МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Физико-технический факультет
Кафедра радиофизики и теоретической физики

ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические указания

Барнаул, 2019

УДК 517.91

Задания к практическим занятиям по дифференциальным уравнениям и теории функций комплексного переменного: методические указания. — Барнаул: изд-во АлтГУ, 2019. —12 с.

Составитель:
канд. физ.-мат. наук *А. И. Гончаров*

Рецензент:
канд. физ.-мат. наук *А. Г. Тюменцев*

Методичка предназначена для студентов, обучающихся по направлениям 03.03.02 «Физика» и 03.03.03 «Радиофизика». Она содержит задачи, которые разбираются на практических занятиях по предметам «Дифференциальные уравнения», «Теория функций комплексного переменного» и предлагаются в качестве домашних заданий. Большая часть задач взята из книг, список которых приведен в конце методички.

Печатается по решению кафедры радиофизики и теоретической физики и учебно-методической комиссии физико-технического факультета.

Подписано в печать 15.05.2019. Формат 60 × 84/16.
Усл. печ. л. 0,7. Тираж 100 экз. Заказ 243.
Типография Алтайского государственного университета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66.

Дифференциальные уравнения

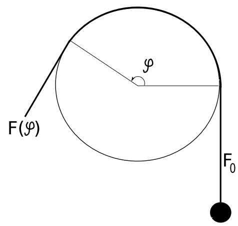
Вывод дифференциальных уравнений

1. Электрическая цепь состоит из конденсатора емкостью C и сопротивления R. Сначала цепь была разомкнута, заряд конденсатора был равен q_0. В момент $t = 0$ цепь замкнули. Найдите зависимость силы тока от времени $I(t)$.

2. Имеется бак с водой объемом V литров. В начальный момент времени в воде содержалась некоторая примесь с концентрацией $n(0)$ атомов/л. В бак втекает и сразу равномерно перемешивается чистая вода в количестве q л/с, и столько же воды вытекает. Найдите закон $n(t)$ убывания концентрации примеси со временем.

3. Параллельный пучок частиц входит в вещество. При прохождении через вещество частицы не рассеиваются, а только поглощаются. Для каждой частицы плотность вероятности поглощения на единице длины пути равна σ 1/м. Выведите дифференциальное уравнение для среднего числа частиц $N(x)$ на глубине x. Найдите $N(x)$, если известно начальное число частиц $N(0)$.

4. Выведите формулу Эйлера $F(\varphi) = F_0 \exp(-\mu\,\varphi)$ для силы натяжения веревки, перекинутой через бревно (или намотанной на бревно). μ — коэффициент трения.



Последующие задачи посвящены решению диференциальных уравнений. Для каждого уравнения, если не указано другое, нужно найти ***общее*** решение.

Уравнения 1-го порядка

Уравнения с разделяющимися переменными

5. $xydx + (x+1)dy = 0$. Найдите общее решение, постройте интегральные кривые.

6. $y' - xy^2 = 2xy$.

Уравнения $y' = f(ax + by + d)$

7. $y' = \frac{1}{x+y} - 1,\ y(0) = 2$. 8. $y' = \frac{x-y}{x-y+5}$.

9. $y' = \frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$. 10. $y' = (x+y)^3 - 1$.

Уравнения $y' = f(y/x)$ («однородные»)

11. $(x+y)dx = xdy$. 12. $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$.

13. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$. 14. $xy' = y - xe^{y/x}$.

15. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

Уравнения $y' = f((a_1x + b_1y + d_1)/(a_2x + b_2y + d_2))$

16. $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$.

Обобщенно-однородные уравнения 1-го порядка

17. $ydx + x(2xy + 1)dy = 0$. 18. $2x^2y' = y^3 + xy$.

Уравнения $y' + p(x)y = f(x)$ (линейные)

19. $y' - \frac{2}{x}y = x$. 20. $y' + y = x + 1$.

