью.

Будем рассматривать только такие столкновения частиц, которые сопровождаются изменением импульсов: $p' \neq p, k' \neq k$. Столкновения без изменения импульсов тоже, конечно, представляют интерес; их нужно рассматривать отдельно.

Обозначим $\partial_n u(x) = u_n(x)$. Рассмотрим $-P(\hat{\mathcal{H}}_I'(x)\hat{\mathcal{H}}_I'(y))/z^2 = P(N(\overset{*}{u}(x)u_m(x) - \overset{*}{u}_m(x)u(x))N(\overset{*}{u}(y)u_n(y) - \overset{*}{u}_n(y)u(y)))P_A = P_u P_A$,
 $P_u = P_{u_1} + P_{u_2} + P_{u_3} + P_{u_4}$, $P_A = P(A^m(x)A^n(y))$;

$$\begin{aligned} P_{u_1} &= P(N(\overset{*}{u}(x)u_m(x))N(\overset{*}{u}(y)u_n(y))), \\ P_{u_2} &= -P(N(\overset{*}{u}(x)u_m(x))N(\overset{*}{u}_n(y)u(y))), \\ P_{u_3} &= -P(N(\overset{*}{u}_m(x)u(x))N(\overset{*}{u}(y)u_n(y))), \\ P_{u_4} &= P(N(\overset{*}{u}_m(x)u(x))N(\overset{*}{u}_n(y)u(y))). \end{aligned}$$

Задание 1. Распишите по теореме Вика

Вариант 1: P_{u_1} . Вариант 2: P_{u_2} . Вариант 3: P_{u_4} (не P_{u_3} !).

Сразу отбросьте нулевые слагаемые.

Задание 2. Найдите матричный элемент оператора, который содержит

$$\text{Вариант 1: } P_{u_{10}} = N(\overset{*}{u}(x)u_m(x)\overset{*}{u}(y)u_n(y)).$$

$$\text{Вариант 2: } P_{u_{20}} = -N(\overset{*}{u}(x)u_m(x)\overset{*}{u}_n(y)u(y)).$$

$$\text{Вариант 3: } P_{u_{40}} = N(\overset{*}{u}_m(x)u(x)\overset{*}{u}_n(y)u(y)).$$

Указание. Обозначим фотонные операторы $\hat{\Gamma} = a_{\lambda'}^{(-)}(k')P_A a_{\lambda}^{(+)}(k)$ и рассмотрим $(\hat{\Phi}_0 \varphi^{(-)}(p')P_{u_{i0}} \varphi^{(+)}(p)\hat{\Gamma}\hat{\Phi}_0)$, обращая внимание только на мезонные операторы.

Задание 3. Найти вклад в матричный элемент S -оператора того слагаемого, которое содержит

$$\text{Вариант 1: } P_{u_{12}} = \overbrace{\overset{*}{u}(x)u_n(y)} \cdot \overbrace{u_m(x)\overset{*}{u}(y)};$$

$$\text{Вариант 2: } P_{u_{22}} = -\overbrace{\overset{*}{u}(x)u(y)} \cdot \overbrace{u_m(x)\overset{*}{u}_n(y)};$$

$$\text{Вариант 3: } P_{u_{42}} = \overbrace{\overset{*}{u}_m(x)u(y)} \cdot \overbrace{u(x)\overset{*}{u}_n(y)}.$$

Задание 4 (только для вариантов 1 и 3)

Покажите, что слагаемые S -оператора, которые содержат операторы
 Вариант 1:

$$P_{u_{11}}^{(1)} = \overbrace{u^*(x)u_n(y)}^* N(u_m(x)u^*(y)) \text{ и } P_{u_{11}}^{(2)} = \overbrace{u_m(x)u^*(y)}^* N(u^*(x)u_n(y)),$$

Вариант 3:

$$P_{u_{41}}^{(1)} = \overbrace{u_m^*(x)u(y)}^* N(u(x)u_n^*(y)) \text{ и } P_{u_{41}}^{(2)} = \overbrace{u(x)u_n^*(y)}^* N(u^*(x)u(y)),$$

дают одинаковый вклад в матричный элемент.

Указание. Покажите, что $\int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P_{ui}^{(1)} P_A = \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P_{ui}^{(2)} P_A$.

Задание 5.

Вариант 1: Запишите $\overbrace{u^*(x)u_n(y)}^* \stackrel{def}{=} u^*(x) \frac{\partial}{\partial y^n} u(y)$ в виде интеграла, вычислите производную.

Вариант 2: Запишите $\overbrace{u^*(x)u(y)}^*$ в виде интеграла. Запишите $\overbrace{u_m(x)u_n^*(y)}^*$ в виде интеграла, вычислите производные.

Вариант 3: Запишите $\overbrace{u_m^*(x)u(y)}^*$ в виде интеграла, вычислите производную.

На основе результатов заданий 1 — 5 можно сделать следующий вывод.
Вывод 1. Вклад в $(S - 1)_{fi}$ дают только такие слагаемые, в которых для каждого поля число несвернутых операторов под знаком N равно сумме чисел операторов начального и конечного состояний этого поля.

Задание 6. Свертка полевых операторов не является оператором и выносится из скалярного произведения. Рассмотрим оставшиеся операторы в скалярном произведении.

Вариант 1: $F = (\Phi_0 \varphi^{(-)}(p') N(u_m(x)u^*(y)) \varphi^{(+)}(p) \hat{\Gamma} \Phi_0)$.

Вариант 2: $F^{(1)} = (\Phi_0 \varphi^{(-)}(p') N(u_m(x)u_n^*(y)) \varphi^{(+)}(p) \hat{\Gamma} \Phi_0)$,

$$F^{(2)} = (\Phi_0 \varphi^{(-)}(p') N(u^*(x)u(y)) \varphi^{(+)}(p) \hat{\Gamma} \Phi_0)$$

Вариант 3: $F = (\Phi_0 \varphi^{(-)}(p') N(u(x)u_n^*(y)) \varphi^{(+)}(p) \hat{\Gamma} \Phi_0)$.

Начнем с мезонных операторов, в связи с чем фотонная часть кратко обозначена $\hat{\Gamma}$.

Распишите координатные полевые операторы на сумму положительной- и отрицательно-частотных составляющих; раскройте скобки; определите, какие слагаемые не равны нулю. Запишите выражение F в таком виде, чтобы полевые операторы входили только в коммутаторы. Вычислите коммутаторы и определите их физический смысл.

