МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Физико-технический факультет
Кафедра радиофизики и теоретической физики

ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ТЕРМОДИНАМИКЕ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Методические указания

Барнаул, 2019

УДК 536.7

Задания к практическим занятиям по термодинамике и статистической физике: методические указания. Изд. 2-е, исправленное. — Барнаул: изд-во АлтГУ, 2019. —12 с.

Составитель:
канд. физ.-мат. наук *А. И. Гончаров*

Рецензент:
канд. физ.-мат. наук *А. Г. Тюменцев*

Методичка предназначена для студентов 4-го курса направления 03.03.03 «Радиофизика». Она содержит задачи, которые разбираются на практических занятиях и предлагаются в качестве домашнего задания. Большая часть задач, — возможно, с изменением формулировки, — взята из книг, список которых приведен в конце методички. Решение некоторых задач разбито на этапы, к некоторым задачам приведены краткие указания.

Печатается по решению кафедры радиофизики и теоретической физики и учебно-методической комиссии физико-технического факультета.

Подписано в печать 15.05.2019. Формат 60 × 84/16.
Усл. печ. л. 0,7. Тираж 100 экз. Заказ 245.
Типография Алтайского государственного университета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66.

Термодинамика

Задача №1

Вычислить скорость звука в воздухе при температуре $t = 0$ °C. Считать, что воздух — идеальный газ с молярной массой $\mu \approx 29$ г/моль. Расчет провести для двух моделей распространения звука: считая, что при прохождении звуковой волны процессы разрежения и сжатия воздуха являются 1) адиабатическими; 2) изотермическими.

План решения задачи

Рассмотрим известное из механики волновое уравнение, описывающее продольные колебания упругого стержня:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2},$$

где $y(x,T)$ в механике — оклонение точек стержня от равновесия, а в случае газа — избыточная плотность; $a = \sqrt{K/\rho}$, K — модуль упругости (модуль Юнга) материала (в данном случае — воздуха), ρ — невозмущенная плотность материала.

Задания

1. Покажите, что a — это скорость распространения волн, т.е. скорость звука. Указание: проверьте, что функция $y(x,t) = A(x+at) + B(x-at)$ является решением волнового уравнения; $A(x)$, $B(x)$ — произвольные функции.

2. Выведите формулу для модуля упругости газа $K = -V\frac{dP}{dV}$. Указания. Рассмотрим наполненный газом цилиндр с подвижным поршнем сечением S и высотой l. Для описания упругих свойств этой системы можно использовать аналогию с упругим стержнем таких же размеров, с той лишь разницей, что коэффициент упругости $k = -\frac{dF}{dl}$ не остается постоянным при сжатии или расширении газа. Связь коэффициента упругости образца с модулем упругости материала — такая же, как в механике: $k = KS/l$ (в механике модуль упругости называют модулем Юнга и обозначают буквой E).

3. Найдите модуль упругости при адиабатном процессе $K_{\text{ад}} = -V(\frac{dP}{dV})_{\text{ад}}$.
Указание: уравнение адиабатного процесса $PV^{\gamma} = const$.

4. Выразите плотность газа ρ через абсолютную температуру T с помощью уравнения состояния идеального газа. Найдите скорость звука в зависимости от $T,\ \gamma,\ \mu$.

5. Найдите показатель адиабаты $\gamma = C_P/C_V$ для воздуха.

6. Найдите численное значение скорости звука $a_{\text{ад}}$.

7. Найдите $K_{\text{т}} = -V(\frac{dP}{dV})_{\text{т}}$. Найдите $a_{\text{т}}$, сравните с $a_{\text{ад}}$.

Задача №2

В воздухе распространяется звуковая волна; диапазон частот $\nu \sim 10 \div 10^4$ Гц. Можно ли считать процессы сжатия и расширения газа в волне адиабатическими?

План решения задачи

Пусть плоская звуковая волна распространяется вдоль оси x.

