

Министерство науки и высшего образования РФ
Алтайский государственный университет

А.И. Гончаров

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Учебное пособие



Барнаул

Издательство
Алтайского государственного
университета
2019

УДК 539.12.01
ББК 22.315.7я73
Г 657

Рецензенты:

к.ф.-м.н., доцент *А. Г. Тюменцев*,

к.ф.-м.н., доцент *Н. В. Волков*.

Гончаров, Александр Иванович

Г 657 Квантовая электродинамика: учебное пособие. — Барнаул:
Изд-во Алт. ун-та, 2019. — 108 с.

ISBN 978-5-7904-2376-5

В учебном пособии приведены расширенные конспекты лекций и указания к теоретическим лабораторным работам по предмету «Квантовая электродинамика». Материал ограничен изложением основ скалярной электродинамики. Указания содержат задания и ответы.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 03.04.03 «Радиофизика».

УДК 539.12.01
ББК 22.315.7я73

Печатается по решению кафедры радиофизики и теоретической физики и учебно-методической комиссии физико-технического факультета АлтГУ.

ISBN 978-5-7904-2376-5

© А. И. Гончаров, 2019
© Алтайский государственный
университет, 2019

Содержание

1	Конечная цель — расчет сечений реакций	7
2	Формула Дайсона для S-оператора	10
2.1	Ряд Неймана	11
2.2	Представление взаимодействия	13
3	Некоторые понятия, обозначения и формулы специальной теории относительности и вариационного исчисления	15
3.1	Пространство Минковского	15
3.2	Преобразования Лоренца	15
3.3	Тензоры	16
3.4	Вариация функции	18
4	Принцип Гамильтона и уравнение Лагранжа	20
4.1	Роль уравнения Лагранжа в теории релятивистских полей	20
4.2	Принцип Гамильтона	20
4.3	Требования к лагранжиану и его структура	21
4.4	Вывод уравнения Лагранжа	22
5	Теорема Нётер	23
6	Симметрия относительно трансляций. Четырехмерный импульс	27
7	Симметрия относительно поворотов. Момент импульса	28
8	Глобальная калибровочная симметрия. Электрический заряд	31
9	Релятивистские уравнения для свободных полей	33
9.1	Уравнение Клейна—Гордона—Фока	33
9.2	Уравнение Д'Аламбера	34

10 Лагранжианы свободных полей	34
(лабораторная работа 1)	
10.1 Комплексное скалярное поле	34
10.2 Действительное векторное поле	35
10.3 Ответы	36
11 Гамильтониан и заряд свободного комплексного ска-	36
лярного поля	
11.1 Решение уравнений Клейна—Гордона—Фока	36
11.2 Гамильтониан и заряд поля	39
12 Гамильтониан свободного электромагнитного поля	40
13 Взаимодействие полей	44
13.1 Уравнение Клейна—Гордона—Фока для комплексно-	
го скалярного поля, взаимодействующего с электро-	
магнитным полем	45
13.2 Полный лагранжиан \mathcal{L}	46
13.3 Гамильтониан взаимодействия \mathcal{H}_I	47
13.4 Локальная калибровочная симметрия	47
14 Квантовое описание полей	49
14.1 Эрмитово сопряжение	49
14.2 Переход к квантовому описанию полей	49
14.3 Коммутатор полевого оператора и некоторого эрми-	
това оператора	51
14.4 Квантование заряда	52
14.5 Операторы рождения и уничтожения частиц	53
14.6 Векторы начального и конечного состояний системы	54
14.7 Коммутаторы полевых операторов заряженных бозонов	55
14.8 Зарядовое сопряжение	59
14.9 Коммутаторы операторов электромагнитного поля .	59
14.10 Частицы со спином $\hbar/2$	60
14.11 Нормальная форма записи операторов	62
14.12 Полевые операторы в представлении взаимодействия	64
15 Расчет матричного элемента комптоновского рассея-	65
ния фотона. Часть I (лабораторная работа 2)	
15.1 Указания	66

15.2	Задания	67
15.3	Ответы	69
16	Хронологические произведения	69
16.1	Теорема Вика для двух сомножителей	69
16.2	Теорема Вика для произвольного числа сомножителей	70
16.3	Теорема Вика для смешанного хронологического про- изведения	70
16.4	Вычисление сверток	71
16.5	Производная под знаком свертки	73
16.6	Физический смысл свертки	73
17	Расчет матричного элемента комптоновского рассея- ния фотона. Часть II (лабораторная работа 3)	76
17.1	Задания	77
17.2	Ответы	80
18	Диаграммы Фейнмана и правила соответствия	86
18.1	Структура матричного элемента S -оператора	86
18.2	Графическое изображение элементов S -оператора в координатном пространстве	87
18.3	Диаграммы процесса $\gamma + \pi^+ \rightarrow \gamma + \pi^+$	88
18.4	Алгоритм расчета матричного элемента S -оператора .	89
18.5	Правила соответствия для сомножителей матричного элемента	89
19	Расчет матричного элемента комптоновского рассея- ния фотона с помощью диаграмм Фейнмана (лабора- торная работа 4)	91
19.1	Задание	92
19.2	Ответы	92
20	Построение диаграмм Фейнмана для процесса $\pi^+ + \pi^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+$ (лабораторная работа 5)	93
20.1	Указания и задания	93
20.2	Ответы	94

21 Сечение комптоновского рассеяния фотона на π-мезоне	99
21.1 Упрощение S_{fi} в лабораторной системе отсчета . . .	99
21.2 Сечение, дифференциальное по импульсам рассеянных частиц	99
21.3 Переход к конечной пространственно-временной области	100
21.4 Сечение, дифференциальное по телесному углу рассеянного фотона	102
21.5 Усреднение по λ и суммирование по λ'	104
21.6 Интегральное сечение	104
21.7 Связь величин в системе единиц $\{c = \hbar = 1\}$ с величинами системы СГС	105
21.8 Сечение в единицах системы СГС	105

1 Конечная цель — расчет сечений реакций

Квантовая электродинамика описывает излучение и поглощение квантов электромагнитного поля — фотонов — заряженными частицами, взаимодействие заряженных частиц посредством квантованного электромагнитного поля, а также образование и аннигиляцию пар заряженных частиц.

Данный курс относится к простейшему варианту скалярной электродинамики. В этой теории имеются только следующие частицы: скалярная (т.е. бесспиновая) частица χ^+ с электрическим зарядом, ее античастица χ^- и фотон γ . Считаем, что скалярные частицы участвуют только в электромагнитном взаимодействии и не имеют структуры. В природе таких частиц нет: заряженные (псевдо)скалярные частицы встречаются только среди мезонов, но модель «бесспиновых электронов», привычную для нерелятивистской квантовой механики, иногда в учебных целях применяют и в квантовой электродинамике, так как уравнение Клейна—Гордона—Фока проще уравнения Дирака. В некоторых случаях, когда можно пренебречь сильным взаимодействием по сравнению с электромагнитным, эту модель можно применять для приближенного описания электромагнитного взаимодействия заряженных пи-мезонов или К-мезонов. В дальнейшем для краткости вместо «заряженная скалярная частица» будем говорить «пи-мезон» (π^\pm), в том числе и в тех случаях, когда в действительности сильное взаимодействие пи-мезонов или их структура являются существенными.

Из всего разнообразия задач квантовой электродинамики для определенности будем иметь в виду задачу о столкновении двух частиц, и более или менее последовательно проводить расчет сечения столкновения. Иногда будут делаться отступления уточняющего или обобщающего характера. В качестве введения рекомендуется прочитать 7-ю главу учебного пособия [1].

В конце пособия приведен полный список использованных источников, из которых в первую очередь отметим [2, 3, 4, 5].

В Алтайском государственном университете предмет «Квантовая электродинамика» входит в учебную программу специальности «Радиофизика» в объеме 18 час. лекций, 18 час. лабораторных работ и 81 час самостоятельной работы. Особенности этой программы

— небольшое число аудиторных занятий и значительный объем самостоятельной работы — определили характер учебного пособия. С одной стороны, автор стремился к замкнутости и подробности изложения; многие выкладки проделаны более подробно, чем это принято в учебниках. С другой стороны, некоторые важные, но не входящие в учебную программу разделы квантовой электродинамики не вошли и в пособие — например, теория перенормировок.

Дадим определение сечения. Пусть широкий параллельный пучок частиц сорта 1 падает на неподвижную мишень, состоящую из частиц сорта 2. Плотность потока падающих частиц, т.е. среднее число частиц сорта 1, за единицу времени пересекающих единичную площадку, перпендикулярную пучку, обозначим Φ . Число частиц сорта 2 в мишени обозначим N_2 . Любую пару сталкивающихся частиц будем называть «системой». Обозначим $\Psi(t)$ вектор чистого квантового состояния системы в момент времени t . До столкновения ($t = -\infty$) система двух любых сталкивающихся частиц находилась в чистом состоянии $\Psi(-\infty) = \Phi_i(-\infty)$, характеризуемом полным набором квантовых чисел i . Для скалярных частиц квантовыми числами являются индексы квантованных значений проекций импульсов, а для фотонов в набор входят также индексы поляризации. По окончании взаимодействия ($t = +\infty$) состояние системы $\Psi(+\infty)$ тоже является чистым, но с неопределенными импульсами, поляризациями. Как известно, такое состояние является когерентной суперпозицией состояний с определенными квантовыми числами j :

$$\Psi(+\infty) = \sum_j S_{ji} \Phi_j(+\infty). \quad (1)$$

Подсчитаем число столкновений, которые привели к переходу системы из состояния i в конкретное состояние $j = f$ из этой суперпозиции. Столкновения с такими переходами для краткости будем называть «реакциями». Среднее число реакций за время T обозначим N_{fi} . Чтобы при всех столкновениях начальное состояние было одинаковым, считаем, что налетающая частица с заметной вероятностью может испытать не более одного столкновения (тонкая мишень). Это позволит также считать, что частицы мишени не загораживают друг друга от налетающих частиц. Считаем также, что изменениями частиц мишени под действием пучка можно пренебречь. Тогда N_{fi} пропорционально N_2 , Φ и T : $N_{fi} = \sigma_{fi} N_2 \Phi T$.

Коэффициент пропорциональности σ_{fi} характеризует столкновение двух частиц и не зависит ни от геометрии мишени и пучка, ни от числа частиц в них. Он имеет размерность площади и называется эффективным поперечным сечением реакции. Обозначим объем мишени V , концентрацию частиц в мишени $N_2/V = n_2$. Плотность потока налетающих частиц равна произведению концентрации n_1 частиц в пучке и абсолютной величины их скорости v : $\Phi = n_1 v$. Величина $J = n_1 n_2 v$ называется потоком сталкивающихся частиц. Таким образом, $\sigma_{fi} = N_{fi}/TVJ$.

Еще раз отметим, что σ_{fi} не зависит ни от плотности потока налетающих частиц, ни от числа частиц в мишени. При экспериментальном определении сечения могут использоваться интенсивные пучки для быстрого набора статистики. Но для теоретического расчета σ_{fi} удобно, наоборот, считать, что мишень содержит всего одну частицу и что за все время наблюдения на нее упала тоже всего одна частица. Тогда N_{fi} совпадает с вероятностью W_{fi} столкновения в объеме V за время T с переходом $i \rightarrow f$, и сечение запишется в виде

$$\sigma_{fi} = W_{fi}/VTJ. \quad (2)$$

Более общее определение сечения, справедливое в произвольной системе отсчета, см. в [8], §12; [5], §13.

Вероятность W_{fi} может быть рассчитана с помощью квантовой теории. Она вычисляется на основе коэффициента S_{fi} из формулы (1). Сначала пусть векторы состояния будут нормированы на единицу, т.е. $\|\Psi\|^2 = (\Psi^*(t)\Psi(t)) = 1$, $\|\Phi_j\|^2 = (\Phi_j^*(t)\Phi_j(t)) = 1 \forall t, j$. Из квантовой механики известно, что в этом случае S_{ji} — это амплитуда вероятности того, что при измерении система будет обнаружена в состоянии j . Сама вероятность равна $P_j = |S_{ji}|^2$. Так как начальное состояние фиксировано, то P_j одновременно является вероятностью перехода: $P_{ji} = |S_{ji}|^2$. Также из квантовой механики известно, что векторы полного набора состояний $\{\Phi_j(t)\}$, относящиеся к одному и тому же моменту времени, взаимно ортогональны. Это значит, что при $j \neq f$ скалярное произведение $(\Phi_f^*(t)\Phi_j(t))$ равно нулю. Таким образом, сумма (1) — это ряд Фурье. Так как векторы состояния нормированы, то

$$(\Phi_f^*(t)\Phi_j(t)) = \delta_{fj}, \quad (3)$$

где δ_{fj} — символ Кронекера. Для нахождения коэффициентов S_{fi} ряда Фурье умножаем скалярно левую и правую части (1) на $\Phi_f^*(+\infty)$ и с учетом (3) получаем $S_{fi} = (\Phi_f^*(+\infty)\Psi(+\infty))$.