Вывод 2. Мезонный оператор без сопряжения $u(x)$ (или $u_m(x) = \frac{\partial}{\partial x^m} u(x)$) вместе с $\check{\varphi}^{(+)}(p)$ описывает начальное состояние π^+ -мезона, а оператор с сопряжением $u^(y)$ вместе с $\varphi^{(-)}(p')$ — конечное состояние π^+ -мезона.*

Задание 7.

В задании 6 все мезонные операторы вошли в состав коммутаторов, которые выносятся за пределы скалярного произведения. Рассмотрим фотонные операторы, которые пока остаются под знаком скалярного произведения. Обозначим $G = (\check{\Phi}_0 \hat{\Gamma} \Phi_0) = (\check{\Phi}_0 a_{\lambda'}^{(-)}(k') P_A a_{\lambda}^{(+)}(k) \Phi_0)$, где $P_A = P(A^m(x) A^n(y))$.

1) Распишите P_A по теореме Вика. Рассмотрите то слагаемое выражения G , в котором фотонные координатные операторы свернуты. Указание: это задание аналогично заданию 3, результат которого сформулирован в Выводе 1.

2) Распишите полевые операторы в N -произведении на сумму положительно- и отрицательно-частотных составляющих; раскройте скобки с учетом N ; определите, какие слагаемые отличны от нуля. Запишите выражение в таком виде, чтобы полевые операторы входили только в коммутаторы. Вычислите коммутаторы и определите их физический смысл.

Вывод 3. Оператор $A^m(x)$ из средней части матричного элемента описывает как начальное (вместе с оператором $a_{\lambda}^{(+)}(k)$), так и конечное (вместе с оператором $a_{\lambda'}^{(-)}(k')$) состояние фотона. То же самое относится к оператору $A^n(y)$.

Вывод 4. После раскрытия P -произведений и отбрасывания нулевых слагаемых структура средней части матричного элемента начинает отражать число и типы частиц в начальном и конечном состояниях.

Задание 8. Закончите расчет слагаемого матричного элемента

Вариант 1: $S_{fi}^{(2)'}(P_{u1}, P_A)$. Не забудьте учесть результат задания 4.

Вариант 2: $S_{fi}^{(2)'}(P_{u2}, P_A)$.

Вариант 3: $S_{fi}^{(2)'}(P_{u4}, P_A)$. Не забудьте учесть результат задания 4.

Задание 9.

Покажите, что $S_{fi}^{(2)'}(P_{u3}, P_A) = S_{fi}^{(2)'}(P_{u2}, P_A)$.

Задание 10.

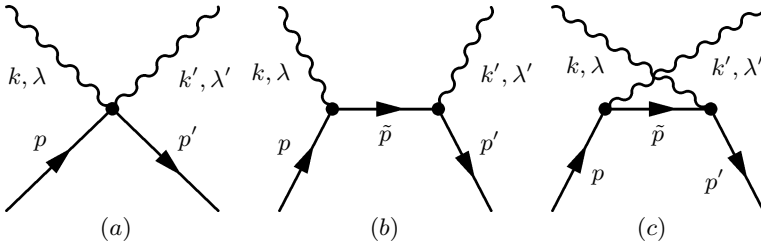
Найдите $S_{fi}^{(2)'}(P_u, P_A)$, сложив результаты всех вариантов. Не забудьте удвоить $S_{fi}^{(2)'}(P_{u2}, P_A)$ с учетом результата, полученного в задании 9. Прибавьте слагаемое $S_{fi}^{(1)''}$, найденное в лабораторной работе 2. Тем самым будет вычислен матричный элемент рассеяния фотона на π -мезоне

во втором порядке теории возмущений.

Лабораторная работа 4. Расчет матричного элемента комптоновского рассеяния фотона во втором порядке теории возмущений с помощью диаграмм Фейнмана

Цель работы: расчет матричного элемента комптоновского рассеяния фотона на заряженной скалярной частице (пи-мезоне) в низшем неисчезающем порядке теории возмущений (борновское приближение) с помощью диаграмм Фейнмана.

Дан полный набор топологически различных диаграмм для 2-го порядка теории возмущений процесса $\gamma + \pi^+ \rightarrow \gamma + \pi^+$:

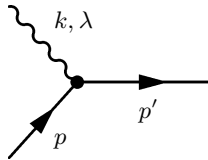


Задание: вычислите матричный элемент S -оператора.

Правила соответствия для сомножителей матричного элемента

Замечание. Слагаемое матричного элемента может содержать произведение двух или большего числа скалярных произведений. Каждое скалярное произведение записывается в виде суммы произведений компонент. Нужно проследить, чтобы в разных скалярных произведениях были использованы разные индексы суммирования.

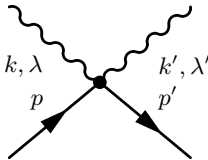
1. Одиночной вершине



(а также одиночным вершинам с другим расположением линий) ставится в соответствие сомножитель $(2\pi)^4 z(p_n + p'_n)\delta_4(p \pm k - p')$. Знак «+» соответствует поглощению фотона, «-» — излучению фотона, так

что дельта-функция отражает закон сохранения 4-импульса в узле. Замечание: каждой линии, входящей в узел или выходящей из него, тоже соответствуют сомножители (см. далее).

2. Двойной вершине



ставится в соответствие сомножитель $-(2\pi)^4 z^2 g_{mn} \delta_4(p \pm k - p' \pm k')$, где g_{mn} — метрический тензор. Индексы m, n соответствуют индексам компонент векторов поляризации $\varepsilon^{\lambda m}$, $\varepsilon^{\lambda' n}$, которые входят в сомножители, соответствующие фотонным линиям (см. далее). Таким образом, 4-векторы поляризации скалярно перемножаются.

3. Внутренней мезонной линии



соответствует сомно-

житель $\frac{i}{(2\pi)^4} \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon}$.

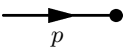
4. Внутренней фотонной линии



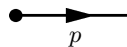
соответствует со-

множитель $-\frac{i}{(2\pi)^4} g^{mn} \frac{d\tilde{k}}{\tilde{k}^2 + i\epsilon}$. Если эта линия соединяет одиночные вершины, то m, n соответствуют индексам у $p_m + p'_m$, $p_n + p'_n$. Если она соединяет двойные вершины, то в них должны быть множители g_{mi}, g_{nj} .