21. $y' - \frac{1}{x}y = x^2$. 22. $y' - \frac{3}{x}y = x^2$.

23. $y' + y = 3x^2e^{-x}$. 24. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}\cos x$.

25. $y' + 2xy = 5x^4e^{-x^2}$. 26. $y' + y\sin x = e^{x+\cos x}$.

27. $y' + \frac{2}{x}y = 5x^2$.

Уравнение, линейное относительно $x(y)$

28. $y' = \frac{y^2}{1+xy}$.

Уравнения $y' + p(x)y = q(x)y^n$ (Бернулли)

29. $y' = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$. 30. $y' + 2y = y^2e^x$.

31. $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{y}$. 32. $y' + xy = y^3e^{x^2}$.

Уравнения $y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$ (Риккати)

33. $y' + 2y^2 = \frac{1}{x^2}$.

Уравнения в полных дифференциалах

34. $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$.

35. $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$.

36. $\left(\frac{y-2}{x} + \ln y\right) dx + \left(\frac{x+3}{y} + \ln x\right) dy = 0$.

37. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

38. $[y + \sin(x + y)]dx + [x + 1 + \sin(x + y)]dy = 0$.

Уравнения 1-го порядка на интегрирующий множитель

39. $y(x + y)dx + (xy + 1)dy = 0$.

40. $[x + (x^2 + y^2)^2]dx + ydy = 0$.

41. $(y + xy^2)dx - xdy = 0$.

Уравнения, легко разрешимые относительно производной

42. $y'^2 - (x + y)y' + xy = 0$.

43. $y'^2 - yy' + 1 = 0$.

44. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$.

45. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$.

Неполные уравнения

46. Найдите общий интеграл уравнения $\sin e^{\sqrt{y'}} = 0$.

47. $y'^3 - y' = x + 1$.

48. $x = y'^3 + y'$.

49. $y'(x - \ln y') = 1$.

50. $y = \ln(1 + y'^2)$.

51. $y = (y' - 1)e^{y'}$.

52. $y'^3 - 4yy' = 0$.

53. $y'^2 - \cos y' = x$.

Уравнения, разрешимые относительно y или x

54. $2y'^2 - 2xy' - 2y + x^2 = 0$.

55. $y \ln y' + y' - y \ln y - xy = 0$.

56. $y = 2xy' - 4y'^3$.

57. $xy' - y = \ln y'$.

Существование и единственность решения задачи Коши

58. Найдите все решения задачи $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$. Прокомментируйте результат в свете теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши.

59. Найдите общее решение уравнения $y' = -x/y$, постройте интегральные кривые. Проходит ли хоть одна из них через точку $x = 0$, $y = 0$? Прокомментируйте ответ в свете теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши.

Метод последовательных приближений

60. Решите задачу $y' = y$, $y(0) = 1$ методом последовательных приближений.

Уравнения порядка $n > 1$

Неполные уравнения

61. $y^{(4)} - y''' = 0$.
62. $x^2 y'' = y'^2$.
63. $xy''' = y'' - xy''$.
64. $y'y''' - 3y''^2 = 0$.
65. $y'' + y' = x - 2$.
66. $xy^{(5)} = y^{(4)}$.
67. $yy'' - y'^2 = 0$.
68. $yy'' = y'^2 - y'^3$.
69. $yy'' = y'(y' + 1)$.
70. $2yy'' = y'^2 + 1$.
71. $yy'' - y'^2 = yy'$.

Уравнения в точных производных

72. $yy'' + y'^2 = 1$.

73. Подберите интегрирующий множитель для уравнения

$$yy'' - y'^2 = 0$$

и найдите общее решение.

Уравнения, однородные относительно y и производных. Обобщенно-однородные уравнения

74. $yy'' - y'^2 = 6xy^2$.
75. $x^2 yy'' = (y - xy')^2$.
76. $x^3 y'' + 2xyy' - x^2 y'^2 - y^2 = 0$.