1. Вспомогательная задача. Так как волна плоская, то температура воздуха зависит только от координаты x (и, конечно, от времени); тепло течет только вдоль оси x. Имеется начальное возмущение температуры в виде очень узкого пика с максимумом в сечении $x = 0$. Оцените время τ, за которое значительная доля энергии утечет за пределы отрезка $[-L, L]$.

Указания. Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности $\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$, где k — коэффициент температуропроводности; для воздуха $k = 0{,}2$ см^2/с. Начальное возмущение можно взять в виде $T(x,0) = A\delta(x)$, где A — некоторая константа. Считаем, что среда бесконечная ($x \in (-\infty, \infty)$). Уравнение можно решить, например, методом преобразования Фурье по x, и получается

$$T(x,t) = \frac{A}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Найдите нормированную на 1 ($\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$) плотность распределения тепловой энергии $f(x)$. В качестве параметра, характеризующего ширину этого распределения, используем среднеквадратичное отклонение σ; $\sigma^2 = \bar{x^2} - \bar{x}^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)xdx\right)^2$. Второй из этих интегралов, очевидно, равен нулю, а вычислять первый интеграл нет необходимости, так как полученное распределение совпадает с нормальным распределением $f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\sigma(x)dx = 1$; $\bar{x^2} - \bar{x}^2 = \bar{x^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\sigma(x)x^2dx = \sigma^2$. *Найдите* зависимость σ от времени. Для оценки времени τ растекания тепла по отрезку $[-L, L]$ можно принять такое время, при котором $\sigma = L$. *Найдите* зависимость τ от L.

2. Переходим к основной задаче: сравнить время растекания тепла τ с периодом колебаний $\mathcal{T}$.

Указания. В качестве длины отрезка $2L$ следует взять характерную длину области избыточной плотности воздуха (см. волновое уравнение в задаче №1), т.е. $\lambda/2$. *Найдите* в общем виде условие, накладываемое на частоту, при котором $\tau \gg \mathcal{T}$. *Проверьте* справедливость этого условия при разных частотах ν. *Сделайте вывод,* можно ли считать процессы в звуковой волне адиабатическими.

Задача №3

Оценить времена установления равновесных значений давления и температуры τ_{p}, τ_{T} (времена релаксации), если газ находится при нормальных условиях в сосуде с линейными размерами $L \approx 10$ см.

1. Выравнивание давления. Механизм выравнивания — волна плотности газа, порожденная первоначальным возмущением. Скорость волны (скорость звука) известна из задачи №1.

2. Выравнивание температуры. Используйте результаты задачи №2.

Выводы

1) Оценка времен релаксации производится не термодинамическими методами.

2) Времена релаксации разных параметров могут различаться на несколько порядков.

Задача №4

Имеется резиновый стержень (жгут) длины l_0. Сила натяжения F зависит от длины l и температуры T следующим образом:

$$F = kT\left[\frac{l}{l_0} - \left(\frac{l_0}{l}\right)^2\right],\ l \geqslant l_0,$$

где $k = const > 0$. В термодинамике эта формула для F выполняет роль термического уравнения состояния.

Задания

1. Вычислить разность теплоемкостей $C_F - C_l$, определить ее знак.

Указание. В случае системы, совершающей работу $\delta W = pdV$, мы находили

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

Напишите формулу для $C_A - C_a$ для общего случая $\delta W = Ada$. Напишите формулу для δW для резинового жгута, напишите формулу для $C_F - C_l$, проведите вычисления.

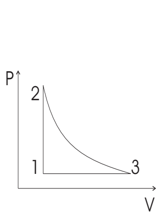
2. Выяснить, как изменяется внутренняя энергия при изотермическом растяжении.

Указание. Внутренняя энергия входит в I начало и в формулы для теплоемкостей. Но эти формулы не подходят, потому что в них есть неизвестные величины. Еще внутренняя энергия входит в формулу, которая связывает термическое и калорическое уравнения состояния. *Запишите эту формулу для нашей системы.* Вычислите $(\frac{\partial E}{\partial l})_T$.