5. Внешним мезонным линиям



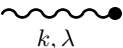
или



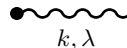
соот-

ветствует множитель $1/(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_0}$.

6. Внешним фотонным линиям



или



соот-

ветствует множитель $\varepsilon^{\lambda n}(k)/(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k_0}$. Индекс n соответствует индексу компонент импульсов пи-мезона для одиночной вершины или индексу тензора g_{mn} для двойной вершины.







7. Полученное скалярное произведение умножить на $(-i)^\nu 2^{d-b}$, где ν — порядок диаграммы, d — число двойных вершин в диаграмме; b — число пар двойных вершин, соединенных двумя фотонными линиями. Произведение проинтегрировать по всем внутренним импульсам. Найти предел при $\epsilon \rightarrow 0$.

Лабораторная работа 5. Построение диаграмм Фейнмана для процесса рассеяния двух пи-мезонов $\pi^+ + \pi^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+$ с учетом только электромагнитного взаимодействия

Цель работы: самостоятельное построение диаграмм Фейнмана.

Задание: проведите анализ структуры матричного элемента S -оператора и постройте диаграммы Фейнмана до 4-го порядка включительно, которые могут давать вклад в матричный элемент.

Графическое изображение элементов S -оператора в координатном пространстве

1. Элемент $\hat{S}: u(x)$. Элемент диаграммы:  — внешняя мезонная входящая линия. Соответствует π^+ в начальном состоянии или π^- в конечном состоянии.
2. Элемент $\hat{S}: \bar{u}(x)$. Элемент диаграммы:  — внешняя мезонная выходящая линия. Соответствует π^+ в конечном или π^- в начальном состоянии.
3. Элемент $\hat{S}: A_n(x)$. Элемент диаграммы: ,  — внешние фотонные линии. Соответствуют фотону в начальном или конечном состоянии.
4. Элемент $\hat{S}: \bar{u}(x)u(y)$. Элемент диаграммы:  — внутренняя мезонная линия. Стрелка направлена от точки оператора с сопряжением к точке оператора без сопряжения, т.е. в данном случае — от x к y . Соответствует движению π^+ -мезона в виртуальном состоянии из x в y или движению π^- в виртуальном состоянии из y в x .
5. Элемент $\hat{S}: \overbrace{A_m(x)A_n(y)}$. Элемент диаграммы:  — внутренняя фотонная линия. Соответствует виртуальному фотону.

Для построения диаграмм наличие производной у оператора и расположение индекса (верхнее, нижнее) несущественны. Например, $u(x)$ и $\partial_n u(x)$ равноправны; $A_n(x)$ и $A^n(x)$ равноправны.

Указания

1) Гамильтониан взаимодействия — в точности такой же, как в задаче о комптоновском рассеянии фотона на пи-мезоне:

$$\hat{\mathcal{H}}_I(x) = \hat{\mathcal{H}}'_I(x) + \hat{\mathcal{H}}''_I(x),$$

$$\hat{\mathcal{H}}_I'(x) = izN \left(\overset{*}{u}(x) \partial_n u(x) - (\partial_n \overset{*}{u}(x)) u(x) \right) A^n(x),$$

$$\hat{\mathcal{H}}_I''(x) = -z^2 N \left(\overset{*}{u}(x) u(x) A_n(x) A^n(x) \right).$$

2) Обозначим начальные 4-импульсы p_1, p_2 , конечные — p_3, p_4 . Запишите векторы начального и конечного состояний $\Phi_i, \Phi_f, \overset{*}{\Phi}_f$.

3) Выясните, дает ли вклад в матричный элемент слагаемое ряда Неймана для S -оператора с однократным интегралом.

4) Рассмотрим слагаемое $S_{fi}^{(2)''}$ с двойным интегралом, причем в каждом гамильтониане учитывается только слагаемое, линейное по заряду, т.е. $\hat{\mathcal{H}}_I'$. Распишите хронологические произведения по теореме Вика, оставьте только те слагаемые, которые могут дать вклад в матричный элемент.

Постройте топологически различные диаграммы в координатном и импульсном пространствах. Укажите порядок диаграмм и соответствующий им порядок теории возмущений.

5) Рассмотрим слагаемое $S_{fi}^{(2)''}$ с двойным интегралом, в каждом из которых учитывается только слагаемое гамильтониана, квадратичное по заряду, т.е. $\hat{\mathcal{H}}_I''(x)$. Прodelайте то же, что в пункте 4), ограничившись диаграммой в пространстве координат.

6) Рассмотрим слагаемое с тройным интегралом, причем в двух гамильтонианах учитывается слагаемое $\hat{\mathcal{H}}_I'$, а в третьем гамильтониане — слагаемое $\hat{\mathcal{H}}_I''$. Постройте топологически различные диаграммы в координатном пространстве, укажите порядок диаграмм и порядок теории возмущений.

7) Рассмотрим слагаемое $S_{fi}^{(4)'}$ с 4-кратным интегралом, причем в каждом гамильтониане учитываем только слагаемое, линейное по заряду, т.е. $\hat{\mathcal{H}}_I'$. Проанализируйте среднюю часть матричного элемента, постройте топологически различные диаграммы в координатном пространстве, укажите порядок диаграмм и порядок теории возмущений.

Ответы

Лабораторная работа 1.

1. Лагранжиан комплексного скалярного поля

$$\mathcal{L} = (\partial_k \overset{*}{u}(x)) (\partial^k u(x)) - m^2 \overset{*}{u}(x) u(x).$$

2. Лагранжиан действительного векторного поля

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_k A_n(x)) (\partial^k A^n(x)).$$

Замечание. Лагранжианы можно было построить только с точностью до постоянного множителя. В дальнейшем этот множитель (в каждом лагранжиане — свой) уточняется исходя из следующих соображений. Знак множителя может быть найден из условия неотрицательности энергии свободного поля. Абсолютная величина множителя не играет принципиальной роли, так как связана с нормировкой волновых функций, и выбирается так, чтобы основные формулы выглядели наиболее просто.

Лабораторная работа 2.

2. $S_{fi}^{(1)'} = 0$.

3.2. $(h_r)_{fi} = 0$ для всех r , кроме $r = 5$.

3.3. $h_{fi} = 2[\varphi^{(-)}(p'), \dot{u}^{(+)}(x)] \cdot [u^{(-)}(x), \dot{\varphi}^{(+)}(p)] \cdot [a_{\lambda'}^{(-)}(k'), A_m^{(+)}(x)] \cdot [A^{m(-)}(x), a_{\lambda}^{(+)}(k)]$.