Далее вводят S -оператор, который переводит систему из начального состояния в конечное:

$$\Psi(+\infty) = \hat{S}\Phi_i(-\infty).$$

Тогда амплитуда вероятности перехода S_{fi} запишется в виде матричного элемента S -оператора:

$$S_{fi} = (\Phi_f^*(+\infty)\hat{S}\Phi_i(-\infty)). \quad (4)$$

Вероятность W_{fi} , которая входит в определение сечения, отличается от P_{fi} тем, что $W_{fi} = 0$ при $\hat{S} = 1$, т.е. амплитуда этой вероятности равна матричному элементу оператора $\hat{S} - 1$, а сама вероятность равна

$$W_{fi} = |(\Phi_f^*(+\infty)(\hat{S} - 1)\Phi_i(-\infty))|^2.$$

В дальнейшем через Φ_i , Φ_f будем обозначать векторы состояний с другой нормировкой, в связи с чем эту формулу перепишем в виде

$$W_{fi} = |(\Phi_f^*(+\infty)(\hat{S} - 1)\Phi_i(-\infty))|^2 / \|\Phi_f\|^2 \|\Phi_i\|^2. \quad (5)$$

Матричные элементы оператора $\hat{S} - 1$ будем обозначать $(S - 1)_{fi}$. Имея в виду вычисление $(S - 1)_{fi}$, иногда в тексте для краткости будем говорить о матричных элементах S -оператора.

Наметим план дальнейших действий. Необходимо найти оператор \hat{S} , векторы состояний Φ_i , Φ_f и освоить технику расчета скалярных произведений. При решении уравнений будут применяться преобразования Фурье, поэтому придется положить $V \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$. Это приведет, в частности, к тому, что входящие в (5) нормы векторов состояний станут бесконечными. Эта и аналогичные проблемы решаются на этапе расчета сечений в §21.

2 Формула Дайсона для S -оператора

В квантовой электродинамике принимается за аксиому, что вектор состояния $\Psi(t)$, описывающий эволюцию системы, подчиняется

уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi, \quad (6)$$

где \hat{H} — гамильтониан системы. В дальнейшем применяем систему единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

2.1 Ряд Неймана

В задачах о столкновении частиц для решения уравнения Шредингера всегда применяют метод последовательных приближений. Для применения этого метода больше подходят интегральные уравнения. Поэтому, формально проинтегрировав (6) по времени, переходят к интегральному уравнению Шредингера:

$$\Psi(t) = \Psi(t_0) + (-i) \int_{t_0}^t \hat{H}(t') \Psi(t') dt', \quad (7)$$

на основе которого по схеме, известной из теории интегральных уравнений, строится ряд Неймана:

$$\Psi(t) = \{1 + (-i) \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' \hat{H}(t'') + \dots\} \Psi(t_0). \quad (8)$$

Фигурная скобка в этой формуле — это интересующий нас оператор $\hat{S}(t, t_0)$. Переходим к пределу $t_0 \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$ и получаем ряд

$$\hat{S}(+\infty, -\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}^{(n)},$$

$$\hat{S}^{(n)} = (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \dots \hat{H}(t_n).$$

Для дальнейшего построения теории удобно провести симметризацию переменных t_1, t_2, \dots, t_n так, чтобы, во-первых, каждая из них формально изменялась в одних и тех же пределах $(-\infty, +\infty)$. С помощью ступенчатой функции

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

запишем $\hat{S}^{(2)}$ в виде

$$\hat{S}^{(2)} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \theta(t_1 - t_2) \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2). \quad (9)$$

Во-вторых, с учетом того, что путем замены $t_1 \leftrightarrow t_2$ можно записать $\hat{S}^{(2)}$ также в виде

$$\hat{S}^{(2)} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \theta(t_2 - t_1) \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1) \quad (10)$$

и что можно поменять порядок интегрирования, получим симметричную форму записи:

$$\hat{S}^{(2)} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \left\{ \theta(t_1 - t_2) \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) + \theta(t_2 - t_1) \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1) \right\}. \quad (11)$$

Для более краткой записи этой и аналогичных формул вводится оператор хронологического упорядочивания (P -оператор):

$$P(\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)) = \begin{cases} \hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2) & \text{при } t_1 > t_2, \\ \hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1) & \text{при } t_2 > t_1. \end{cases} \quad (12)$$

Очевидно, что

$$\theta(t_1 - t_2) \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) + \theta(t_2 - t_1) \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1) = P(\hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2)).$$

Нетрудно убедиться, что в случае n -кратного интеграла в знаменателе накапливается факториал:

$$\hat{S}^{(n)} = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n P(\hat{H}(t_1) \dots \hat{H}(t_n)). \quad (13)$$

Для дальнейшего построения теории необходимо ввести плотность гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}(x)$, где $x = (ct, \vec{r})$ — 4-мерный радиус-вектор, и представить $\hat{H}(t)$ в виде интеграла $\hat{H}(t) = \int_{R_3} \hat{\mathcal{H}}(x) dV$.

Интегралы типа $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{H}(t) dt$ запишутся в виде $\int_{R_4} \hat{\mathcal{H}}(x) dx$, где $dx = c dt dV$ — элемент 4-мерного объема. Тогда (13) запишется в виде

$$\hat{S}^{(n)} = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{R_4} dx_1 \dots \int_{R_4} dx_n P(\hat{\mathcal{H}}(x_1) \dots \hat{\mathcal{H}}(x_n)). \quad (14)$$

Теперь под знаком P стоят операторы, зависящие не только от времени, но и от координат. Но, как и прежде, P осуществляет упорядочивание только по времени.

2.2 Представление взаимодействия

Уравнение (7) — это интегральное уравнение Вольтерры. Из теории интегральных уравнений известно, что в случае конечных пределов ряд Неймана для уравнения Вольтерры сходится. Однако нас интересует случай $t_0 \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$, в котором ряд (8) расходится. Расходимость связана с наличием в составе полного гамильтониана $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$ слагаемого \hat{H}_0 — гамильтониана свободного поля. Второе слагаемое — гамильтониан взаимодействия \hat{H}_I — является «малым» в том смысле, что $|\hat{H}_I \Psi| \ll |\hat{H}_0 \Psi|$. С этой трудностью справляются путем перехода к другому представлению, в котором гамильтониан становится малым.

Уравнения (6), (7) записаны в представлении Шредингера. Далее гамильтониан и вектор состояния в этом представлении будем обозначать соответственно \hat{H}^S , Ψ^S ; перепишем уравнение (6) в этих обозначениях:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi^S = \hat{H}^S \Psi^S; \quad \hat{H}^S = \hat{H}_0^S + \hat{H}_I^S. \quad (15)$$

Переход от одного представления к другому осуществляется с помощью соответствующего унитарного преобразования. Запишем сначала прямое и обратное унитарные преобразования в общем виде:

$$\begin{cases} \hat{H} = \hat{U}^+ \hat{H}^S \hat{U}, \\ \Psi = \hat{U}^+ \Psi^S; \\ \hat{H}^S = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^+, \\ \Psi^S = \hat{U} \Psi. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь \hat{U} — некоторый унитарный оператор, т.е. оператор, эрмитово сопряжение которого равно обратному оператору: $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$, или $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{I}$, где \hat{I} — единичный оператор. Подставив (16) в (15), получим

$$i\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}\Psi + i\hat{U}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{U}\hat{H}_0\Psi + \hat{U}\hat{H}_I\Psi. \quad (17)$$

Теперь конкретизируем оператор \hat{U} : требуем, чтобы выполнялось операторное равенство

$$i\frac{\partial\hat{U}}{\partial t} = \hat{U}\hat{H}_0. \quad (18)$$

Другими словами, требуем, чтобы для любых допустимых векторов состояния Ψ выполнялось $i\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}\Psi = \hat{U}\hat{H}_0\Psi$. Тогда от (17) остается $\hat{U}(i\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \hat{H}_I\Psi) = 0 \forall\Psi$, откуда следует

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}_I\Psi \quad (19)$$

— уравнение Шредингера в представлении взаимодействия. Оно отличается от уравнения (15) в представлении Шредингера тем, что вместо полного гамильтониана оно содержит «малый» гамильтониан взаимодействия. В дальнейшем мы увидим (п. 14.12), что, кроме малости гамильтониана, представление взаимодействия, которое иначе называется представлением Дирака, имеет еще одно преимущество.

Очевидно, на основе уравнения (19) с учетом (14) получается следующий ряд Неймана:

$$\hat{S}(+\infty, -\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}^{(n)}, \quad \hat{S}^{(n)} = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{R_4} dx_1 \dots \int_{R_4} dx_n P(\hat{\mathcal{H}}_I(x_1) \dots \hat{\mathcal{H}}_I(x_n)), \quad (20)$$

который формально можно записать в виде

$$\hat{S}(+\infty, -\infty) = P\left(\exp\left(-i \int_{R_4} dx \hat{\mathcal{H}}_I(x)\right)\right)$$

(формула Дайсона). Входящий в (5) оператор $\hat{S} - 1$ равен $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{S}^{(n)}$.

3 Некоторые понятия, обозначения и формулы специальной теории относительности и вариационного исчисления

3.1 Пространство Минковского

Природа устроена так, что пространство и время естественным образом объединяются в четырехмерное пространство-время (пространство Минковского). В предыдущем параграфе мы уже использовали радиус-вектор x этого пространства: $x = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$, где $x^0 = ct$ — координата времени; x^α ($\alpha = 1, 2, 3$) — декартовы координаты радиус-вектора \vec{r} . В теории относительности важную роль играет интервал ds между двумя близкими событиями; квадрат интервала определяется формулой

$$(ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

Для упрощения записи этой и аналогичных формул вводят «ковариантные компоненты» 4-вектора:

$$A_i = \begin{cases} A^i, & i = 0, \\ -A^i, & i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (21)$$

Тогда $(ds)^2 = \sum_{i=0}^3 dx_i dx^i$ = соглашение о суммировании = $dx_i dx^i$.

Для упрощения записи формул типа (21) можно использовать метрический тензор $g_{ik} = g_{ki} = g^{ik}$:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Отсюда следует, что $A^i g_{ik} = A_k$, $A_i g^{ik} = A^k$. Квадрат интервала можно записать также в виде $(ds)^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g^{ik} dx_i dx_k$.

3.2 Преобразования Лоренца

Пусть система отсчета K' движется равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета K ; в момент времени

$t = t' = 0$ начала координат совпадают. Пусть x, x' — точки одного и того же события в системах K и K' . Они связаны преобразованиями Лоренца, которое кратко будем обозначать $x' = \Lambda(x)$. Сначала запишем произвольное линейное однородное преобразование:

$$x'^k = \Omega_n^k x^n. \quad (23)$$

Конкретизировать матрицу Ω можно с помощью свойства инвариантности интервала относительно преобразования Лоренца: $x'^k x'_k = x^k x_k$. Подставив сюда (23) и $x'_k = \Omega_k^m x_m$, получим

$$\Omega_n^k \Omega_k^m = \delta_n^m, \quad (24)$$

где

$$\delta_n^m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases}$$

— символ Кронекера.

Формулу (23) можно интерпретировать и иначе: физическую систему K , покоящуюся в лабораторной системе отсчета, в момент $t = 0$ как единое целое мгновенно привели в движение с помощью замены $x^k \rightarrow \Omega_n^k x^n$ (активное преобразование Лоренца), после чего в этой системе ввели четырехмерные координаты x'^k , связав их с координатами лабораторной системы согласно (23) и тем самым создав систему отсчета K' .

Фундаментальные физические законы ковариантны относительно преобразований Лоренца.

Матрица Ω , обладающая свойством (24) (свойство ортогональности), описывает как преобразования Лоренца, так и повороты системы пространственных координат, в связи с чем говорят о поворотах системы четырехмерных координат. Явный вид элементов этой матрицы нам не понадобится.

3.3 Тензоры

Тензорный характер той или иной величины определяется ее поведением при переходе от одной системы координат к другой. Кроме того, компоненты тензора любого ранга (валентности) не изменяются при параллельном переносе системы координат.

1. Четырехмерные векторы (тензоры первого ранга)

Тензор первого ранга состоит из четырех компонент, которые нумеруются одним индексом, например, u^k (контравариантные компоненты) или u_k (ковариантные компоненты), и при переходе в другую систему четырехмерных координат преобразуются так же, как компоненты 4-радиус-вектора: $u' = \Lambda(u)$, т.е. $u'^k = \Omega^k_n u^n$, $u'_k = \Omega_k^n u_n$. Тензор 1-го ранга дает одно из представлений вектора. Вектор как направленный отрезок может быть задан (вместе с производимыми с ним операциями) и без помощи какого-либо базиса, но может быть задан и в тензорной форме: как набор проекций на оси базиса с заданием правила преобразования к другим базисам. Поэтому тензоры 1-го ранга для краткости обычно называют векторами. Отметим, что начало радиус-вектора x привязано к началу координат, поэтому его компоненты изменяются при параллельном переносе системы координат и, таким образом, радиус-вектор не является вектором; набор его компонент не образует тензора.

Пусть A^k, B^k — 4-векторы. Очевидно, что из $A^k = B^k$ следует $A_k = B_k$ и наоборот.

2. Скаляры

Тензоры нулевого ранга, или инварианты, в физической литературе обычно называемые скалярами, не изменяются при поворотах 4-мерной системы координат: $u' = \Lambda(u) = u$. Скалярная величина может также иметь один или несколько индексов, и в этом случае $u'_k = u_k$. Пример скалярной величины с индексом — комплексный скаляр; индекс пробегает два значения, например, $u_1 = \operatorname{Re} u$, $u_2 = \operatorname{Im} u$.