3. Выяснить, нагревается или охлаждается предварительно растянутая резина при адиабатном сжимании. Математическая постановка вопроса: каков знак $(\frac{\partial T}{\partial l})_{\text{ад}}$? Известно, что $C_l > 0$ (это следует из соображений устойчивости системы по отношению к малым возмущениям и будет обосновано в §«Условия термодинамического равновесия и устойчивости»).

Указание. Например, можно взять за основу дифференциальное уравнение адиабатного процесса (уравнения политропного процесса при $C = 0$) и учесть результат задания 1. А можно взять за основу I начало термодинамики, положить в нем $\delta Q = 0$, расписать дифференциал $dE(T, l)$ и учесть $(\frac{\partial E}{\partial l})_T$, найденное в задании 2.

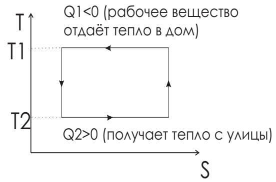
Задача №5



Для одноатомного идеального газа вычислите КПД цикла, состоящего из изохорного, адиабатного и изобарного процессов. Ответ выразите через $\gamma = C_p/C_V$, T_2/T_1, T_3/T_1.

Задача №6

Тепловой насос работает по обратному циклу Карно. $T_1 = 293$ К, $T_2 = 253$ К. Найдите коэффициент преобразования $\varphi = \frac{|Q_1|}{|W|}$ (он выполняет роль кпд).



Тема «Термодинамические потенциалы»

Задача №7

Покажите, что при $T \to 0$ температурные коэффициенты

$$\alpha = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \to 0, \quad \gamma = \frac{1}{p_0}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \to 0.$$

Указание: выразите α, γ через производные $(\frac{\partial S}{\partial p})_T$, $(\frac{\partial S}{\partial V})_T$, которые, по III началу термодинамики, стремятся к 0 при $T \to 0$. Для этого используйте метод термодинамических потенциалов. Пусть $df(x,y) = A(x,y)dx + B(x,y)dy$, где x, y, A, B, f — функции состояния системы, причем величина f — аддитивная. Тогда величина f называется термодинамическим потенциалом в переменных x, y, и справедливо соотношение $(\frac{\partial A}{\partial y})_x = (\frac{\partial B}{\partial x})_y$ («термодинамическое тождество»). Подберите такие потенциалы, чтобы соответствующие тождества дали нужные нам формулы для α, γ.

Задача №8

Термодинамика топливного (гальванического) элемента

Модель:

– топливный элемент находится в термостате с температурой $T = const$ и включен в замкнутую цепь;

– число молекул, химический состав поддерживаются постоянными (обеспечивается постоянная подпитка), т.е. $N_k = const$;

– элемент не содержит газообразных веществ, механическая работа не совершается, тогда объем $V = const$;

– все процессы равновесные, а тогда и обратимые. Значит, следует пренебречь выделением джоулева тепла *внутри элемента*. Это возможно при малых токах;

– считается известной величина $v = -(\frac{\partial E}{\partial q})_T$ — расход энергии элемента на единицу заряда, перемещенного по замкнутой цепи.

Задание: вывести уравнение, связывающее эдс элемента ε с v (уравнение Гельмгольца для ε).

Указания

1. Запишите основное уравнение термодинамики.
2. Учтите, что $T = const$, вычислите $(\frac{\partial E}{\partial q})_T$.
3. Исключите S с помощью подходящего термодинамического тождества.
4. Объясните смысл слагаемого, пропорционального T. Что можно сказать о знаке разности $\varepsilon - v$?
5. Предложите метод экспериментального определения v (эдс ε неизвестна).

Задача №9

Известна энтальпия одного моля газа как функция своих характеристических параметров:

$$H = C_p\, p^{R/C_p}\, e^{(S-S_0)/C_p} + E_0,$$

где $C_p,\ S_0,\ E_0$ — константы.

1. Найдите термическое уравнение состояния. Для этого, пользуясь энтальпией как потенциалом, получите формулы для T и V, исключите S и найдите связь $T,\ V,\ P$.
2. Выведите уравнение адиабатного равновесного процесса.