3.4.

$$[\varphi^{(-)}(p'), \dot{u}^{(+)}(x)] = \eta(p')e^{ip'x^t},$$

$$[u^{(-)}(x), \dot{\varphi}^{(+)}(p)] = \eta(p)e^{-ipx^t},$$

$$[a_{\lambda'}^{(-)}(k'), A_m^{(+)}(x)] = \varepsilon_m^{\lambda'}(k')\eta(k')e^{ik'_l x^l},$$

$$[A^{m(-)}(x), a_{\lambda}^{(+)}(k)] = \varepsilon^{\lambda m}(k)\eta(k)e^{-ik_l x^l}.$$

3.5.

$$S_{fi}^{(1)''} = \frac{iz^2}{8\pi^2} \frac{\varepsilon^{\lambda m}(k)\varepsilon_m^{\lambda'}(k')}{\sqrt{p^0 p'^0 k^0 k'^0}} \delta_4(p + k - p' - k').$$

Лабораторная работа 3.

Задание 1.

Вариант 1. $P_{u1} = P_{u10} + P_{u11}^{(1)} + P_{u11}^{(2)} + P_{u12}$,

$$P_{u10} = N(\overset{*}{u}(x)u_m(x)\overset{*}{u}(y)u_n(y)), \quad P_{u11}^{(1)} = \overset{*}{u}(x)\overset{\frown}{u_n}(y)N(u_m(x)\overset{*}{u}(y)),$$

$$P_{u11}^{(2)} = \overset{\frown}{u_m}(x)\overset{*}{u}(y)N(\overset{*}{u}(x)u_n(y)), \quad P_{u12} = \overset{*}{u}(x)\overset{\frown}{u_n}(y) \cdot \overset{\frown}{u_m}(x)\overset{*}{u}(y).$$

Учтено, что свертки операторов комплексного поля с одинаковым сопряжением равны нулю: $\overset{\frown}{u}(x)u(y) = 0$, $\overset{*}{u}(x)\overset{\frown}{u}(y) = 0$.

Вариант 2. $P_{u2} = P_{u20} + P_{u21}^{(1)} + P_{u21}^{(2)} + P_{u22}$,

$$P_{u20} = -N(\overset{*}{u}(x)u_m(x)\overset{*}{u}_n(y)u(y)), \quad P_{u21}^{(1)} = -\overset{*}{u}(x)\overset{\frown}{u}(y)N(u_m(x)\overset{*}{u}_n(y)),$$

$$P_{u_{21}}^{(2)} = -\overbrace{u_m(x)u_n^*(y)} N(\overbrace{u^*(x)u(y)}), \quad P_{u_{22}} = -\overbrace{u^*(x)u(y)} \cdot \overbrace{u_m(x)u_n^*(y)}.$$

Учено, что свертки операторов комплексного поля с одинаковым сопря-

жением равны нулю: $\overbrace{u_m(x)u(y)} = 0$, $\overbrace{u^*(x)u_n^*(y)} = 0$.

Вариант 3. $P_{u_4} = P_{u_{40}} + P_{u_{41}}^{(1)} + P_{u_{41}}^{(2)} + P_{u_{42}}$,

$$P_{u_{40}} = N(\overbrace{u_m^*(x)u(x)u_n^*(y)u(y)}), \quad P_{u_{41}}^{(1)} = \overbrace{u_m^*(x)u(y)} N(\overbrace{u(x)u_n^*(y)}),$$

$$P_{u_{41}}^{(2)} = \overbrace{u(x)u_n^*(y)} N(\overbrace{u_m^*(x)u(y)}), \quad P_{u_{42}} = \overbrace{u_m^*(x)u(y)} \cdot \overbrace{u(x)u_n^*(y)}.$$

Учено, что свертки операторов комплексного поля с одинаковым сопря-

жением равны нулю: $\overbrace{u(x)u(y)} = 0$, $\overbrace{u_m^*(x)u_n^*(y)} = 0$.

Задание 2. Матричный элемент равен нулю. *Пояснение:* в операторе $P_{u_{i0}}$ мысленно запишем каждый из четырех полевых операторов в виде суммы положительно-частотной и отрицательно-частотной составляющих и раскроем все скобки. Каждое из 16-ти слагаемых содержит 4 сомножителя. Среди сомножителей есть по крайней мере 2 оператора одной и той же частотности. Операторы нормально упорядочены, т.е. операторы уничтожения стоят справа от операторов рождения. Из лабораторной работы 2 мы знаем, что $b^{(-)}c^{(-)}d^{(+)}\Phi_0 = 0$, $\Phi_0 b^{(-)}c^{(+)}d^{(+)} = 0$ (b, c, d — любые полевые операторы), откуда и следует, что слагаемое с оператором $P_{u_{i0}}$ не дает вклада в матричный элемент S -оператора.

Задание 3. Матричный элемент равен нулю. *Пояснение:*

$(\Phi_0 \varphi^{(-)}(p') \varphi^{(+)}(p) \hat{\Gamma} \Phi_0) = \delta_3(\vec{p} - \vec{p}') (\Phi_0 \hat{\Gamma} \Phi_0)$; так как $\vec{p}' \neq \vec{p}$, то $\delta_3(\vec{p} - \vec{p}') \equiv 0$. Заодно заметим, что по этой же причине слагаемое, в котором свернуты все фотонные операторы, тоже не дает вклада в матричный элемент. Поэтому можно заменить $P_A \stackrel{def}{=} P(A^m(x)A^n(y))$ на $N(A^m(x)A^n(y))$.

Задание 4.

Вариант 1.

$$\int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P_{u_{11}}^{(1)} P_A = \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy \overbrace{u^*(x)u_n(y)} N(u_m(x)u^*(y)) N(A^m(x)A^n(y)) =$$

$$/x \leftrightarrow y, m \leftrightarrow n/ = \int_{R_4} dy \int_{R_4} dx \overbrace{u^*(y)u_m(x)} N(u_n(y)u^*(x)) N(A^n(y)A^m(x)) =$$

/меняем порядок интегрирования; меняем местами операторы под знаком свертки и внутри нормального произведения/

$$= \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy \overbrace{u_m(x)u^*(y)} N(\overbrace{u^*(x)u_n(y)} N(A^m(x)A^n(y))) = \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P_{u_{11}}^{(2)} P_A.$$

Вариант 3.

$$\begin{aligned}
\int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P_{u_{41}}^{(1)} P_A &= \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy \overbrace{u_m^*(x)u(y)} N(u(x)u_n^*(y)) N(A^m(x)A^n(y)) = \\
/x \leftrightarrow y, m \leftrightarrow n/ &= \int_{R_4} dy \int_{R_4} dx \overbrace{u_n^*(y)u(x)} N(u(y)u_m^*(x)) N(A^n(y)A^m(x)) = \\
&= \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy \overbrace{u(x)u_n^*(y)} N(u_m^*(x)u(y)) N(A^m(x)A^n(y)) = \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P_{u_{41}}^{(2)} P_A.
\end{aligned}$$

Задание 5.