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения Эйлера

77. $y''' - y' = 0$.
78. $y'' + 4y' + 5y = 0$.
79. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
80. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.
81. $x^2y'' - xy' + y = 0$.
82. $x^2y'' + xy' + y = 0$.

Линейные неоднородные уравнения

83. $y'' + y = x$.
84. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.
85. $y'' - 3y' = 2 - 6x$.
86. $y'' - y = x + 1$.
87. $y'' + y = x^2 + x$.
88. $y'' + 4y' + 3y = x$.
89. $y'' - 2y' + y = e^x$.
90. $y'' - 4y' + 4y = e^x$.
91. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$.
92. $y'' + y = \sin x$.
93. $y'' + y = \cos x$.

Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

94. Решите задачу $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ путем отыскания коэффициентов степенного ряда $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k x^k$.

Линейные однородные уравнения с коэффициентами в виде многочленов

95. Дано уравнение $\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0$, где $\sigma(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $\tau(x) = b_1x + b_0$; $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, λ — константы (уравнение гипергеометрического типа). Найдите λ, при котором одно из решений этого уравнения — многочлен степени n.

96. Выведите рекуррентную формулу для коэффициентов полиномиального решения $y = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k x^k$ уравнения Лежандра $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$.

Теория функций комплексного переменного

1. Дано комплексное число $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   1) Изобразите это число на комплексной плоскости.

   2) Найдите его модуль и главное значение аргумента.

   3) Запишите z в тригонометрической и показательной формах.

   4) Вычислите z^4.

   5) Вычислите $\sqrt{z}$.

2. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, соответствующее уравнению

$$1) \quad |z| = 1; \quad 2) \quad |z+1-i| = 1/2; \quad 3) \quad \mathrm{Re}\frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$

3. Вычислите (т.е. найдите действительную и мнимую части числа)

$$1) \quad \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}; \quad 2) \quad 1^{\sqrt{2}}; \quad 3) \quad i^i.$$

4. Найдите все корни уравнения $z^3 = \bar{z}$.

5. Выведите формулы для $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$ с помощью формулы Эйлера.

6. Вычислите интеграл $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$, где $a, b \in \mathrm{R}$. Указание: используйте $\cos bx = \mathrm{Re}\,e^{ibx}$ или $\cos bx = (e^{ibx} + e^{-ibx})/2$.

7. Применив формулу Эйлера, выведите формулы, связывающие старые и новые координаты (x, y) и (x', y') одной и той же точки при повороте системы координат на угол α.

8. Пусть $x \in \mathrm{R}$. Качественно постройте графики функций $\frac{1}{i}\sin ix$, $\cos ix$.

9. Найдите отображение окружности $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$, осуществляемое функцией $f(z) = \frac{1}{z}$.

10. Найдите отображение луча $y = x$, $x \geqslant 0$, осуществляемое функцией $f(z) = z^2$.

11. Покажите, что e^z может принимать любые комплексные значения, кроме 0. Указание: используйте свойства логарифма.

12. Покажите, что $\sin z$, $\cos z$ могут принимать любые комплексные значения.

13. Дано алгебраическое уравнение $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$ с действительными коэффициентами a_k. Пусть z — один из корней. Покажите, что $\bar{z}$ — тоже корень.

14. Выразите $\operatorname{Arcsin} z$ через логарифм.

15. Вычислите интегралы по полуокружности γ, проведенной из точки $(1, 0)$ в точку $(-1, 0)$ в верхней полуплоскости:

$$1) \quad I_1 = \int\limits_{\gamma} z\, dz; \quad 2) \quad I_2 = \int\limits_{\gamma} \bar{z}\, dz.$$

16. Вычислите интеграл $I = \int\limits_{\gamma} \frac{1}{z}\, dz$, где γ — парабола $y = 1 - x^2$, проведенная из точки $(-1, 0)$ в точку $(1, 0)$.