Тема «Равновесие и устойчивость»

Задача №10

Объем $V = const$ заполнен изотропным магнетиком. Работа, совершаемая системой «магнетик+магнитное поле», равна $\delta W = -\frac{HV}{4\pi}dB$, где $\vec{B},\ \vec{H}$ — индукция и напряженность магнитного поля, связанные зависимостью $\vec{B} = \mu\vec{H}$; $\mu = \mu(T)$ — магнитная проницаемость вещества. Магнитные свойства вещества можно описывать также с помощью магнитной восприимчивости χ, которая входит в формулу для вектора намагниченности $\vec{M} = \chi\vec{H}$ и связана с проницаемостью: $\chi = (\mu - 1)/4\pi$. Вещества, для которых

$\chi < 0$, называются диамагнетиками (намагничиваются против поля). Вещества, для которых $\chi > 0$, называются парамагнетиками (намагничиваются по полю).

Задание. Найдите, при каких χ возможны устойчивые системы. Для этого рассмотрите устойчивость магнетика к изменению индукции B с помощью метода, которым исследовалась устойчивость газа в сосуде с поршнем к механическому воздействию.

Тема «Фазовые переходы»

Задача №11

Некто утверждает, что под действием давления, оказываемого коньками, лёд тает; образовавшаяся вода служит смазкой и обеспечивает скольжение. Проведите расчеты для проверки справедливости этого утверждения. Удельная теплота таяния льда $\lambda = 335000$ Дж/кг. Плотность льда 917 кг/м^3. Площадь лезвия конька примерно 5 см^2.

Задача №12

Под каким давлением вода будет кипеть при температуре 95 °C? Удельная теплота испарения воды $\lambda = 2258{,}4$ кДж/кг. Можно считать, что насыщенный пар подчиняется уравнению состояния Клапейрона — Менделеева.

Задача №13

Найдите скачок теплоемкости $C^{\text{св}}(T_{\text{кр}})/C(T_{\text{кр}})$ при переходе металла в сверхпроводящее состояние. Известно, что этот фазовый переход — II рода, и что вблизи $T = T_{\text{кр}}$ при $T < T_{\text{кр}} \quad C^{\text{св}} \sim T^3$, а при $T > T_{\text{кр}} \quad C \sim T, \;\; S \sim T$. Используйте тот факт, что при фазовых переходах II рода энтропия не меняется.

Задача №14
Эффект Померанчука

Рассмотрим изотоп гелия ^{3}He в твердом состоянии при $T < 0{,}3$ K. Известно, что при повышении давления температура плавления понижается и что плотность твердого гелия больше плотности жидкого гелия.

1. Что можно сказать об удельной теплоте плавления?

2. У какой фазы, жидкой или твердой, удельная энтропия больше?

Статистическая физика

Задача №15
Система с постоянной энергией. Микроканоническое распределение

Имеется замкнутая система, состоящая из N молекул одноатомного идеального газа в объеме V.

1. Найдите фазовый объем $\Gamma(E, V)$. 2. Найдите энтропию $S(E, V)$.

3. Выведите калорическое уравнение состояния. 4. Выведите термическое уравнение состояния.

Задача №16
Система в термостате. Каноническое распределение Гиббса

Одноатомный идеальный газ в количестве N молекул находится в объеме V при температуре T.

1. Найдите статистический интеграл $Z(T, V)$. 2. Найдите свободную энергию $F(T, V)$. 3. Выведите термическое уравнение состояния. 4. Найдите энтропию. 5. Найдите внутреннюю энергию системы.

Задача №17
Система в термостате. Каноническое распределение Гиббса

Краткая формулировка

1. Выведите распределения Максвелла $w_{\vec{p}}(\vec{p})$, $w_v(v)$ $(v = |\vec{v}|)$ параметров отдельной молекулы, исходя из распределения Гиббса.

2. Найдите средние значения $\bar{v}$, $\bar{v^2}$ и наиболее вероятное значение $v_{\text{вер}}$.