Вариант 1.

$$\begin{aligned}
\overbrace{u^*(x) \frac{\partial}{\partial y^n} u(y)} &= \frac{\partial}{\partial y^n} \overbrace{u(y) u^*(x)} = \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y^n} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{R_4} \frac{e^{-i\tilde{p}_l(y^l-x^l)}}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} d\tilde{p} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{R_4} \frac{\tilde{p}_n e^{-i\tilde{p}_l(y^l-x^l)}}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} d\tilde{p}.
\end{aligned}$$

Вариант 2.

$$\begin{aligned}
\overbrace{u^*(x)u(y)} &= \overbrace{u(y)u^*(x)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{R_4} \frac{e^{-i\tilde{p}_l(y^l-x^l)}}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} d\tilde{p}. \\
\overbrace{u_m^*(x)u_n^*(y)} &= \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n} \overbrace{u(x)u^*(y)} = \\
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{R_4} \frac{e^{-i\tilde{p}_l(x^l-y^l)}}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} d\tilde{p} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{R_4} \frac{\tilde{p}_m \tilde{p}_n e^{-i\tilde{p}_l(x^l-y^l)}}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} d\tilde{p}.
\end{aligned}$$

Вариант 3.

$$\begin{aligned}
\overbrace{u_m^*(x)u(y)} &= \frac{\partial}{\partial x^m} \overbrace{u(y)u^*(x)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{R_4} \frac{e^{-i\tilde{p}_l(y^l-x^l)}}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} d\tilde{p} = \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{R_4} \frac{\tilde{p}_m e^{-i\tilde{p}_l(y^l-x^l)}}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} d\tilde{p}.
\end{aligned}$$

Задание 6.

Вариант 1.

$$F = (\Phi_0 \varphi^{(-)}(p') \overbrace{u^{(+)}(y) u_m^{(-)}(x) \varphi^{(+)}(p)} \hat{\Gamma} \Phi_0) =$$

$$= [\varphi^{(-)}(p'), u^{*(+)}(y)][u_m^{(-)}(x), \varphi^{*(+)}(p)](\hat{\Phi}_0 \hat{\Gamma} \Phi_0);$$

$$[\varphi^{(-)}(p'), u^{*(+)}(y)] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ip'_l y^l}}{\sqrt{2p'_0}}; \quad [u_m^{(-)}(x), \varphi^{*(+)}(p)] = \frac{-ip_m}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ip_l x^l}}{\sqrt{2p_0}}.$$

Вариант 2.

$$F^{(1)} = (\hat{\Phi}_0 \varphi^{(-)}(p') u_n^{*(+)}(y) u_m^{(-)}(x) \varphi^{*(+)}(p) \hat{\Gamma} \Phi_0) = \\ = [\varphi^{(-)}(p'), u_n^{*(+)}(y)][u_m^{(-)}(x), \varphi^{*(+)}(p)](\hat{\Phi}_0 \hat{\Gamma} \Phi_0);$$

$$[\varphi^{(-)}(p'), u_n^{*(+)}(y)] = \frac{ip'_n}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ip'_l y^l}}{\sqrt{2p'_0}}; \quad [u_m^{(-)}(x), \varphi^{*(+)}(p)] = \frac{-ip_m}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ip_l x^l}}{\sqrt{2p_0}}.$$

$$F^{(2)} = (\hat{\Phi}_0 \varphi^{(-)}(p') u^{*(+)}(x) u^{(-)}(y) \varphi^{*(+)}(p) \hat{\Gamma} \Phi_0) = \\ = [\varphi^{(-)}(p'), u^{*(+)}(x)][u^{(-)}(y), \varphi^{*(+)}(p)](\hat{\Phi}_0 \hat{\Gamma} \Phi_0);$$

$$[\varphi^{(-)}(p'), u^{*(+)}(x)] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ip'_l x^l}}{\sqrt{2p'_0}}; \quad [u^{(-)}(y), \varphi^{*(+)}(p)] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ip_l y^l}}{\sqrt{2p_0}}.$$

Вариант 3.

$$F = (\hat{\Phi}_0 \varphi^{(-)}(p') u_n^{*(+)}(y) u^{(-)}(x) \varphi^{*(+)}(p) \hat{\Gamma} \Phi_0) = \\ = [\varphi^{(-)}(p'), u_n^{*(+)}(y)][u^{(-)}(x), \varphi^{*(+)}(p)](\hat{\Phi}_0 \hat{\Gamma} \Phi_0);$$

$$[\varphi^{(-)}(p'), u_n^{*(+)}(y)] = \frac{ip'_n}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ip'_l y^l}}{\sqrt{2p'_0}}; \quad [u^{(-)}(x), \varphi^{*(+)}(p)] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ip_l x^l}}{\sqrt{2p_0}}.$$

Смысл коммутаторов: выражения, содержащие $e^{-ip_l x^l}$ или $e^{-ip_l y^l}$, пропорциональны волновой функции π^+ -мезона в начальном состоянии, а выражения с $e^{ip'_l x^l}$ или $e^{ip'_l y^l}$ пропорциональны комплексному сопряжению волновой функции π^+ -мезона в конечном состоянии.

Задание 7.

2) $G = G_1 + G_2$, где

$$G_1 = [a_{\lambda'}^{(-)}(k'), A^{m(+)}(x)] \cdot [A^{n(-)}(y), a_{\lambda}^{(+)}(k)] = \\ = \frac{\varepsilon^{\lambda' m}(k')}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ik'_l x^l}}{\sqrt{2k'_0}} \cdot \frac{\varepsilon^{\lambda n}(k)}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ik_l y^l}}{\sqrt{2k_0}},$$

$$\begin{aligned}
G_2 &= [a_{\lambda'}^{(-)}(k'), A^{n(+)}(y)] \cdot [A^{m(-)}(x), a_{\lambda}^{(+)}(k)] = \\
&= \frac{\varepsilon^{\lambda'n}(k')}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ik'_i y^l}}{\sqrt{2k'_0}} \cdot \frac{\varepsilon^{\lambda m}(k)}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ik_i x^l}}{\sqrt{2k_0}}.
\end{aligned}$$

Задание 8.