Если A, B — 4-векторы, то $A^k B_k = A_k B^k$ — скаляр; поэтому эта величина называется скалярным произведением. Контрпример: $x^k x_k$ — не скаляр. Дифференциал dx^k , в отличие от x^k , является вектором, что соответствует тому, что квадрат интервала $dx_k dx^k = (ds)^2$ — скаляр.

3. Тензоры второго ранга

Компоненты тензора второго ранга нумеруются двумя индексами и при переходе к другой системе координат преобразуются как произведения компонент двух векторов. Например, кон-

травариантные компоненты тензора A преобразуются по закону $A'^{ik} = \Omega^i_m \Omega^k_n A^{mn}$. Смешанные компоненты (контравариантные по одному индексу и ковариантные — по другому) следует записывать так, чтобы было видно, какой индекс первый, а какой второй, так как, вообще говоря, $A^i_k \neq A_k^i$, за исключением случая, когда тензор A — симметричный.

Из $A^{ik} = B^{ik}$ следуют равенства $A_{ik} = B_{ik}$, $A_i^k = B_i^k$, $A^i_k = B^i_k$.

4. Градиент

Пусть $\varphi(x)$ — скаляр. Рассмотрим дифференциал $d\varphi = \sum_{k=0}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} dx^k$.

Так как $d\varphi$ — скаляр, а dx^k — контравариантные компоненты вектора, то $\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$ — ковариантные компоненты некоторого вектора, которые кратко обозначаются $\partial_k \varphi$ или еще более кратко — $\varphi_{,k}$. Соответствующий вектор называется 4-мерным градиентом скаляра φ . Его контравариантными компонентами являются производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \partial^k \varphi = \varphi^{,k}$. При записи $d\varphi$, согласно соглашению о суммировании, знак суммы можно опустить: $d\varphi = \partial_k \varphi dx^k = \partial^k \varphi dx_k$.

5. Дивергенция

Если $A(x)$ — вектор, то скаляр $\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = \partial_k A^k = \partial^k A_k$ (k — индекс суммирования) называется четырехмерной дивергенцией вектора A .

6. Элемент объема четырехмерного пространства $cdtdV = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$, обозначаемый dx , является скаляром.

7. Формула Остроградского — Гаусса:

$$\int_{\Omega} \partial_k f^k(x) dx = \int_{\Sigma} f^k(x) n_k(x) dS, \quad (25)$$

где f — вектор; Ω — некоторая область четырехмерного пространства, Σ — ее замкнутая граница (гиперповерхность), dS — элемент ее площади, n — единичный вектор внешней нормали к Σ .

3.4 Вариация функции

1. Пусть $u(x)$ — исходная функция, а $u'(x)$ — произвольная функция, относящаяся к тому же классу, что и $u(x)$. Разность

$u'(x) - u(x) = \bar{\delta}u(x)$ называется вариацией функции $u(x)$. Таким образом, $\bar{\delta}u(x)$ — произвольная функция (считаем, что она гладкая). Можно сказать, что $\bar{\delta}u(x)$ — это произвольное изменение величины u , не связанное с изменением x . Поэтому при необходимости операции $\bar{\delta}$ и $\frac{\partial}{\partial x^n}$ можно менять местами. Вариации сложных функций: $\bar{\delta}F(u(x)) = \frac{\partial F}{\partial u} \bar{\delta}u(x)$,

$$\bar{\delta}F(u(x), v(x)) = \frac{\partial F}{\partial u} \bar{\delta}u(x) + \frac{\partial F}{\partial v} \bar{\delta}v(x) \quad (26)$$

и т.д.

2. Обозначим $x'^k = x^k + \delta x^k$, где δx^k , вообще говоря, являются функциями x . Линейную по δx^k часть приращения функции u при замене x на x' обозначим $\bar{\bar{\delta}}u$: $\bar{\bar{\delta}}u = \text{лин. часть}(u(x') - u(x)) = \frac{\partial u}{\partial x^k} \delta x^k$. Замена $x^k \rightarrow x'^k = x^k + \delta x^k$ — это либо активное преобразование, заключающееся в переносе (возможно, с поворотом) всей физической системы как целого, либо пассивное преобразование, которое заключается в переходе к другой системе координат. Во втором случае радиус-векторы x , x' относятся к одной и той же точке пространства-времени.

3. Полная вариация:

$$\delta u(x) = \text{лин. часть}(u'(x') - u(x)) = \bar{\delta}u(x) + \bar{\bar{\delta}}u(x).$$

Полную вариацию (как и вариацию $\bar{\delta}$) и производную по координате нельзя менять местами.

4. Основная лемма вариационного исчисления. Пусть функции $f_i(x)$ непрерывны при $x \in \Omega$. Тогда, если $\sum_i \int_{\Omega} f_i(x) g_i(x) dx = 0$ при любом наборе *независимых* функций $g_i(x)$, то при $x \in \Omega$ $f_i(x) \equiv 0 \forall i$.

В интересующих нас задачах роль функций $g_i(x)$ выполняют вариации $\bar{\delta}u_i(x)$.

5. Кроме основной леммы, нам понадобится похожая на нее следующая теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x \in \Omega$. Тогда, если $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$ при любом выборе области Ω , то $f(x) \equiv 0$.

4 Принцип Гамильтона и уравнение Лагранжа

4.1 Роль уравнения Лагранжа в теории релятивистских полей

Классические (неквантованные) поля описываются полевыми функциями $u_i(x)$. Известны дифференциальные уравнения, называемые полевыми уравнениями, которым эти функции подчиняются. Например, полевая функция, описывающая электромагнитное поле — это 4-потенциал $A_k(x)$, а полевое уравнение — уравнение Д'Аламбера. Электрон-позитронное поле описывается уравнением Дирака, и т.д. В дальнейшем мы увидим, что такие физические величины, как плотность энергии и импульса поля, плотность момента импульса и плотность заряда выражаются через полевые функции и их производные. Плотность энергии нам понадобится, в частности, при записи S -оператора. Формулы для перечисленных физических величин содержат также плотность функции Лагранжа \mathcal{L} (лагранжиан). Это аналогично тому, как в механике определяется энергия системы: $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$, где обобщенный импульс $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Таким образом, для нахождения H сначала нужно найти L . Лагранжиан \mathcal{L} того или иного поля можно найти следующим способом: его подбирают («строят») так, чтобы при его подстановке в уравнение Лагранжа оно превратилось в соответствующее полевое уравнение.

Отметим, что при построении некоторых теорий, например, теории кварков и глюонов, полевые уравнения первоначально неизвестны, и лагранжианы строят из более общих соображений, добиваясь получения непротиворечивой модели.

В нерелятивистской механике лагранжиан обычно может быть найден независимо, и в таких случаях уравнения Лагранжа используются для вывода дифференциальных уравнений движения.

4.2 Принцип Гамильтона

Пусть область \mathcal{V} содержит поля, описываемые функциями $u_i(x)$. На основе этих функций и их производных определяется лагранжиан \mathcal{L} и функция Лагранжа $L = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{L} dV$. Зададим два момента

времени t_1, t_2 и рассмотрим функционал \mathcal{A} , называемый действием: $\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{\Omega} \mathcal{L} dx$. Здесь $\Omega = [t_1, t_2] \times \mathcal{V}$ — четырехмерная область; ее границу обозначим Σ . По определению, действие является действительным скаляром. Будем варьировать полевые функции $u_i(x)$ вблизи их истинных значений, оставляя их неизменными на границе: $\bar{\delta} u_i(x)|_{x \in \Sigma} = 0$. Согласно принципу Гамильтона, при этом вариация действия равна нулю: $\bar{\delta} \mathcal{A} = 0$.

Вариацию $\bar{\delta}$ можно внести под знак интеграла: $\bar{\delta} \mathcal{A} = \int_{\Omega} \bar{\delta} \mathcal{L} dx$. Чтобы расписать вариацию сложной функции $\bar{\delta} \mathcal{L}$, надо знать структуру \mathcal{L} .

4.3 Требования к лагранжиану и его структура

1. \mathcal{L} — скаляр, так как действие и элемент 4-объема dx являются скалярами.
2. Лагранжиан является действительной величиной: $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$.
3. \mathcal{L} не зависит явно от x ; иначе \mathcal{L} зависел бы от выбора начала координат и поэтому не был бы скаляром.
4. Локальность: все полевые функции и их производные входят в \mathcal{L} в одной и той же точке. В частности, \mathcal{L} не содержит интегралов $\int u_i(x) dx$. Нелокальные лагранжианы приводят к нарушению причинно-следственных связей.
5. Минимальность: \mathcal{L} не содержит производных второго и более высоких порядков. В противном случае уравнение Лагранжа приведет к дифференциальным полевым уравнениям порядка выше второго; в квантовой электродинамике таких уравнений нет.

Итак, лагранжиан явно зависит только от полевых функций и их первых производных: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u_i(x), \frac{\partial u_i(x)}{\partial x^n})$. Здесь и далее договориваемся, что $u_i(x)$ в аргументе сложной функции означает весь набор $u_1(x), u_2(x) \dots$; $\frac{\partial u_i(x)}{\partial x^n}$ означает набор производных всех функций по всем координатам x^0, x^1, x^2, x^3 .

4.4 Вывод уравнения Лагранжа

Для краткости записи распространим соглашение о суммировании на выражения с участием полевых функций. Например, сумму $\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \bar{\delta} u_i$ будем записывать как $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \bar{\delta} u_i$ независимо от того, являются u_i компонентами 4-вектора или нет (в частности, $\{u_i\}$ может быть набором скаляров).

Расписав $\bar{\delta} \mathcal{L}$ по правилу (26) с учетом структуры лагранжиана, получим

$$\bar{\delta} \mathcal{A} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \bar{\delta} u_i + f^{in} \bar{\delta} \frac{\partial u_i}{\partial x^n} \right) dx,$$

где $f^{in} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^n}$. Поскольку $\bar{\delta} u_i(x)$ — произвольные независимые функции, то, если удастся вынести их за скобку и записать $\bar{\delta} \mathcal{A}$ в виде $\int_{\Omega} F^i \bar{\delta} u_i(x) dx$, то из принципа Гамильтона $\bar{\delta} \mathcal{A} = 0$ и основной леммы вариационного исчисления получится система уравнений $F^i = 0$. В связи с этим, во-первых, учтем, что $\bar{\delta} \frac{\partial u_i}{\partial x^n} = \frac{\partial}{\partial x^n} \bar{\delta} u_i$, так как вариация с черточкой не связана с изменением координат. Во-вторых, применим к слагаемому $f^{in} \frac{\partial}{\partial x^n} \bar{\delta} u_i$ преобразование Лежандра: $f^{in} \frac{\partial}{\partial x^n} \bar{\delta} u_i = \frac{\partial}{\partial x^n} (f^{in} \bar{\delta} u_i) - \bar{\delta} u_i \frac{\partial f^{in}}{\partial x^n}$. В-третьих, интеграл, содержащий дивергенцию, преобразуем по формуле Остроградского — Гаусса: $\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^n} (f^{in} \bar{\delta} u_i) dx = \int_{\Sigma} f^{ik} \bar{\delta} u_i n_k(x) dS$. Так как $\bar{\delta} u_i(x)|_{\Sigma} = 0$, то этот интеграл равен нулю. В результате из $\bar{\delta} \mathcal{A} = 0$ получаем

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x^n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x^n}} \right\} \bar{\delta} u_i(x) dx = 0 \quad \forall \bar{\delta} u_i(x),$$

откуда и получаем уравнение (точнее, систему уравнений) Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x^n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x^n}} = 0.$$

Число уравнений этой системы равно числу полевых функций, а по индексу n идет суммирование.

5 Теорема Нётер

Эта теорема устанавливает соответствие между симметриями относительно непрерывных преобразований и законами сохранения, и дает универсальные формулы для сохраняющихся величин. Это позволит в дальнейшем вывести формулы для энергии, импульса, момента импульса, электрического заряда конкретных полей.

Формулировка теоремы

Всякому непрерывному N -параметрическому преобразованию координат и одновременно — полевых функций, обращающему в нуль вариацию действия, соответствуют N сохраняющихся во времени величин (комбинаций полевых функций и их производных).

Пояснения

1. То, что преобразование — N -параметрическое, означает, что оно содержит N параметров, которые, во-первых, не должны зависеть от координат и, во-вторых, должны быть *независимыми*. В связи с этим они называются независимыми параметрами преобразования. Независимость параметров означает, что можно изменять любой из них без изменения остальных. В частности, при необходимости можно любой из параметров оставить ненулевым, а остальные положить равными нулю.

Пример. Рассмотрим на плоскости декартову систему координат. Пусть x^1, x^2 — координаты некоторой точки на плоскости. Повернем эту систему на угол φ относительно начала координат. Новые координаты той же точки обозначим x'^1, x'^2 . Рассмотрим изменения координат $\delta x^1 = x'^1 - x^1, \delta x^2 = x'^2 - x^2$. В данном случае вариации δx^1 и δx^2 однозначно связаны между собой, т.е. они зависимы и, кроме того, они зависят от координат точки. В качестве параметра преобразования можно использовать угол φ . Он однозначно задает поворот на плоскости, который, таким образом, является однопараметрическим преобразованием.