17. Пусть C — контур треугольной формы с вершинами в точках $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Вычислите интеграл $I = \oint\limits_{C^+} (\bar{z} + \sin e^z)\, dz$.

18. Найдите изолированные особые точки функций, определите их характер; для полюсов найдите их порядок. Вычислите вычеты во всех изолированных особых точках.

$$1)\ \frac{1}{z}; \qquad 2)\ \frac{e^z}{z}; \qquad 3)\ \frac{\cos z}{z^2}; \qquad 4)\ \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2};$$

$$5)\ \frac{\sin z}{z}; \qquad 6)\ \frac{\sin z}{z^2}; \qquad 7)\ \frac{1-\cos z}{z^2}; \qquad 8)\ \frac{1-e^{-z}}{z};$$

$$9)\ \frac{e^z-1}{z^2}; \qquad 10)\ \frac{e^z-1}{z^3}; \qquad 11)\ \frac{e^{z^2}-1}{z^3}; \qquad 12)\ \frac{z-\sin z}{z^3};$$

$$13)\ \frac{z^3}{(z-1)^3}; \qquad 14)\ \frac{\sin z \cos z}{(z-\pi)^2}; \qquad 15)\ \frac{\sin z}{e^z-1}; \qquad 16)\ \frac{e^{iz}}{(z-\pi)\sin z};$$

17) $\frac{z^2+3z+2}{z^2-3z+2}$; 18) $\frac{z^2-z-2}{z^2-3z+2}$; 19) $\left(\frac{z^2-4z+3}{z^2-2z+1}\right)^2$; 20) $\frac{(z-3)e^{2(z-1)}}{(z-1)(z^2-4z+3)}$;
21) $e^{-\frac{1}{z}}$; 22) $\cos\frac{1}{z}$; 23) $z\cos\frac{1}{z}$.

19. Вычислите интегралы по контурам с положительным направлением обхода.

1) $I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz.$ 2) I как в 1); контур: $|z-2| = 1$.

3) $\oint\limits_{|z|=10} \frac{\sin z}{z^2}\,dz.$ 4) $\oint\limits_{|z-\pi|=\frac{1}{10}} \frac{\sin z}{(z-\pi)^2}\,dz.$

5) $\oint\limits_{|z|=5} \frac{(z-3)e^{2(z-1)}}{(z-1)(z^2-4z+3)}\,dz.$ 6) $\oint\limits_{|z|=7} \frac{\sin z}{e^z-1}\,dz.$

7) $\oint\limits_{|z-\frac{\pi}{2}|=\pi} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)\sin z}\,dz.$ 8) I как в 7); контур: $|z-\pi| = 5$.

9) $\oint\limits_{|z|=1} e^{-\frac{1}{z}}\,dz.$ 10) $\oint\limits_{|z|=1} z\cos\frac{1}{z}\,dz.$

11) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2+3z+2}{z^2-3z+2}\,dz.$ 12) $\oint\limits_{|z|=2} \left(\frac{z^2-4z+3}{z^2-2z+1}\right)^2 dz.$

13) $\oint\limits_{|z|=\pi} \frac{(z-3)e^{2(z-1)}}{(z-1)(z^2-4z+3)}\,dz.$ 14) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2}\,dz.$

15) $\oint\limits_{|z|=1} \operatorname{ctg} z\,dz.$ 16) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{1}{z-i}\,dz.$

17) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2}{(z-1)^3}\,dz.$ 18) $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{z-1}\,dz.$

19) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{1}{(z-1)(z-2)}\,dz.$ 20) $\oint\limits_{|z+3|=1} \frac{1}{z(z+3)}\,dz.$

21) $\oint\limits_{|z|=5} \frac{1}{\sin z}\,dz.$ 22) $\oint\limits_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\,dz.$

23) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{e^z-1}\,dz.$ 24) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z}{(z+1)(z-3)}\,dz.$