Вариант 1.

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)'}(P_{u1}, P_A) &= \frac{-iz^2}{16\pi^2} \frac{\delta_4(p+k-p'-k')}{\sqrt{p_0 k_0 p'_0 k'_0}} \times \\
&\times \left\{ \frac{p_m \varepsilon^{\lambda'm}(k')(p_n - k'_n) \varepsilon^{\lambda n}(k)}{(p-k')^2 - m^2} + \frac{p_m \varepsilon^{\lambda m}(k)(p_n + k_n) \varepsilon^{\lambda'n}(k')}{(p+k)^2 - m^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Вариант 2.

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)'}(P_{u2}, P_A) &= \frac{-iz^2}{32\pi^2} \frac{\delta_4(p+k-p'-k')}{\sqrt{p_0 k_0 p'_0 k'_0}} \times \\
&\times \left\{ \frac{p_m \varepsilon^{\lambda'm}(k') p'_n \varepsilon^{\lambda n}(k)}{(p-k')^2 - m^2} + \frac{p_m \varepsilon^{\lambda m}(k) p'_n \varepsilon^{\lambda'n}(k')}{(p+k)^2 - m^2} + \right. \\
&\quad + \frac{(p_m + k_m) \varepsilon^{\lambda'm}(k')(p_n + k_n) \varepsilon^{\lambda n}(k)}{(p+k)^2 - m^2} + \\
&\quad \left. + \frac{(p_m - k'_m) \varepsilon^{\lambda m}(k)(p_n - k'_n) \varepsilon^{\lambda'n}(k')}{(p-k')^2 - m^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Вариант 3.

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)'}(P_{u1}, P_A) &= \frac{-iz^2}{16\pi^2} \frac{\delta_4(p+k-p'-k')}{\sqrt{p_0 k_0 p'_0 k'_0}} \times \\
&\times \left\{ \frac{p'_m \varepsilon^{\lambda'm}(k')(p_n + k_n) \varepsilon^{\lambda n}(k)}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{p'_m \varepsilon^{\lambda m}(k)(p_n - k'_n) \varepsilon^{\lambda'n}(k')}{(p-k')^2 - m^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Задание 9.

Сначала заметим, что P_{u3} может быть получено из P_{u2} заменой $x \leftrightarrow y$, $m \leftrightarrow n$, а P_A при такой замене не изменяется. Области интегрирования по x , y одинаковы, и одинаковы области суммирования по m , n . Наконец, учтем, что под знаками P и N операторы можно переставлять. Поэтому

одинаковы и $S_{fi}^{(2)'}(P_{u2}, P_A)$, $S_{fi}^{(2)'}(P_{u3}, P_A)$:

$$\begin{aligned}
 & \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P_{u2} P_A = \\
 & = - \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P(N(\dot{u}^*(x)u_m(x))N(\dot{u}^*(y)u(y)))P(A^m(x)A^n(y)) = \\
 & /x \leftrightarrow y, m \leftrightarrow n; \text{ после этого меняем порядок интегрирования} \\
 & \text{и порядок сомножителей внутри } P/ \\
 & = - \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P(N(\dot{u}^*(x)u(x))N(\dot{u}^*(y)u_n(y)))P(A^m(x)A^n(y)) = \\
 & = \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P_{u3} P_A.
 \end{aligned}$$

Задание 10.

$$\begin{aligned}
 (S-1)_{fi} = S_{fi}^{(1)''} + S_{fi}^{(2)'} = \frac{iz^2}{16\pi^2} \frac{\delta_4(p+k-p'-k')}{\sqrt{p_0 p'_0 k_0 k'_0}} & \left\{ 2\varepsilon^{\lambda m}(k)\varepsilon_m^{\lambda'}(k') - \right. \\
 - \frac{\varepsilon^{\lambda m}(k)\varepsilon_m^{\lambda'}(k')}{(p+k)^2 - m^2} (2p'_n + k'_n)(2p_m + k_m) - & \\
 \left. - \frac{\varepsilon^{\lambda n}(k)\varepsilon_n^{\lambda'}(k')}{(p-k')^2 - m^2} (2p'_n - k_n)(2p_m - k'_m) \right\}.
 \end{aligned}$$

Лабораторная работа 4.

$$S_{fi(a)} = \frac{iz^2}{8\pi^2} \frac{\varepsilon^{\lambda m}(k)\varepsilon_m^{\lambda'}(k')}{\sqrt{p^0 p'^0 k^0 k'^0}} \delta_4(p+k-p'-k'),$$

что совпадает с ответом к работе №2;

$$\begin{aligned}
 S_{fi(b)} = (-i)^2 2^0 \int_{R4} d\tilde{p} z (2\pi)^4 (p_m + \tilde{p}_m) \delta_4(p+k-\tilde{p}) & \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p^0}} \frac{\varepsilon^{\lambda m}(k)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k^0}} \cdot \\
 \cdot \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} z (2\pi)^4 (\tilde{p}_n + p'_n) \delta_4(\tilde{p}-k'-p') & \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p'^0}} \frac{\varepsilon^{\lambda' n}(k')}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k'^0}};
 \end{aligned}$$

$$S_{f_i(c)} = (-i)^2 2^0 \int_{R^4} d\tilde{p} z (2\pi)^4 (p_m + \tilde{p}_m) \delta_4(p - k' - \tilde{p}) \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p^0}} \frac{\varepsilon^{\lambda'm}(k')}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k'^0}} \cdot \\ \cdot \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} z (2\pi)^4 (\tilde{p}_n + p'_n) \delta_4(\tilde{p} + k - p') \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p'^0}} \frac{\varepsilon^{\lambda'n}(k)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k^0}}.$$