2. То, что преобразование — *непрерывное*, означает, что существует как угодно малое преобразование такого типа. В таких случаях всегда удобно использовать именно малые преобразования,

поскольку зависимости становятся линейными. В связи с этим независимые параметры преобразования будем обозначать $\delta\omega^n$, $n = 1, \dots, N$ (в данном случае значок δ указывает на малость этих величин); сами же преобразования представляют собой линейные комбинации независимых параметров:

$$\delta x^k = X_n^k(x)\delta\omega^n, \quad \delta u_i = \psi_{in}(x)\delta\omega^n. \quad (27)$$

Еще раз отметим, что $\delta\omega^n$ не зависят от x .

3. Вариация действия, которая обращается в нуль — это *полная* вариация

$$\delta\mathcal{A} = \text{линейная часть} \left(\int_{\Omega(x')} \mathcal{L}'(x)dx - \int_{\Omega(x)} \mathcal{L}(x)dx \right), \quad (28)$$

т.е. сейчас рассматривается область Ω с переменной границей. В формулировке теоремы Нетер, в отличие от формулировки принципа Гамильтона, полевые функции на границе не фиксируются.

Неизменность действия является математическим выражением неизменности поведения системы.

Наводящие соображения

Приступая к доказательству теоремы, сначала рассмотрим следующие наводящие соображения. Допустим, мы расписали $\delta\mathcal{A}$ и привели к виду

$$\delta\mathcal{A} = - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^k} \theta_n^k(x) dx \delta\omega^n; \quad (29)$$

«минус» перед интегралом поставлен для совместимости обозначений в дальнейшем. Из $\delta\mathcal{A} = 0$, независимости параметров $\delta\omega^n$ и теоремы из п. 5 § 3.4 следует $\frac{\partial}{\partial x^k} \theta_n^k(x) = 0$. Левая часть представляет собой 4-дивергенцию. Эта формула называется уравнением непрерывности, или законом сохранения в дифференциальной форме. В связи с этим функции $\theta_n^k(x)$ называются «токами Нётер». Найдем величины, которые сохраняются во времени. Для этого слагаемое дивергенции с производной по времени запишем отдельно:

$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \theta_n^0(x) + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \theta_n^\alpha = 0$. Второе слагаемое — это $\operatorname{div} \vec{\theta}_n$. Интегрируем по объему всего бесконечного 3-мерного пространства, применяем формулу Остроградского — Гаусса $\iiint_{R_3} \operatorname{div} \vec{\theta}_n dV = \iint_{S_\infty} \vec{\theta}_n \vec{n} dS$.

Двойной интеграл вычисляется по бесконечно удаленной поверхности; так как на бесконечности полей нет, то этот интеграл равен нулю. В результате получим $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{R_3} \theta_n^0(x) dV = 0$, т.е.

$$\iiint_{R_3} \theta_n^0(x) dV = \text{const}, \quad n = 1, \dots, N \quad (30)$$

— сохраняющиеся величины. Если интегрировать не по всему пространству, а по некоторой области \mathcal{V} , то, очевидно, получим формулу для этой же физической величины в области \mathcal{V} .

Вывод формулы для токов Нётер

В первом слагаемом в формуле (28) переменную интегрирования x для удобства обозначим x' : $\int_{\Omega(x')}$ $\mathcal{L}'(x) dx = \int_{\Omega(x')}$ $\mathcal{L}'(x') dx'$. Далее в этом слагаемом сделаем замену переменной интегрирования: перейдем от x' к переменной x , в результате чего интегрирование будет проводиться по области $\Omega(x)$: $\int_{\Omega(x')}$ $\mathcal{L}'(x') dx' = \int_{\Omega(x)}$ $\mathcal{L}'(x') J dx$.

Здесь учтено, что дифференциал преобразуется по правилу $dx' = J dx$, где J — якобиан преобразования:

$$J = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} & \dots \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Дифференцируем $x'^k = x^k + \delta x^k$ с учетом $\frac{\partial x'^k}{\partial x^n} = \delta_n^k$: $\frac{\partial x'^k}{\partial x^n} = \delta_n^k + \frac{\partial \delta x^k}{\partial x^n}$. Тогда

$$J = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \delta x^0}{\partial x^0} & \frac{\partial \delta x^0}{\partial x^1} & \dots \\ \frac{\partial \delta x^1}{\partial x^0} & 1 + \frac{\partial \delta x^1}{\partial x^1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Согласно (28), нам предстоит учитывать только слагаемые, линейные по вариациям. Поэтому при раскрытии определителя оставим

только произведение диагональных элементов: $J \approx (1 + \frac{\partial \delta x^0}{\partial x^0})(1 + \frac{\partial \delta x^1}{\partial x^1}) \dots \approx 1 + \frac{\partial \delta x^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \delta x^1}{\partial x^1} + \dots = 1 + \frac{\partial \delta x^k}{\partial x^k}$. Запишем $\mathcal{L}'(x')$ в виде $\mathcal{L}(x) + \delta \mathcal{L}(x)$. В результате перечисленных преобразований (28) принимает вид

$$\delta \mathcal{A} = \int_{\Omega} \left\{ \delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial \delta x^k}{\partial x^k} \right\} dx. \quad (31)$$

Расписав $\delta \mathcal{L}$, получим

$$\delta \mathcal{A} = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} \delta x^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \bar{\delta} u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x^k}} \bar{\delta} \frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \mathcal{L} \frac{\partial \delta x^k}{\partial x^k} \right\} dx. \quad (32)$$

Обратим внимание, что в первом, третьем и четвертом слагаемых производные по координатам $\frac{\partial}{\partial x^k}$ есть, а во втором слагаемом — нет. Напомним, что в подинтегральном выражении желательно появление дивергенции (см. наводящие соображения). Для этого, во-первых, исходя из уравнения Лагранжа, заменим $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i}$ на $\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x^k}}$.

Во-вторых, в третьем слагаемом внесем вариацию с черточкой под знак производной: $\bar{\delta} \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{\delta} u_i$. Теперь видно, что выражение в фигурных скобках можно записать в виде суммы производных произведений:

$$\delta \mathcal{A} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \mathcal{L} \delta x^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x^k}} \bar{\delta} u_i \right\} dx. \quad (33)$$

Чтобы привести $\delta \mathcal{A}$ к виду (29), еще нужно расписать вариации координат и полевых функций через независимые параметры преобразования $\delta \omega^n$. Для этого входящую в (33) вариацию $\bar{\delta} u_i$ выражаем через δu_i и δx^k : $\bar{\delta} u_i = \delta u_i - \bar{\delta} u_i = \delta u_i - \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \delta x^k$. С учетом (27) получаем формулу (29), в которой

$$\theta_n^k(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x^k}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^l} X_n^l - \psi_{in} \right) - X_n^k \mathcal{L}.$$

Для удобства дальнейшего использования сгруппируем слагаемые, содержащие матрицу X , для чего запишем X_n^k в виде $\delta_l^k X_n^l$; тогда

$$\theta_n^k(x) = T_l^k X_n^l - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x^k}} \psi_{in}, \quad (34)$$

где

$$T_l^k(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x^k}} \frac{\partial u_i}{\partial x^l} - \mathcal{L} \delta_l^k. \quad (35)$$

Далее на основе общих формул (30), (34) будут получены формулы для конкретных физических величин, законы сохранения которых обусловлены симметриями относительно непрерывных преобразований.

6 Симметрия относительно трансляций. Четырехмерный импульс

Опыт показывает, что имеет место симметрия относительно трансляции (параллельного переноса замкнутой физической системы как целого) в пространстве и трансляции во времени. Также это свойство формулируют как однородность пространства-времени. Математически трансляция эквивалентна параллельному переносу системы координат. Для нахождения соответствующих сохраняющихся величин нужно найти матрицы X_n^k , ψ_{in} , которые описывают эти преобразования.

Начнем с поиска матрицы ψ_{in} , которая входит в закон преобразования полевой функции. Полевая функция может быть тензором того или иного ранга (в том числе скаляром или вектором) или спинором. Скаляры и компоненты тензоров, спиноров не изменяются при параллельном переносе. Значит, в случае трансляций $\psi_{in} \equiv 0$.

Найдем матрицу X_n^k , которая отвечает за преобразование координат при трансляциях. Кроме этой матрицы, преобразование характеризуется также набором независимых параметров $\delta\omega^n$; эти параметры в формулу (34) не входят, но они нужны для нахождения X_n^k . В случае трансляции в качестве независимых параметров можно выбрать сами вариации координат: $\delta\omega^n = \delta x^n$, поскольку параллельный перенос вдоль каждой из осей, в том числе вдоль оси времени, можно выполнять по отдельности, т.е. независимо. Подставим это $\delta\omega^n$ в (27) и получим $\delta x^k = X_n^k \delta x^n$, откуда следует, что искомая матрица равна символу Кронекера: $X_n^k = \delta_n^k$.

Подстановка найденных X_n^k , ψ_{in} в (34) приводит к $\theta_n^k(x) = T_n^k(x)$. Забегая вперед, отметим, что $T_n^k(x)$ называется тензором

энергии-импульса поля. Соответствующую сохраняющуюся величину обозначим P^n : $P^n = \int_{\mathcal{V}} T^{0n}(x) dV$. Также забегая вперед, укажем, что это — 4-импульс поля. Чтобы проверить это утверждение, рассмотрим компоненту $P^0 = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i - \mathcal{L} \right) dV$. Сходство подынтегрального выражения с известной из теоретической механики формулой $H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$ для энергии системы со счетным числом степеней свободы позволяет предположить, что P^0 — это энергия поля H (напомним, что $c = 1$). В свою очередь, это означает, что P^α , $\alpha = 1, 2, 3$ — компоненты импульса \vec{P} . Окончательная проверка этого и аналогичных предположений производится в ходе дальнейшего развития теории и решения практических задач. Критерием правильности предположений является отсутствие противоречий в теории.

Подынтегральное выражение в формуле для P^0 — это плотность энергии поля

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i - \mathcal{L}. \quad (36)$$

7 Симметрия относительно поворотов. Момент импульса

Опыт показывает, что пространство является не только однородным, но и изотропным. В частности, это проявляется в том, что свойства любой замкнутой системы не изменяются при повороте этой системы как целого. Сначала для удобства будем рассматривать повороты в 4-мерном пространстве, описываемые формулами (23), (24), после чего выделим чисто пространственные повороты.

Для нахождения матрицы X_n^k необходимо сравнить общее преобразование координат (27) с преобразованием поворота (23). Для того, чтобы сравнение стало возможным, сначала необходимо записать преобразование *малого* поворота:

$$\delta x^k = x'^k - x^k = \Omega_n^k x^n - x^k = /x^k = \delta_n^k x^n / = \varepsilon_n^k x^n, \quad (37)$$

где $\varepsilon_n^k = \Omega_n^k - \delta_n^k$ — матрица малого поворота. Ее элементы претендуют на роль $\delta\omega^n$. Для описания поворота в 4-мерном пространстве требуется 6 параметров — по числу плоскостей вращения, т.е.

по числу пар координатных осей. Найдем число существенных, т.е. ненулевых и независимых, элементов матрицы ε . Для этого покажем, что она антисимметрична: $\varepsilon_n^k = -\varepsilon_n^k$. Это следует из свойства (24) ортогональности матрицы Ω . Для доказательства следует подставить $\Omega_n^k = \delta_n^k + \varepsilon_n^k$, $\Omega_k^m = \delta_k^m + \varepsilon_k^m$ в (24) и пренебречь слагаемыми второго порядка малости. Из антисимметричности матрицы ε следует, что ее диагональные элементы равны нулю. Из 12-ти ненулевых элементов 6 независимы; остальные отличаются от них только знаком. Итак, в качестве $\delta\omega^n$ можно взять ε^{mn} , $m < n$. В связи с этим в общих формулах (27) перейдем к нумерации независимых параметров двумя индексами, т.е. заменим $\delta\omega^n$ на $\delta\omega^{mn}$, X_n^k на X_{mn}^k . В результате (27) запишется в виде

$$\delta x^k = X_{mn}^k \delta\omega^{mn} = \sum_{m,n; m < n} X_{mn}^k \varepsilon^{mn}. \quad (38)$$

Для нахождения X_{mn}^k следует сравнить (38) и (37). Для этого нужно привести правую часть (37) к виду (38): $\delta x^k = \varepsilon^{kn} x_n = \varepsilon^{mn} \delta_m^k x_n = \sum_{m,n; m < n} \varepsilon^{mn} \delta_m^k x_n + \sum_{m,n; m > n} \varepsilon^{mn} \delta_m^k x_n$. Во второй сумме меняем местами m и n и учитываем, что $\varepsilon^{nm} = -\varepsilon^{mn}$, и тогда

$$\delta x^k = \sum_{m,n; m < n} (\delta_m^k x_n - \delta_n^k x_m) \varepsilon^{mn}. \quad (39)$$

Сравнивая (39) с (38), находим

$$X_{mn}^k = \delta_m^k x_n - \delta_n^k x_m. \quad (40)$$

Матрицу ψ_{imn} пока оставим в общем виде.