Более подробная формулировка

Система молекул (в общем случае — многоатомных) находится в термостате с температурой T. Имеются произвольные внешние поля, но потенциалы не зависят от скоростей; молекулы могут взаимодействовать друг с другом. Молекулы нерелятивистские $(v_i \ll c)$. Требуется найти плотности распределения импульса и абсолютной величины скорости отдельной молекулы, нормированные на единичную полную вероятность:

$$\int\limits_{R_3} w_{\vec{p}}(\vec{p})d\vec{p} = 1, \quad \int\limits_0^\infty w_v(v)dv = 1.$$

Задача №18
Распределение Максвелла

Оценить долю δ числа молекул, которую теряет атмосфера Земли за единицу времени.

План решения задачи

1. Рассмотрим площадку S, перпендикулярную вертикальной оси z. Обозначим n концентрацию молекул вблизи этой площадки. 2-ю космическую скорость обозначим v_0. Найдите число молекул $dN(v_z > v_0)$, у которых z-проекция скорости $v_z > v_0$ и которые за время dt пересекут площадку S. *Указание.* Найдите сначала число молекул $dN(v_z)$ с z-проекцией скорости из интервала $(v_z, v_z + dv_z)$, которые за время dt пересекут площадку S. Для этого сначала найдите концентрацию частиц $dn(v_z)$ с такими скоростями. Концентрацию n всех молекул считаем известной.

2. Найдите число молекул N в столбе воздуха с площадью основания S, если известно атмосферное давление $P_{\text{атм}}$ на уровне земли.

3. Вычислите искомую долю

$$\delta = \frac{1}{N}\frac{dN(v_z > v_0)}{dt}.$$

Для оценки «сверху» в качестве концентрации молекул n возьмите концентрацию на уровне земли, которую можно найти, зная атмосферное давление и температуру. Сделайте численную оценку. Сделайте вывод, грозит ли Земле потеря атмосферы за счет «максвелловского хвоста».

Задача №19
Равновесное электромагнитное излучение (фотонный газ)

1. Выведите формулу Планка для спектральной плотности энергии равновесного излучения. Рассмотрите также предельные случаи $h\nu \gg kT$ и $h\nu \ll kT$.

2. Известно, что космическое пространство заполнено равновесным электромагнитным излучением с температурой $T \approx 2{,}7$ K — реликтовым излучением. Найдите концентрацию фотонов.

Указания. Обозначим $\bar{N}$ — полное среднее число фотонов в системе; ε — энергию отдельного фотона; $d\bar{N}(\varepsilon)$ — среднее число фотонов с энергией из интервала $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$. Запишите $\bar{N}$ в виде суммы средних чисел заполнения квантовых состояний. Учтите, что фотоны являются бозонами и что в равновесном излучении химический потенциал фотонов равен нулю. По стандартным правилам перейдите от суммирования по состояниям к интегрированию по фазовому объему. Интеграл по объему пространства импульсов выразите через интеграл по энергии ε. Полученную формулу сравните с формулой $\bar{N} = \int\limits_0^\infty \frac{d\bar{N}(\varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon$, найдите энергетический спектр излучения $\frac{d\bar{N}(\varepsilon)}{d\varepsilon}$. Найдите плотность энергии излучения из единичного интервала частот в единице объема (спектральная плотность энергии). Для вычисления концентрации фотонов найдите $\bar{N}$.

Задача №20

Реликтовое излучение

В ранние эпохи вещество во Вселенной находилось в состоянии плазмы и было распределено равномерно; электромагнитное излучение находилось в равновесии с веществом и, следовательно, тоже было распределено равномерно. В результате расширения Вселенной температура уменьшалась. Когда температура понизилась до $T \approx 2700$ K, произошла рекомбинация атомов, и излучение практически перестало взаимодействовать с веществом.

Задание: во сколько раз увеличился масштабный фактор Вселенной с «момента» рекомбинации? Напоминание: температура реликтового излучения в настоящее время $T \approx 2{,}7$ K; уравнение состояния излучения $p = u/3$ (u — плотность энергии).

Литература

1. Квасников И. А. Термодинамика и статистическая физика. Теория равновесных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 800 с.
2. Базаров И. П. Термодинамика. – М.: Высш. шк., 1991. – 376 с.