После интегрирования по \tilde{p} получим

$$S_{f_i(b)} = \frac{-iz^2 \delta_4(p + k - p' - k')}{16\pi^2 \sqrt{p^0 p'^0 k^0 k'^0}} \frac{\varepsilon^{\lambda'm}(k) (2p_m + k_m) \varepsilon^{\lambda'n}(k') (2p'_n + k'_n)}{(p + k)^2 - m^2};$$

$$S_{f_i(c)} = \frac{-iz^2 \delta_4(p + k - p' - k')}{16\pi^2 \sqrt{p^0 p'^0 k^0 k'^0}} \frac{\varepsilon^{\lambda'm}(k') (2p_m - k'_m) \varepsilon^{\lambda'n}(k) (2p'_n - k_n)}{(p - k')^2 - m^2};$$

$$(S-1)_{fi} = S_{f_i(a)} + S_{f_i(b)} + S_{f_i(c)} = \frac{iz^2 \delta_4(p + k - p' - k')}{16\pi^2 \sqrt{p^0 p'^0 k^0 k'^0}} \left\{ 2\varepsilon^{\lambda'm}(k) \varepsilon_m^{\lambda'}(k') - \right. \\ \left. - \varepsilon^{\lambda'm}(k) (2p_m + k_m) \varepsilon^{\lambda'n}(k') (2p'_n + k'_n) \frac{1}{(p + k)^2 - m^2} - \right. \\ \left. - \varepsilon^{\lambda'm}(k') (2p_m - k'_m) \varepsilon^{\lambda'n}(k) (2p'_n - k_n) \frac{1}{(p - k')^2 - m^2} \right\}.$$

Это совпадает с ответом к работе №3.

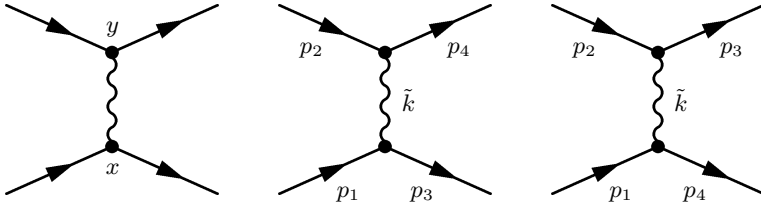
Лабораторная работа 5.

$$2) \Phi_i = \check{\varphi}^{(+)}(p_1) \check{\varphi}^{(+)}(p_2) \Phi_0, \quad \Phi_f = \check{\varphi}^{(+)}(p_3) \check{\varphi}^{(+)}(p_4) \Phi_0, \\ \check{\Phi}_f = \check{\Phi}_0 \varphi^{(-)}(p_3) \varphi^{(-)}(p_4).$$

3) Для того, чтобы увидеть, что слагаемые ряда Неймана с однократным интегралом не дают вклада в матричный элемент для данного процесса, достаточно отметить любое из следующих двух обстоятельств: число несвернутых мезонных координатных операторов меньше 4-х (суммарное число мезонных операторов начального и конечного состояний); имеются несвернутые фотонные координатные операторы, тогда как в начальном и конечном состояниях фотонов нет.

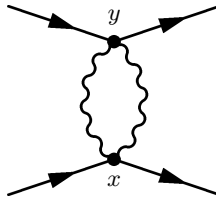
4) Ненулевой матричный элемент имеют операторы типа $\varphi^{(-)}(p_3) \varphi^{(-)}(p_4) N(\overset{*}{u}(x) u_m(x) \overset{*}{u}(y) u_n(y)) \overbrace{A^m(x) A^n(y)}^{\check{\Phi}_0} \check{\varphi}^{(+)}(p_1) \check{\varphi}^{(+)}(p_2)$. Они содержат нормальное произведение четырех мезонных операторов и не содержат несвернутых фотонных операторов. Другие операторы этого типа отличаются расстановкой сопряжений и индексов m, n , означающих дифференцирование, в мезонных операторах; они не приводят к новым диаграммам.

Получается одна диаграмма в координатном пространстве, которой соответствуют две топологически различных диаграммы в пространстве импульсов:



Эти диаграммы — второго порядка (у каждой — две вершины), и они относятся ко второму порядку теории возмущений (матричный элемент пропорционален z^2).

5) Получается диаграмма 2-го порядка (две вершины);



обе вершины — двойные, и диаграмма соответствует четвертому порядку теории возмущений ($S_{fi} \sim z^4$).

6) Средняя часть матричного элемента состоит из 4-х слагаемых вида $P_{u_1} P_A$, где

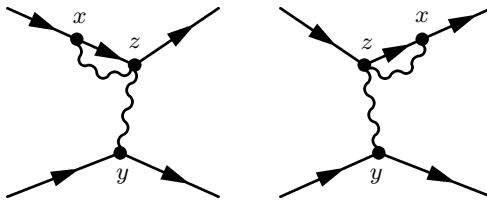
$$P_A = A^m \overbrace{(x)A_l(z)} A^n \overbrace{(y)A^l(z)};$$

$$P_{u_1} = P(N(\overset{*}{u}(x)u_m(x))N(\overset{*}{u}(y)u_n(y))N(\overset{*}{u}(z)u(z))).$$

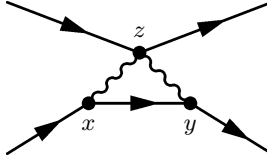
Распишем P_{u_1} по теореме Вика. Слагаемые

$$\overset{*}{u}(x)u(z)N(u_m(x)\overset{*}{u}(y)u_n(y)\overset{*}{u}(z))P_A, \overbrace{u_m(x)\overset{*}{u}(z)N(\overset{*}{u}(x)\overset{*}{u}(y)u_n(y)u(z))}$$

приводят к диаграммам



Слагаемое $\overbrace{\dot{u}^*(x)u_n(y)} N(u_m(x)\dot{u}^*(y)\dot{u}^*(z)u(z))P_A$ приводит к диаграмме



Все эти диаграммы — 3-го порядка и соответствуют четвертому порядку теории возмущений.

7) Средняя часть матричного элемента имеет структуру $P_u P_A$, где

$$P_A = P \left(A^k(x)A^l(y)A^m(z)A^n(t) \right);$$

$P_u = P_{u_1} + \dots + P_{u_{16}}$; для построения диаграмм достаточно рассмотреть какое-нибудь одно слагаемое, например,

$$P_{u_1} = P \left(N(\dot{u}^*(x)u_k(x))N(\dot{u}^*(y)u_l(y))N(\dot{u}^*(z)u_m(z))N(\dot{u}^*(t)u_n(t)) \right).$$

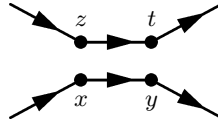
Другие слагаемые могут отличаться знаком, расстановкой аргументов и символов дифференцирования и не приводят к топологически новым диаграммам.