В формуле (34) заменяем индекс n на пару индексов mn и учитываем (40). Нас интересуют чисто пространственные повороты: $m = \alpha$, $n = \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Сохраняющуюся величину обозначим $M_{\alpha\beta}$, $\alpha < \beta$; она содержит два слагаемых: $M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^{(o)} + M_{\alpha\beta}^{(c)}$. Рассмотрим первое из них:

$$M_{\alpha\beta}^{(o)} = \int_{\mathcal{V}} (T_{\alpha}^0 x_{\beta} - T_{\beta}^0 x_{\alpha}) dV. \quad (41)$$

Согласно предыдущему параграфу, $T_{\alpha}^0(x) = \pi_{\alpha}(x)$ — плотность импульса поля (точнее, одна из проекций этой векторной величины), тогда $\pi_{\alpha}(x) dV$ — импульс поля в объеме dV . Сравнение

$(\pi_{\alpha x_{\beta}} - \pi_{\beta x_{\alpha}})dV$ с проекциями орбитального момента импульса частицы

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \quad (42)$$

показывает, что $M_{12}^{(o)} = -M_z$, $M_{13}^{(o)} = M_y$, $M_{23}^{(o)} = -M_x$. Итак, $M_{\alpha\beta}^{(o)}$ связаны с проекциями вектора орбитального момента импульса поля. Тогда очевидно, что второе слагаемое

$$M_{\alpha\beta}^{(c)} = - \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \psi_{i\alpha\beta} dV \quad (43)$$

связано с проекциями собственного момента импульса поля, т.е. связано со спином.

Спин скалярных частиц

Для скалярной полевой функции при поворотах $\delta u_i(x) = 0$, поэтому $\psi_{i\alpha\beta} = 0$. Из (43) следует, что скалярное поле не имеет собственного момента импульса. Значит, нет спина и у квантов этого поля — «скалярных частиц». Например, из опыта известно, что спин π -мезонов равен нулю. Поэтому их следует описывать скалярной полевой функцией.

Формула для спина векторного поля

Пусть u_i — 4-вектор. Тогда, по аналогии с $X^k_{\alpha\beta}$, $\psi^i_{\alpha\beta} = \delta^i_{\alpha} u_{\beta} - \delta^i_{\beta} u_{\alpha}$, и

$$M_{\alpha\beta}^{(c)} = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}^{\beta}} u_{\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}^{\alpha}} u_{\beta} \right) dV. \quad (44)$$

Из электродинамики известно, что электромагнитное поле описывается потенциалом $A_n(x)$, который является 4-вектором. Значит, у электромагнитного поля, а тогда и у его квантов — фотонов — есть собственный момент импульса. Численное значение спина фотона можно найти после перехода к квантовому описанию поля. В настоящее пособие вычисление спина фотона не включено. Но замечательно уже то, что мы получили указание на существование спина и что волновые функции частиц, имеющих спин, не являются скалярами.

8 Глобальная калибровочная симметрия. Электрический заряд

Заряды частиц принимают строго определенные значения, поэтому заранее не очевидно, что заряд сохраняется благодаря симметрии относительно некоторого *непрерывного преобразования*. Однако на это указывает то, что, с одной стороны, как известно из электродинамики, плотность четырехмерного тока $j^k(x)$ подчиняется уравнению непрерывности $\frac{\partial j^k(x)}{\partial x^k} = 0$, из которого и следует закон сохранения заряда; с другой стороны, согласно теореме Нётер, к уравнениям непрерывности $\frac{\partial \theta_n^k(x)}{\partial x^k} = 0$ приводят любые непрерывные симметрии. Симметрия, которая отвечает за сохранение заряда, была открыта математиком Вейлем. Попробуем найти это преобразование, исходя из следующих наводящих соображений.

1. Заряд — внутреннее свойство частиц, не связанное с движением, поэтому предположим, что искомое преобразование не затрагивает координат, т.е. $X_n^k = 0$. Остается найти коэффициенты ψ_{jn} , входящие в закон преобразования полевых функций $\delta u_j = \psi_{jn} \delta \omega^n$.
2. Из квантовой механики известны формулы для плотности заряда и плотности тока для случая релятивистских бесспиновых частиц: $\rho \sim \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}$; $\vec{j} \sim \Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*$. Они получаются путем сравнения уравнения Клейна — Гордона — Фока с уравнением непрерывности. Собственно, это — те формулы, которые мы в конце концов и получим. Но мы заодно найдем соответствующую симметрию, которая в дальнейшем будет использована и в других целях. А пока обратим внимание, что, если $\Psi^* = \Psi$, то $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$, и сделаем вывод, что заряженные поля описываются *комплексными* полевыми функциями. В частности, поле π -мезонов должно описываться комплексной скалярной полевой функцией, которую далее обозначаем $u(x)$. При этом в общих формулах типа (27) индекс у полевой функции сохраняется; он может нумеровать, например, действительную и мнимую части комплексной функции $u(x)$.
3. Так как координаты не преобразуются, то $\delta u_j(x) = \bar{\delta} u_j(x)$. Тогда

$\delta\mathcal{A} = \bar{\delta}\mathcal{A} = \int_{\Omega} \bar{\delta}\mathcal{L}dx$, так что можно искать такое преобразование полевых функций, которое не изменяет лагранжиана. \mathcal{L} — действительный скаляр, поэтому полевые функции могут входить в него в составе произведения u^*u и в составе скалярного произведения $\frac{\partial u^*}{\partial x^k} \frac{\partial u}{\partial x^k}$.

Подбирается простое и в то же время содержательное преобразование, которое не изменяет этих произведений:

$$u'(x) = e^{i\alpha z}u(x), \quad u'^*(x) = e^{-i\alpha z}u^*(x) \quad (45)$$

— глобальное калибровочное преобразование. Оно содержит всего один параметр $\delta\omega = \alpha$, поэтому общая формула (27) принимает вид

$$\delta u_j(x) = \psi_j \alpha. \quad (46)$$

Преобразование (45) называется «глобальным» потому, что параметр α не зависит от координат; другими словами, во всех точках 4-мерного пространства полевая функция преобразуется одинаково. В (45) z — некоторая константа; в дальнейшем выяснится, что z — элементарный электрический заряд.

На основе (45) запишем соответствующее малое преобразование:

$$\begin{cases} \delta u(x) = \text{лин.}(u'(x) - u(x)) = \text{лин.}(e^{i\alpha z} - 1)u(x) = i\alpha z u(x); \\ \delta u^*(x) = -i\alpha z u^*(x). \end{cases} \quad (47)$$

Сравниваем конкретное преобразование (47) с общей формулой (46). В отличие от (47), в (46) полевая функция имеет индекс j . Так как рассматриваемая полевая функция — комплексный скаляр, можно было бы принять, что в (46) $u_1 = \text{Re } u$, $u_2 = \text{Im } u$. Тогда на основе (47) нужно было бы записать преобразования для u_1, u_2 . Однако в некоторых отношениях удобнее в (46) принять $u_1 = u$, $u_2 = u^*$. Это возможно благодаря взаимно-однозначному соответствию между $\{\text{Re } u, \text{Im } u\}$ и $\{u, u^*\}$. Поэтому (46) запишется в виде

$$\delta u(x) = \psi_1 \alpha, \quad \delta u^*(x) = \psi_2 \alpha. \quad (48)$$

Сравнивая (48) с (47), находим

$$\psi_1 = izu, \quad \psi_2 = -izu^*. \quad (49)$$

Подставив найденные X_n^k и ψ_j в (34), найдем тензор θ_n^k и сохраняющуюся величину, которую обозначим Q :

$$Q = - \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_j} \psi_j dV = iz \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}^*} \dot{u}^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \dot{u} \right) dV. \quad (50)$$

В дальнейшем мы увидим, что Q — это электрический заряд области \mathcal{V} . Сейчас отметим только, что $Q = 0$ при $z = 0$ или при $\dot{u}^* = \dot{u}$. Что касается вопроса о причинах, по которым сохранение заряда обусловлено именно глобальной калибровочной симметрией, то, как полагают, ответ на него кроется в топологических свойствах пространства.

Отметим, что, так как функции $Re u(x)$ и $Im u(x)$ независимы, то независимы и функции $u(x)$, $\dot{u}^*(x)$. Поэтому, например, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}^*} = 0$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = 0$. Более подробное объяснение независимости u , \dot{u}^* см., например, в [9], стр. 333.

9 Релятивистские уравнения для свободных полей

9.1 Уравнение Клейна—Гордона—Фока

В квантовой механике это уравнение описывает эволюцию волновой функции $u_i(x)$ свободной частицы с целым спином, в частности, нулевым. В квантовой электродинамике это же уравнение описывает релятивистское классическое (т.е. некантованное) поле, полевая функция которого $u_i(x)$ в результате выполнения вторичного квантования заменяется оператором $\hat{u}_i(x)$, который отвечает за рождение и уничтожение вышеупомянутых частиц.

С целью дальнейшего обобщения напомним схему «вывода» уравнения Клейна — Гордона — Фока. Записываем релятивистскую связь энергии с импульсом: $E^2 - c^2 \vec{p}^2 - m^2 c^4 = 0$. Вводим вектор 4-импульса: $p^n = \{E/c, \vec{p}\}$. Тогда релятивистская связь запишется в виде $(p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 - m^2 c^2 = 0$, или $p_0 p^0 + p_1 p^1 + p_2 p^2 + p_3 p^3 - m^2 c^2 = 0$, т.е. $p_k p^k - m^2 c^2 = 0$. Вводим волновую функцию $u_i(x)$, а компоненты 4-импульса заменяем операторами:

$$(\hat{p}_k \hat{p}^k - m^2 c^2) u_i(x) = 0. \quad (51)$$

Известно, что операторы энергии и импульса имеют следующий вид: $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^0} = i\hbar \partial_0 = i\hbar \partial^0$; $\hat{p} = -i\hbar \nabla \Rightarrow \hat{p}^\alpha = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = -i\hbar \partial_\alpha = i\hbar \partial^\alpha$ и аналогично $\hat{p}_\alpha = i\hbar \partial_\alpha$, где $\alpha = 1, 2, 3$; итак, $\hat{p}^k = i\hbar \partial^k$, $\hat{p}_k = i\hbar \partial_k$, где $k = 0, 1, 2, 3$. Подставив эти операторы в (51), получим уравнение Клейна — Гордона — Фока для свободной частицы: $(\partial_k \partial^k + m^2 c^2 / \hbar^2) u_i(x) = 0$, или, в системе единиц, в которой $c = \hbar = 1$,

$$(\partial_k \partial^k + m^2) u_i(x) = 0. \quad (52)$$

В частности, для заряженных бесспиновых частиц имеем два уравнения $(\partial_k \partial^k + m^2) u(x) = 0$, $(\partial_k \partial^k + m^2)^* u(x) = 0$.

9.2 Уравнение Д’Аламбера

Уравнению Д’Аламбера подчиняется 4-потенциал $A_n(x)$ электромагнитного поля:

$$\partial_k \partial^k A_n(x) = 0. \quad (53)$$

Сравнив это уравнение с уравнением Клейна — Гордона — Фока (52), видим, что $m = 0$, т.е. фотоны — частицы безмассовые. То, что полевая функция — 4-вектор, соответствует тому, что у фотонов есть спин.

10 Лагранжианы свободных полей (лабораторная работа 1)

Цель работы: построение лагранжианов свободного комплексного скалярного поля и электромагнитного поля.

10.1 Комплексное скалярное поле

Дано: уравнения Клейна — Гордона — Фока

$$(\partial_k \partial^k + m^2) u(x) = 0, \quad (54)$$

$$(\partial_k \partial^k + m^2)^* u(x) = 0 \quad (55)$$

и уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u} = 0, \quad (56)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u^*} = 0. \quad (57)$$

Задание: построить минимальный лагранжиан (с точностью до постоянного множителя), при подстановке которого в уравнения (56), (57) получаются уравнения (54), (55).

Указания

Требования к лагранжиану \mathcal{L} .

Обязательные требования:

1) $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$; 2) \mathcal{L} — скаляр ; 3) \mathcal{L} не зависит явно от x (локальность).

Условие «минимальности»:

4) \mathcal{L} не содержит 2-й и более старших производных.

Итак, структура лагранжиана: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u_j(x), \frac{\partial u_j}{\partial x^k})$.

В случае комплексного скалярного поля $u_1(x) = u(x)$, $u_2(x) = u^*(x)$. Все функции, входящие в лагранжиан (u , u^* , $\partial_0 u$, $\partial_1 u$...), являются независимыми.

10.2 Действительное векторное поле

Дано: уравнение Д'Аламбера

$$\partial_k \partial^k A_n(x) = 0. \quad (58)$$

Задание: построить минимальный лагранжиан (с точностью до постоянного множителя), при подстановке которого в уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_n} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k A_n} = 0 \quad (59)$$

получается уравнение (58).

Указание. Предварительно вычислите производные

$$\frac{\partial a_n a^n}{\partial a_k}, \quad \frac{\partial a_{mn} a^{mn}}{\partial a_{kl}},$$

где a_n — некоторый 4-вектор, a_{mn} — некоторый тензор 2-го ранга.

10.3 Ответы

1. Лагранжиан комплексного скалярного поля:

$$\mathcal{L} = (\partial_k u^*(x))(\partial^k u(x)) - m^2 u^*(x)u(x). \quad (60)$$

2. Лагранжиан действительного векторного поля:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_k A_n(x))(\partial^k A^n(x)). \quad (61)$$

Замечание. На основе однородного уравнения минимальный лагранжиан можно построить только с точностью до постоянного множителя. В правильности знаков в формулах (60) и (61) мы убедимся в ходе проверки неотрицательности энергии свободных полей.