25) $\oint\limits_{|z+1|=\frac{3}{2}} \frac{1}{z(z+2)}\,dz.$ 26) $\oint\limits_{|z-\frac{3}{2}|=1} \frac{1}{\cos z}\,dz.$

27) $\oint\limits_{|z-\frac{1+i}{2}|=1} \frac{z}{(z-i)(z-1)}\,dz.$ 28) $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(z+i)(z+1)}\,dz.$

29) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)}\,dz.$ 30) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{-iz/2\pi}}{z^2}\,dz.$

31) $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{z}{(z^2+1)}\,dz.$ 32) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{z^2}{(z-1)^2}\,dz.$

33) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{1}{(z-1)(z+2)}\,dz.$ 34) $\oint\limits_{|z+1|=1} \frac{1}{(z^2-1)}\,dz.$

35) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{1}{(z^2+1)}\,dz.$ 36) $\oint\limits_{|z|=2} \operatorname{tg} z\,dz.$

37) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^5}\,dz.$

20. Вычислите интегралы с помощью перехода к интегралу по контуру

1) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{5-4\cos x}\,dx;$ 2) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx,\ a \in \mathrm{R};$ 3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x-i}\,dx;$

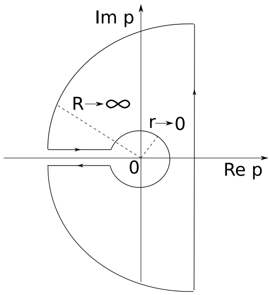
4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x+i}\,dx;$ 5) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx.$

21. Найдите изображение Лапласа функции $f(x)$. По найденному изображению восстановите $f(x)$ в области $x > 0$ (вычисления нужно проделать).

1) $f(x) = 1;$ 2) $f(x) = x;$ 3) $f(x) = x^2;$

4) $f(x) = \sin x;$ 5) $f(x) = \cos x.$

22. Найдите изображение Лапласа функции $f(x) = 1/\sqrt{x}$. По найденному изображению восстановите $f(x)$ в области $x > 0$ (вычисления нужно проделать). Указание: при обратном преобразовании необходим обход точки ветвления (см. рисунок).



23. Решите дифференциальные уравнения с начальными условиями методом преобразования Лапласа. Правильность решения проверьте подстановкой.

1) $y'' + 2y' = x, \ x \geqslant 0; \ \ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0;$

2) $y' - y = 0, \ x \geqslant 0; \ \ y(0) = 0;$

3) $y'' + y = 0, \ x \geqslant 0; \ \ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 1;$

4) $y'' - y = 0, \ x \geqslant 0; \ \ y(0) = 1, \ \ y'(0) = 1;$

5) $y' - y = 1, \ x \geqslant 0; \ \ y(0) = 0;$

6) $y' + y = 1, \ x \geqslant 0; \ \ y(0) = 0;$

7) $y' + y = e^{-x}, \ x \geqslant 0; \ \ y(0) = -1.$

Литература

1. Дифференциальные уравнения. Методы решения, примеры и задачи.: учеб. пособие. / С. Б. Бушманов, О. П. Бушманова. — Барнаул: Изд.-во Алт. ун-та, 2005. — 126 с.

2. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения: учебник. — М.: Изд-во ЛКИ, 2008. — 320 с.

3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2: учеб. пособие для втузов. — М.: Наука, 1985. — 560 с.

4. Киркинский А. С. Дифференциальные уравнения. Функции комплексной переменной: учеб. пособие / А. С. Киркинский; Алт. гос. техн. ун-т им. И. И. Ползунова. — Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2010. — 239 с.

5. Комаров С. А., Щербинин В. В. Теория функций комплексной переменной: учеб. пособие. — Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2013 г. — 156 с.

6. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учеб. пособие. — М.: Наука, 1971. — 256 с.

7. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: учеб. пособие. — М.: Наука, 1975. — 320 с.