Если расписать P_{u_1} по теореме Вика, то получатся слагаемые следующих типов.

а) У всех четырех свернутых операторов — разные аргументы, например:

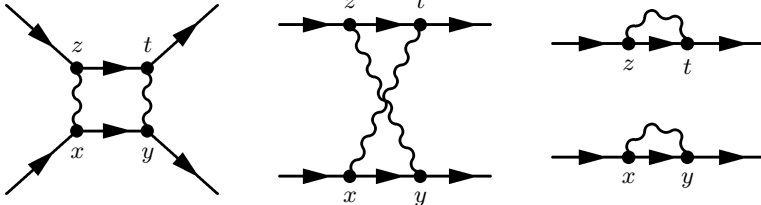
$$\overbrace{\dot{u}^*(x)u_l(y)} \overbrace{\dot{u}^*(z)u_n(t)} N \left(u_k(x)\dot{u}^*(y)u_m(z)\dot{u}^*(t) \right).$$

Строим сначала мезонные линии:



В зависимости от того, как скоммутированы фотонные операторы, получаются разные диаграммы;

$$\begin{aligned} P_{A_1} &= A^k \overbrace{(x)A^m(z)} A^l \overbrace{(y)A^n(t)}, & P_{A_2} &= A^k \overbrace{(x)A^n(t)} A^l \overbrace{(y)A^m(z)}, \\ P_{A_3} &= A^k \overbrace{(x)A^l(y)} A^m \overbrace{(z)A^n(t)} : \end{aligned} \quad (7)$$

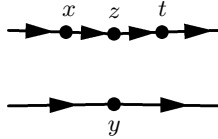


Две мезонные линии, в состав которых входят начальные и конечные частицы реакции $\pi^+ + \pi^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+$, назовем *основными линиями*. В этих диаграммах каждая основная линия содержит одну внутреннюю мезонную линию. Третья из этих диаграмм соответствует переходу без взаимодействия и, конечно, без изменения 4-импульсов частиц, и вклада в матричный элемент перехода $\Phi_i \rightarrow \Phi_f$ при $f \neq i$ не дает.

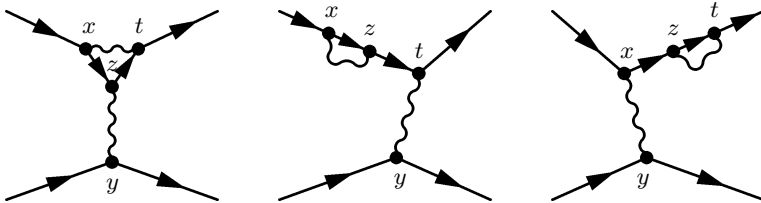
б) Из 4-х свернутых операторов у двух (конечно, входящих в разные свертки) — одинаковые аргументы, а у двух остальных — разные:

$${}^* \overbrace{u(x)u_m(z)} u^* \overbrace{(z)u_n(t)} N \left(u_k(x)u^*(t)u_l(y)u^*(y) \right).$$

Мезонные линии выглядят так:



Получаются диаграммы, на которых обе внутренние мезонные линии входят в состав одной и той же основной линии:



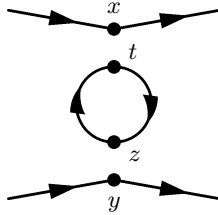
Первая из этих диаграмм соответствует фотонному оператору P_{A_2} (см. формулы (7)), вторая — P_{A_1} , третья — P_{A_3} .

с) Операторы с одинаковым аргументом (например, z) свернуты с операторами, у которых аргумент тоже одинаков (например, t):

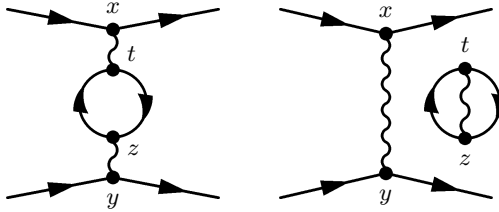
$$P_{u_2} = {}^* \overbrace{u(z)u_n(t)} u_m^* \overbrace{(z)u^*(t)} N \left({}^* u(x)u_k(x)u^*(y)u_l(y) \right).$$

В этом случае мезонная часть диаграмм отличается тем, что, кроме двух

основных непрерывных линий, имеется третья непрерывная линия в виде петли:



Учет фотонных операторов приводит к диаграммам следующих двух типов:



Петля на первой из этих диаграмм соответствует образованию и аннигиляции виртуальной пары мезонов. Вторая диаграмма — несвязная; левая ее часть (с вершинами x , y) совпадает с диаграммой 2-го порядка, уже построенной в п. 4), а правая часть («устрица» с вершинами z , t) не имеет смысла.

Все построенные в п. 7) диаграммы — 4-го порядка, соответствующие четвертому порядку теории возмущений (кроме последней, несвязной диаграммы, которую не нужно учитывать).

Литература

1. Биленький С. М. Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 328 с.
2. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. — М.: «Наука», 1976. — 480 с.
3. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. Том 1. — М.: «Мир», 1984. — 448 с.
4. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. Том 2. — М.: «Мир», 1984. — 400 с.
5. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. — М.: Изд-во иностран. литературы, 1963. — 844 с.

Содержание

Введение	3
----------------	---

Задания

Лабораторная работа 1. Лагранжианы свободных полей	3
Лабораторная работа 2. Расчет матричного элемента комптоновского рассеяния фотона. Часть I	5
Лабораторная работа 3. Расчет матричного элемента комптоновского рассеяния фотона. Часть II	8
Лабораторная работа 4. Расчет матричного элемента комптоновского рассеяния фотона во втором порядке теории возмущений с помощью диаграмм Фейнмана	12
Лабораторная работа 5. Построение диаграмм Фейнмана для процесса рассеяния двух пи-мезонов $\pi^+ + \pi^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+$ с учетом только электромагнитного взаимодействия	14

Ответы

Лабораторная работа 1.	15
Лабораторная работа 2.	16
Лабораторная работа 3.	16
Лабораторная работа 4.	21
Лабораторная работа 5.	22
Литература	26

Гончаров Александр Иванович

Лабораторные работы по квантовой электродинамике

Методические указания

Оригинал-макет подготовлен и отпечатан в пакете L^AT_EX 2_ε

Подписано в печать 15.05.2019. Формат 60 × 84/16.

Усл. печ. л. 1,63. Тираж 100 экз. Заказ 246.

Типография Алтайского государственного университета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66.