11 Гамильтониан и заряд свободного комплексного скалярного поля

Здесь мы рассматриваем свободное поле, что означает, что это поле не взаимодействует с другими полями, в частности, с электромагнитным полем. Отсутствие взаимодействия с электромагнитным полем приводит к тому, что заряженные частицы — кванты комплексного поля — не взаимодействуют также друг с другом. Таким образом, свободное поле — довольно абстрактный объект, который, тем не менее, необходимо рассмотреть. Для нахождения гамильтониана и заряда следует подставить лагранжиан (60) в формулы (36) и (50), затем в полученные формулы нужно подставить решения $u(x)$, $u^*(x)$ уравнений Клейна — Гордона — Фока (54), (55).

11.1 Решение уравнений Клейна—Гордона—Фока

Решим уравнение (54) методом преобразования Фурье по компонентам $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)$.

Выделяем из оператора $\partial_n \partial^n$ пространственную часть: $\partial_n \partial^n = \frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} - \nabla^2$. Запишем прямое и обратное преобразования Фурье

функции $u(x) = u(x^0, \vec{r})$:

$$\tilde{u}(x^0, \vec{k}) = (2\pi)^{-3/2} \int_{R_3} u(x) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r}, \quad (62)$$

где $d\vec{r} = dV$ — элемент объема;

$$u(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{R_3} \tilde{u}(x^0, \vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}. \quad (63)$$

Подставим (63) в (54) и с учетом $\nabla^2 e^{i\vec{k}\vec{r}} = -\vec{k}^2 e^{i\vec{k}\vec{r}}$ получим

$$\int_{R_3} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial (x^0)^2} + (\vec{k}^2 + m^2) \tilde{u} \right\} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} = 0,$$

откуда с учетом определений преобразования Фурье (62), (63) следует, что фигурная скобка в подынтегральном выражении тождественно равна нулю:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial (x^0)^2} + (\vec{k}^2 + m^2) \tilde{u} = 0;$$

это — уравнение для \tilde{u} , и его решение имеет вид

$$\tilde{u}(x^0, \vec{k}) = \varphi_1(\vec{k}) e^{ik_0 x^0} + \varphi_2(\vec{k}) e^{-ik_0 x^0},$$

где $\varphi_1(\vec{k})$, $\varphi_2(\vec{k})$ — пока произвольные функции; $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. В результате обратного преобразования (63) получим

$$u(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{R_3} \varphi_1(\vec{k}) e^{i(k_0 x^0 + \vec{k}\vec{r})} d\vec{k} + (2\pi)^{-3/2} \int_{R_3} \varphi_2(\vec{k}) e^{-i(k_0 x^0 - \vec{k}\vec{r})} d\vec{k}.$$

Во втором слагаемом скобка в показателе экспоненты содержит скалярное произведение $k_n x^n$. Для того, чтобы записать в таком же компактном виде показатель экспоненты в первом слагаемом, перейдем в этом слагаемом от интегрирования по компонентам \vec{k} к интегрированию по компонентам $-\vec{k}$, в результате чего рассматриваемое слагаемое примет вид $(2\pi)^{-3/2} \int_{R_3} \varphi_1(-\vec{k}) e^{ik_n x^n} d\vec{k}$. Для дальней-

шего удобно вместо произвольных функций $\varphi_1(\vec{k})$, $\varphi_2(\vec{k})$ ввести произвольные функции $\varphi^{(+)}(k) = \varphi_1(-\vec{k})\sqrt{2k_0}$, $\varphi^{(-)}(k) = \varphi_2(\vec{k})\sqrt{2k_0}$.

Множитель $\sqrt{2k_0}$ вынесен из функций φ_1, φ_2 для упрощения некоторых формул в дальнейшем. Для краткости записи обозначим

$$1/(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k_0} = \eta(k) \quad (64)$$

(«нормировочный множитель»). В результате решение уравнения (54) запишется в виде

$$u(x) = u^{(+)}(x) + u^{(-)}(x), \quad (65)$$

$$u^{(\pm)}(x) = \int_{R_3} \eta(k) \varphi^{(\pm)}(k) e^{\pm i k_n x^n} d\vec{k}. \quad (66)$$

$u^{(+)}(x), u^{(-)}(x)$ называются соответственно положительно- и отрицательно-частотными составляющими функции $u(x)$.

Аналогично решается уравнение (55):

$${}^*u(x) = {}^*u^{(+)}(x) + {}^*u^{(-)}(x), \quad (67)$$

$${}^*u^{(\pm)}(x) = \int_{R_3} \eta(k) \varphi^{(\pm)}(k) e^{\pm i k_n x^n} d\vec{k}. \quad (68)$$

Отметим, что эти формулы для ${}^*u(x)$ получены не путем применения сопряжения к формулам (65), (66), а путем замены в (65), (66) функций u, φ на функции ${}^*u, {}^*\varphi$. Поэтому ниоткуда не следует, что, например, ${}^*u^{(+)}(x) — это $(u^{(+)})^*$; сейчас мы увидим, что это действительно не так.$

Правила вычисления сопряжений $(u^{(\pm)})^*, (\varphi^{(\pm)})^*$

Применим комплексное сопряжение к (65), (66):

$${}^*u(x) = (u^{(+)}(x))^* + (u^{(-)}(x))^*, \quad (69)$$

$$(u^{(\pm)}(x))^* = \int_{R_3} \eta(k) (\varphi^{(\pm)}(k))^* e^{\mp i k_n x^n} d\vec{k}. \quad (70)$$

Обратите внимание на изменение знака в показателе экспоненты. Сравнив (69), (70) с (67), (68), находим, что $(\varphi^{(+)}(k))^* = {}^*\varphi^{(-)}(k)$, $(\varphi^{(-)}(k))^* = {}^*\varphi^{(+)}(k)$, а тогда и $(u^{(\pm)}(x))^* = {}^*u^{(\mp)}(x)$, т.е. при взятии сопряжения изменяется частотность.

11.2 Гамильтониан и заряд поля

В общую формулу (36) для \mathcal{H} подставляем $u_1 = u$, $u_2 = u^*$: $\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}^*} \dot{u}^* - \mathcal{L}$. Подставляем сюда \mathcal{L} согласно (60). Для вычисления производных от \mathcal{L} по \dot{u} , \dot{u}^* учтем, что $\partial_0 u = \partial^0 u = \dot{u}$, и запишем \mathcal{L} в виде $\mathcal{L} = \dot{u}^* \dot{u} + \sum_{\alpha=1}^3 (\partial_\alpha u^*)(\partial^\alpha u) - m^2 u^* u$. Напомним, что при вычислении частных производных производные $\partial_k u$ при разных k считаются независимыми и что $\partial_k u$ и $\partial_k u^*$ также независимы. Поэтому $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = \dot{u}^*$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}^*} = \dot{u}$, и $\mathcal{H} = 2\dot{u}^* \dot{u} - \dot{u}^* \dot{u} - \sum_{\alpha=1}^3 (\partial_\alpha u^*)(\partial^\alpha u) + m^2 u^* u$, или, с учетом $\partial^\alpha u = -\partial_\alpha u$,

$$\mathcal{H} = \sum_{n=0}^3 (\partial_n u^*)(\partial_n u) + m^2 u^* u. \quad (71)$$

Обсудим ход вычислений полной энергии поля $H = \int_{R_3} \mathcal{H} d\vec{r}$. Подставляем сюда (71) и (65)-(70); при этом возникают интегралы типа

$$\int_{R_3} d\vec{r} \int_{R_3} d\vec{k} \int_{R_3} d\vec{k}' f(\vec{k}, \vec{k}') e^{-i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{r}}.$$

Из всех интегралов можно вычислить только интеграл по $d\vec{r}$, так как остальные интегралы содержат неизвестные функции. Для вычисления используем известную формулу

$$\int_{R_3} \exp[\pm i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{r}] d\vec{r} = (2\pi)^3 \delta_3(\vec{k} - \vec{k}').$$

Теперь благодаря дельта-функции появляется возможность вычислить один из оставшихся интегралов:

$$\int_{R_3} f(\vec{k}, \vec{k}') \delta_3(\vec{k}' - \vec{k}) d\vec{k}' = f(\vec{k}, \vec{k}).$$

Окончательная формула для энергии имеет вид

$$H = \int_{R_3} \left(\varphi^{(+)}(k) \varphi^{(-)}(k) + \varphi^{(+)}(k) \varphi^{(-)*}(k) \right) k^0 d\vec{k}. \quad (72)$$

Энергия свободного поля должна быть положительной. Проверим, выполняется ли это требование. Так как $\varphi^{*(+)} = (\varphi^{(-)})^*$, то $\varphi^{*(+)}\varphi^{(-)} = |\varphi^{(-)}|^2$; аналогично, $\varphi^{(+)}\varphi^{*(-)} = |\varphi^{(+)}|^2$. Учитывая также, что $k^0 > 0$, видим, что $H > 0$. Тем самым мы, в частности, проверили, что в §10 правильно выбрали знак лагранжиана.

Аналогично находим 4-импульс поля:

$$P^n = \int_{R_3} \left(\varphi^{*(+)}(k)\varphi^{(-)}(k) + \varphi^{(+)}(k)\varphi^{*(-)}(k) \right) k^n d\vec{k}. \quad (73)$$

Выражение в скобках, очевидно, равно плотности числа частиц в расчете на единичный объем в пространстве импульсов.

Аналогично выводится формула для заряда поля:

$$Q = z \int_{R_3} \left(\varphi^{*(+)}(k)\varphi^{(-)}(k) - \varphi^{(+)}(k)\varphi^{*(-)}(k) \right) d\vec{k}. \quad (74)$$

Пусть $z > 0$. Тогда слагаемые в скобках равны соответственно плотности числа положительных и отрицательных частиц в единице объема пространства импульсов. Это лишний раз подтверждает, что Q — это заряд поля, а z — элементарный заряд.

В дальнейшем нам также понадобятся заряд внутри некоторой области \mathcal{V}

$$Q = iz \int_{\mathcal{V}} (\dot{u}(x)u^*(x) - \dot{u}^*(x)u(x)) dV \quad (75)$$

и плотность 4-тока

$$j_n(x) = iz \left(\dot{u}(x)\partial_n u(x) - u(x)\partial_n \dot{u}(x) \right). \quad (76)$$

12 Гамильтониан свободного электромагнитного поля

Четырехмерный потенциал свободного электромагнитного поля подчиняется уравнению Д'Аламбера $\partial_\kappa \partial^k A_n(x) = 0$; кроме того, на него накладывается условие Лоренца $\partial_n A^n(x) = 0$. Уравнение

Д'Аламбера решается тем же методом, что и уравнение Клейна—Гордона, и в результате получается

$$A_n(x) = A_n^{(+)}(x) + A_n^{(-)}(x), \quad A_n^{(\pm)}(x) = \int_{R_3} \eta(k) B_n^{(\pm)}(k) e^{\pm i k_1 x^1} d\vec{k}, \quad (77)$$

где $k_0 = |\vec{k}|$, а $B_n^{(+)}(k)$, $B_n^{(-)}(k)$ — произвольные 4-векторы.

Потенциал $A_n(x)$ должен быть действительным, так как фотоны не имеют электрического заряда. Однако положительно- и отрицательно-частотные составляющие $A_n^{(\pm)}$ могут быть комплексными. Применим к (77) комплексное сопряжение и, потребовав $A_n^* = A_n$, получим правила взятия комплексного сопряжения частотных составляющих: $(A_n^{(\pm)}(x))^* = A_n^{(\mp)}(x)$, $(B_n^{(\pm)}(k))^* = B_n^{(\mp)}(k)$.

Подставим $\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_m} \dot{A}_m - \mathcal{L}$, $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_k A_n(x)) \partial^k A^n(x)$ и (77) в $H = \int_{R_3} \mathcal{H} dV$, и в результате вычислений, аналогичных тем, которые обсуждались в предыдущем параграфе, получим

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 (\partial_k A_m) (\partial_k A^m),$$

$$\begin{aligned} H &= - \int_{R_3} B_m^{(+)}(k) B^{(-)m}(k) k^0 d\vec{k} = \\ &= \int_{R_3} \left(\vec{B}^{(+)}(k) \vec{B}^{(-)}(k) - B_0^{(+)}(k) B^{(-)0}(k) \right) k^0 d\vec{k}. \quad (78) \end{aligned}$$

Выражение в скобках можно записать в виде разности $|\vec{B}^{(+)}|^2 - |B^{(+)\ 0}|^2$ двух положительных величин, поэтому положительность H пока не гарантирована.

Компоненты 4-потенциала $A_n(x)$ не являются независимыми: они связаны условием Лоренца $\partial_n A^n(x) = 0$. Подставив сюда решение (77), получим связь компонент импульсных потенциалов $B^{(\pm)n}(k)$: $k_n B^{(\pm)n}(k) = 0$, или $k^0 B^{(\pm)0} = \vec{k} \vec{B}^{(\pm)}$. С учетом этого вместо (78) получим гамильтониан

$$H = \int_{R_3} \left(\vec{B}^{(+)}(k) \vec{B}^{(-)}(k) - (\vec{k} \vec{B}^{(+)}(k)) (\vec{k} \vec{B}^{(-)}(k)) / (k^0)^2 \right) k^0 d\vec{k}. \quad (79)$$

Его положительность тоже не гарантирована; отрицательные члены в общем случае не уничтожаются, потому что первое слагаемое $\vec{B}^{(+)}(k)\vec{B}^{(-)}(k) = \sum_{\alpha=1}^3 B_{\alpha}^{(+)}B_{\alpha}^{(-)}$ содержит только «диагональные» члены, а произведение двух скалярных произведений

$$(\vec{k}\vec{B}^{(+)})(\vec{k}\vec{B}^{(-)}) = \sum_{\alpha=1}^3 k_{\alpha}B_{\alpha}^{(+)} \sum_{\beta=1}^3 k_{\beta}B_{\beta}^{(-)}$$

содержит также недиагональные члены $B_{\alpha}^{(+)}B_{\beta}^{(-)}$, в которых $\beta \neq \alpha$.

Эту проблему можно решить с помощью следующего приема. Векторы $\vec{B}^{(\pm)}(k)$ разложим по некоторой тройке взаимно перпендикулярных единичных векторов $\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2, 3$: $\vec{B}^{(\pm)} = \sum_{\lambda=1}^3 a_{\lambda}^{(\pm)}(k)\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k)$. Роль полевых функций теперь играют коэффициенты разложения $a_{\lambda}^{(\pm)}(k)$. Тройку векторов нужно расположить так, чтобы каждое из двух скалярных произведений $\vec{k}\vec{B}^{(\pm)}$ содержало не три, а только одно слагаемое. Для этого один из векторов тройки, например, $\vec{\varepsilon}^{(3)}$, направим вдоль вектора \vec{k} . Так как в ходе интегрирования направления $\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}$ непрерывно изменяются, такая тройка векторов называется локальным репером. Итак, орты локального репера определяем следующим образом: $|\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}| = 1$; $\vec{k}\vec{\varepsilon}^{(1)} = \vec{k}\vec{\varepsilon}^{(2)} = 0$; $\vec{k}\vec{\varepsilon}^{(3)} = |\vec{k}|$. Тогда $\vec{k}\vec{B}^{(\pm)} = |\vec{k}|a_3^{(\pm)}$, $\vec{B}^{(+)}\vec{B}^{(-)} = \sum_{\lambda=1}^3 a_{\lambda}^{(+)}a_{\lambda}^{(-)}$. С учетом $k_0 = |\vec{k}|$ находим

$$H = \int_{R_3} \sum_{\lambda=1}^2 a_{\lambda}^{(+)}(k)a_{\lambda}^{(-)}(k)k^0 d\vec{k}. \quad (80)$$

Из правила взятия комплексного сопряжения для функций $B_n^{(\pm)}$ следует аналогичное правило для $a_{\lambda}^{(\pm)}$: $(a_{\lambda}^{(\pm)})^* = a_{\lambda}^{(\mp)}$. Отсюда следует неотрицательность H .

Тот факт, что гамильтониан (а также и другие наблюдаемые величины) содержит только две компоненты a_1, a_2 4-вектора a_n , отражает свойство поперечности электромагнитных волн.

Входящие в (77) функции $B_n^{(\pm)}$, в том числе $B_0^{(\pm)}$, тоже нужно

выразить через $a_\lambda^{(\pm)}$:

$$B_n^{(\pm)}(k) = \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_n^{(\lambda)}(k) a_\lambda^{(\pm)}(k) = \text{знак суммы опускаем} = \varepsilon_n^{(\lambda)}(k) a_\lambda^{(\pm)}(k),$$

где

$$\varepsilon_0^{(\alpha)} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad \varepsilon_n^{(0)} = \delta_n^0. \quad (81)$$

В результате $A_n^{(\pm)}(x)$ запишутся в виде

$$A_n^{(\pm)}(x) = \int_{R_3} \eta(k) \varepsilon_n^{(\lambda)}(k) a_\lambda^{(\pm)}(k) e^{\pm i k_l x^l} d\vec{k}. \quad (82)$$

Из (80) следует, что $a_\lambda^{(+)}(k) a_\lambda^{(-)}(k)$ — это плотность числа фотонов с линейной поляризацией λ в расчете на единичный объем пространства импульсов.

Известно, что с помощью сложения линейно поляризованных волн можно получить волну с круговой поляризацией. Для этого нужно фазу колебаний вдоль $\vec{\varepsilon}^{(2)}$ сдвинуть относительно фазы колебаний вдоль $\vec{\varepsilon}^{(1)}$ на $\pm\pi/2$. Это можно сделать путем умножения $a_2^{(\pm)}$ на $\pm i = e^{\pm i\pi/2}$. В связи с этим введем функции

$$b_1^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{(+)} - i a_2^{(+)}), \quad b_2^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{(+)} + i a_2^{(+)}).$$

Поскольку нужно сохранить структуру и явную неотрицательность H , требуем $(b_\alpha^{(\pm)})^* = b_\alpha^{(\mp)}$. Тогда

$$b_1^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{(-)} + i a_2^{(-)}), \quad b_2^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{(-)} - i a_2^{(-)}).$$

Выразим также $a_\lambda^{(\pm)}$ через $b_\alpha^{(\pm)}$:

$$a_1^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_1^{(\pm)} + b_2^{(\pm)}), \quad a_2^{(\pm)} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}(b_1^{(\pm)} - b_2^{(\pm)}).$$

Из этих формул следует $a_1^{(+)} a_1^{(-)} + a_2^{(+)} a_2^{(-)} = b_1^{(+)} b_1^{(-)} + b_2^{(+)} b_2^{(-)}$, и тогда

$$H = \int_{R_3} \sum_{\alpha=1}^2 b_\alpha^{(+)}(k) b_\alpha^{(-)}(k) k^0 d\vec{k}. \quad (83)$$

Произведение $b_\alpha^{(+)}b_\alpha^{(-)} \in \mathbb{R} \geq 0$ имеет смысл плотности числа фотонов с круговой поляризацией α в расчете на единичный объем пространства импульсов.

Собственный момент импульса

Найдем собственный момент импульса электромагнитного поля. Подставив (61) с учетом $u_i = A_i$ в (44), при $\mathcal{V} = R_3$ получим

$$M_{\alpha\beta}^{(c)} = \int_{R_3} (\dot{A}_\alpha A_\beta - \dot{A}_\beta A_\alpha) dV. \quad (84)$$

Далее рассматриваем вектор момента импульса $\vec{M}^{(c)}$, проекции которого, согласно (42), равны $M_x^{(c)} = -M_{23}^{(c)}$, $M_y^{(c)} = M_{13}^{(c)}$, $M_z^{(c)} = -M_{12}^{(c)}$. Подстановка (77) в (84) приводит ([2], стр. 46) к

$$\vec{M}^{(c)} = i \int_{R_3} [\vec{B}^{(+)}(k) \times \vec{B}^{(-)}(k)] d\vec{k}. \quad (85)$$

Рассмотрим импульсную плотность собственного момента импульса $\vec{M}^{(c)} = i[\vec{B}^{(+)}(k) \times \vec{B}^{(-)}(k)]$. Подставим сюда разложения векторов $\vec{B}^{(\pm)}$ и найдем компоненту вектора $\vec{M}^{(c)}$ в направлении волнового вектора \vec{k} , которую обозначим \vec{S} : $\vec{S} = i(a_1^{(+)}(k)a_2^{(-)}(k) - a_2^{(+)}(k)a_1^{(-)}(k))\vec{\varepsilon}^{(3)}$. Распишем $a_\lambda^{(\pm)}$ через $b_\alpha^{(\pm)}$ и получим

$$\vec{S} = (b_1^{(+)}(k)b_1^{(-)}(k) - b_2^{(+)}(k)b_2^{(-)}(k))\vec{\varepsilon}^{(3)}. \quad (86)$$

Теперь можно уточнить смысл операторов $b_\alpha^{(\pm)}$. Из (86) с учетом неотрицательности произведений $b_\alpha^{(+)}b_\alpha^{(-)}$ следует, что индексу $\alpha = 1$ соответствуют фотоны с направлением спина по направлению движения (т.е. фотоны с правовинтовой спиральностью), а индексу $\alpha = 2$ — фотоны с направлением спина против направления движения (левовинтовая спиральность).

13 Взаимодействие полей

Напомним, что для расчета сечений необходим оператор \hat{S} , который выражается через оператор $\hat{\mathcal{H}}_I$. Цель этого параграфа — получить формулу для гамильтониана взаимодействия \mathcal{H}_I . Запишем

искомую величину в виде $\mathcal{H}_I = \mathcal{H} - \mathcal{H}_{\text{св}}$. Здесь $\mathcal{H}_{\text{св}}$ — гамильтониан свободного комплексного скалярного поля, который мы нашли в §11. \mathcal{H} — гамильтониан комплексного скалярного поля, взаимодействующего с электромагнитным полем («полный гамильтониан», «гамильтониан системы»), который предстоит найти; он выражается через полный лагранжиан \mathcal{L} , который, в свою очередь, можно найти путем сравнения полного уравнения Клейна—Гордона—Фока с уравнением Лагранжа.

13.1 Уравнение Клейна—Гордона—Фока для комплексного скалярного поля, взаимодействующего с электромагнитным полем

Классическое (неквантованное) комплексное скалярное поле описывается теми же волновыми уравнениями, которыми в релятивистской квантовой механике описывается поведение отдельной бесспиновой заряженной частицы, а именно, уравнениями Клейна—Гордона—Фока. Выше эти уравнения (54), (55) были записаны для частного случая свободной частицы. Приведем схему учета взаимодействия частиц с электромагнитным полем.

Исходим из заготовки (51), которая справедлива как для свободных, так и взаимодействующих частиц, так как она основана на универсальном соотношении между кинетической энергией и импульсом. Очевидно, что при наличии электромагнитного поля $\hat{p}_n \neq i\partial_n$, так как волновое уравнение для частицы в поле должно отличаться от уравнения для свободной частицы. Однако оператор $i\partial_n$ имеет определенный смысл и в случае взаимодействующих частиц. Выясним смысл этого оператора. Для этого рассмотрим понятие обобщенного импульса. Выше было сказано, что энергия системы состоит из энергии свободных частиц и энергии их взаимодействия с электромагнитным полем: $H = H_{\text{св}} + H_I$. Из электродинамики известно, что при наличии поля наряду с обычным импульсом частицы $\vec{p} = \frac{\partial L_{\text{св}}}{\partial \vec{v}}$ вводится обобщенный импульс $\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$, где $L = L_{\text{св}} + L_I$ — функция Лагранжа системы. На основе энергий и импульсов вводятся четырехмерные импульсы: обычный $p = \{H_{\text{св}}/c, \vec{p}\}$ и обобщенный $P = \{H/c, \vec{P}\}$. Из электродинамики также известна энергия взаимодействия $H_I = z\varphi$, где z — заряд частицы, и связь обобщенного и обычного импульсов: $\vec{P} = \vec{p} + z\vec{A}$. Скалярный и векторный потенциалы образуют че-

тырехмерный потенциал $A = \{\varphi, \vec{A}\}$. Таким образом, компоненты обобщенного 4-импульса равны $P^n = p^n + zA^n$. Им соответствуют операторы $\hat{P}^n = \hat{p}^n + z\hat{A}^n$, причем в координатном представлении действие оператора \hat{A}^n заключается в умножении на функцию $A^n(x)$. При выяснении смысла оператора $i\partial_n$ наводящим соображением может служить уравнение Шредингера $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi$; так как \hat{H} — гамильтониан системы, то и $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = i\partial_0$ — оператор энергии H системы. Это позволяет предположить, что $i\partial_n$ — это оператор обобщенного импульса \hat{P}_n . Тогда оператор обычного 4-импульса равен $\hat{p}_n = i\partial_n - zA_n(x)$. Этот оператор и следует подставить в (51) для получения искомого уравнения для полевой функции $u(x)$. Применив к уравнению комплексное сопряжение, получим также уравнение для сопряженной функции $u^*(x)$. Для сокращения записи вводится оператор $D_n = \partial_n + izA_n$ — «удлиненная производная» («ковариантная производная»). В результате уравнения принимают вид

$$(D_k D^k + m^2)u(x) = 0, \quad (\overset{*}{D}_k \overset{*}{D}^k + m^2)u^*(x) = 0. \quad (87)$$

13.2 Полный лагранжиан \mathcal{L}

Построим лагранжиан \mathcal{L} комплексного скалярного поля, взаимодействующего с электромагнитным полем. \mathcal{L} строится так, чтобы он был действительным скаляром и чтобы при его подстановке в уравнения Лагранжа (56), (57) получились уравнения (87). Достаточно рассмотреть одну из двух пар уравнений, например, (57) и первое из (87). Исходя из найденного ранее лагранжиана (60) свободного комплексного скалярного поля предположим, что искомым лагранжиан имеет вид $\mathcal{L} = (D_n^* u^*)(D^n u) - m^2 u^*(x)u(x) = (\partial_n u^* - izA_n u^*)(D^n u) - m^2 u^* u$. Вычисляем частные производные: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} = -m^2 u - izA_n D^n u$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{*}{\partial} u} = D^k u$, и после подстановки в (57) получим $(D_k D^k + m^2)u = 0$, что говорит о том, что \mathcal{L} угадан правильно. Тем самым найден и лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_I = \mathcal{L} - \mathcal{L}_{\text{св.}}$:

$$\mathcal{L}_I = iz(u(x)\partial_n u^*(x) - u^*(x)\partial_n u(x))A^n(x) + z^2 A_n(x)A^n(x)u^*(x)u(x). \quad (88)$$

13.3 Гамильтониан взаимодействия \mathcal{H}_I

Полный гамильтониан определяется формулой (36)

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}^*} \dot{u}^* - \mathcal{L},$$

в которой \mathcal{L} — полный лагранжиан. Записав в этой формуле \mathcal{L} , \mathcal{H} в виде сумм $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{св.}} + \mathcal{L}_I$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{св.}} + \mathcal{H}_I$, найдем

$$\mathcal{H}_I = \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{u}^*} \dot{u}^* - \mathcal{L}_I.$$

Здесь мы опустим один из этапов вычислений. При расчете матричных элементов S -оператора входящее в \mathcal{H}_I «нековариантное слагаемое» $\frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{u}^*} \dot{u}^*$ уничтожается. В связи с этим сразу примем

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I.$$

В дальнейшем мы укажем ту величину, которая взаимно уничтожается с нековариантным слагаемым, и тоже ее отбросим. Подробные выкладки можно посмотреть, например, в [6], с. 341–343.

Таким образом, гамильтониан взаимодействия равен

$$\mathcal{H}_I = (\partial_n^* u)(\partial^n u) - (D_n^* u)(D^n u) = iz(u^* \partial_n u - u \partial_n^* u) A^n - z^2 u^* u A_n A^n. \quad (89)$$

13.4 Локальная калибровочная симметрия

Из электродинамики известно, что в случае свободного электромагнитного поля замена

$$A_n(x) \rightarrow A'_n(x) = A_n(x) - \partial_n f(x) \quad (90)$$

(«градиентное преобразование»; $f(x)$ — произвольная действительная функция) не приводит к изменению уравнений Максвелла и напряженностей поля и, тем самым, не приводит к изменению электромагнитного поля как физической системы. Установлено, что в случае системы, содержащей заряженные частицы, взаимодействующие с электромагнитным полем, поведение системы не изменится, если одновременно с преобразованием (90) сделать следующее

преобразование полевой функции заряженных частиц, называемое локальным калибровочным преобразованием:

$$u'(x) = e^{izf(x)}, \quad \overset{*}{u}'(x) = e^{-izf(x)}; \quad (91)$$

здесь $f(x)$ — та же функция, что и в (90).

В частности, при таком преобразовании лагранжиан \mathcal{L} π -мезонов в электромагнитном поле не изменяется. Убедимся в этом. $\mathcal{L}' = (D'_n \overset{*}{u}') (D'^n u') - m^2 \overset{*}{u}' u'$. То, что $\overset{*}{u}' u' = \overset{*}{u} u$ — очевидно. $D'^n u' = [\partial^n + izA^n - iz(\partial^n f)] e^{izf} u = e^{izf} (\partial^n u + izA^n u) = e^{izf} D^n u$. Аналогично $D'_n \overset{*}{u}' = e^{-izf} D_n^* \overset{*}{u}$. Таким образом, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$.

Локальная калибровочная симметрия оказалась универсальным свойством взаимодействующих полей, и ее можно взять за основу при построении полного лагранжиана \mathcal{L} . Проведем рассуждение в обратном порядке. Берем за основу лагранжиан свободного комплексного скалярного поля $\mathcal{L}_{\text{СВ}} = (\partial_n \overset{*}{u})(\partial^n u) - m^2 \overset{*}{u} u$. Допустим, у нас отсутствует понятие об электромагнитном поле, зато известно, что правильный лагранжиан \mathcal{L} остается неизменным при преобразовании (91), где $f(x)$ — произвольная действительная функция. Для слагаемого, содержащего m^2 , инвариантность очевидна, поэтому оно войдет и в формулу для \mathcal{L} . Рассмотрим $\partial^n u' = \partial^n (e^{izf} u) = e^{izf} (iz(\partial^n f)u + \partial^n u)$. Первое слагаемое в этой скобке — лишнее. В правильном лагранжиане это слагаемое должно чем-то компенсироваться. Это достигается путем «удлинения» производной $\partial^n \rightarrow D^n = \partial^n + \varphi^n(x)$, где $\varphi^n(x)$ — некоторый 4-вектор. Рассматриваем $D'^n u' = e^{izf} (iz(\partial^n f)u + \partial^n u + \varphi'^n u) =$ /требуем/= $e^{izf} D^n u = e^{izf} (\partial^n + \varphi^n) u$. Значит, (91) должно сопровождаться следующим преобразованием функции φ^n : $\varphi'^n(x) = \varphi^n(x) - iz\partial^n f(x)$. Теория в основном построена, осталось навести порядок. Слагаемое $iz\partial^n f$ — чисто мнимое. Чтобы функции φ'^n и φ^n были одного типа, φ^n тоже должна быть чисто мнимой. Чтобы это выразить явно, введем $A^n(x)$: $\varphi^n(x) = izA^n(x)$. В результате удлиненная производная запишется в виде $D^n = \partial^n + izA^n(x)$, причем калибровочное преобразование (91) должно сопровождаться градиентным преобразованием функции A^n : $A'^n(x) = A^n(x) - \partial^n f(x)$. Строим \mathcal{L} так, чтобы он был действительным скаляром: $\mathcal{L} = (D_n^* \overset{*}{u})(D^n u) - m^2 \overset{*}{u} u$.

В \mathcal{L} вошла новая функция $A_n(x)$; далее выясняется, что это — полевая функция поля, осуществляющего взаимодействие заряжен-

ных частиц друг с другом. В данном случае это — потенциал электромагнитного поля. Таким же способом вводят новые поля, которые описывают другие взаимодействия: слабое, ядерное. Такие поля называются компенсирующими, или калибровочными, а кванты этих полей — калибровочными бозонами.

14 Квантовое описание полей

14.1 Эрмитово сопряжение

Оператор \hat{L}^+ называется эрмитово-сопряженным по отношению к оператору \hat{L} , если при любых векторах состояния Φ, Ψ справедливо $(\Phi^* \hat{L} \Psi) = (\Psi^* \hat{L} \Phi)^*$. Из этой формулы следуют свойства эрмитова сопряжения: $(\hat{L}^+)^+ = \hat{L}$; $(\hat{L} \hat{M})^+ = \hat{M}^+ \hat{L}^+$; если f — число или функция (не оператор), то $f^+ = f^*$.

Оператор \hat{L} называется эрмитовым, если $\hat{L}^+ = \hat{L}$. Собственные значения эрмитова оператора действительны, т.е. если $\hat{L} \Psi = L \Psi$, то $L^* = L$.

Оператор \hat{U} называется унитарным, если его эрмитово сопряжение равно обратному оператору: $\hat{U}^+ = \hat{U}^{-1}$, т.е. если $\hat{U}^+ \hat{U} = 1$.

На основе унитарных операторов вводятся унитарные преобразования: $\hat{L}' = \hat{U}^+ \hat{L} \hat{U}$, $\Phi' = \hat{U}^+ \Phi$; $\hat{L} = \hat{U} \hat{L}' \hat{U}^+$, $\Phi = \hat{U} \Phi'$. Если оператор \hat{L} эрмитов, то \hat{L}' — тоже; у \hat{L} и \hat{L}' один и тот же набор собственных значений. В результате унитарного преобразования происходит переход к другому представлению описания той же физической системы.

14.2 Переход к квантовому описанию полей

Согласно общим правилам квантовой механики, наблюдаемым величинам $P^n, \hat{M}, Q, \mathcal{H}_I$ ставятся в соответствие эрмитовы операторы $\hat{P}^n, \hat{M}, \hat{Q}, \hat{\mathcal{H}}_I$. Эти операторы вводятся на основе формул типа (73), поэтому операторами (вообще говоря, неэрмитовыми) становятся и полевые функции. Координатные и импульсные полевые

операторы связаны между собой теми же формулами типа (66), что и соответствующие полевые функции:

$$\hat{u}^{(\pm)}(x) = \int_{R_3} \eta(k) \hat{\varphi}^{(\pm)}(k) e^{\pm i k_i x^i} d\vec{k}. \quad (92)$$

Чистые квантовые состояния систем описываются с помощью векторов состояния Φ , которые формально были введены в §1 и в п. 14.1. Ниже мы увидим, что в результате действия полевых операторов на Φ получаются новые векторы состояния. Множество всех Φ образует *пространство векторов состояния*. Функции, не входящие в это пространство, такие, как $e^{i k_i x^i}$, $\varepsilon_n^{(\lambda)}(k)$, $\eta(k)$, $\delta_3(\vec{k} - \vec{k}')$ и т.д., будем называть *обычными функциями* (см., например, [10], стр. 292). В пространстве векторов состояния определено скалярное произведение $(\Psi \Phi)^*$; термин «скалярное» в данном случае означает, что результатом является обычная функция. Полевые операторы, а также выражающиеся через них операторы наблюдаемых величин, например, P^n , действуют только в пространстве векторов состояния. Обычные функции можно выносить из-под знака этих операторов, а также из-под знака скалярного произведения. Отметим, что полевые операторы могут зависеть от параметров x , k , λ , в связи с чем операторы могут стоять также под знаком «обычных», т.е. отличных от скалярного произведения математических операций, например, под знаком интеграла, как $\hat{\varphi}^{(\pm)}(k)$ в формуле (92) или $\hat{\mathcal{H}}_I(x_i)$ в (20). При вычислении матричных элементов (4) знак скалярного произведения и векторы состояний Φ_f^* , Φ_i вносятся под знаки интегралов формулы (20).

Чтобы операторы наблюдаемых величин были эрмитовыми, полевые операторы вводятся согласно следующим правилам.

1. $u \rightarrow \hat{u}$, $u^* \rightarrow \hat{u}^\dagger$, т.е. комплексно-сопряженные функции заменяются эрмитово-сопряженными операторами.
2. При переходе к операторам следует подобрать порядок сомножителей. Рассмотрим пример. Пусть a , b — функции, а $q = \hat{a}^* b + a \hat{b}^*$ — некоторая действительная функция. Если просто заменить функции операторами, то получится неэрмитов оператор $\hat{a} \hat{b} + \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger$. На

основе функции q можно построить два эрмитовых оператора: $\hat{q}_1 = \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}$, $\hat{q}_2 = \hat{b}\hat{a} + \hat{a}\hat{b}$. Возникшей неоднозначностью в дальнейшем можно будет распорядиться в ходе построения теории.

В качестве примера приведем оператор \hat{P}^n , полученный на основе (73) и указанных правил:

$$\hat{P}^n = \int_{R_3} \left(\hat{\varphi}^{(+)}(k)\hat{\varphi}^{(-)}(k) + \hat{\varphi}^{(+)}(k)\hat{\varphi}^{(-)}(k) \right) k^n d\vec{k}. \quad (93)$$

14.3 Коммутатор полевого оператора и некоторого эрмитова оператора

В параграфе «Теорема Нётер» были рассмотрены преобразования (27), которые не изменяют поведения системы. Соответствующее преобразование полевых операторов тоже не должно приводить к изменению поведения системы. Значит, это преобразование можно представить как некоторое унитарное преобразование. Точнее, так как унитарное преобразование не затрагивает координаты, следует рассмотреть не $\delta\hat{u}_j = \hat{\psi}_{jn}\delta\omega^n$, а

$$\bar{\delta}\hat{u}_j = (\hat{\psi}_{jn} - \frac{\partial\hat{u}_j}{\partial x^k} X_n^k) \delta\omega^n. \quad (94)$$

Пусть \hat{U} — произвольный унитарный оператор: $\hat{U}\hat{U} = 1$. Унитарное преобразование имеет вид $\hat{u}'_j = \hat{U}\hat{u}_j\hat{U}$. Для сопоставления с (94) необходимо найти малое изменение оператора

$$\bar{\delta}\hat{u}_j = \text{линейная часть}(\hat{u}'_j - \hat{u}_j) = \text{линейная часть}(\hat{U}\hat{u}_j\hat{U} - \hat{u}_j). \quad (95)$$

Для этого введем малый оператор $\delta\hat{U} = \hat{U} - 1$. Нам понадобится следующее свойство этого оператора: $(\delta\hat{U})^+ = -\delta\hat{U}$, т.е. оператор $\delta\hat{U}$ — антиэрмитов. Для проверки этого свойства следует записать $\hat{U}\hat{U} = 1$ в виде $(1 + (\delta\hat{U})^+)(1 + \delta\hat{U}) = 1$, раскрыть скобки и отбросить квадратичное слагаемое.

Подставив $\hat{U} = 1 + \delta\hat{U}$, $\hat{U} = 1 - \delta\hat{U}$ в (95), получим $\bar{\delta}\hat{u}_j = [\hat{u}_j, \delta\hat{U}]$, где $[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}$ — коммутатор операторов \hat{a} , \hat{b} . На основе антиэрмитова оператора $\delta\hat{U}$ можно ввести эрмитов оператор

$\delta\hat{\mathcal{E}}: \delta\hat{U} = i\delta\hat{\mathcal{E}}$. Наконец, для приведения $\bar{\delta}\hat{u}_j$ к виду (94) запишем $\delta\hat{\mathcal{E}}$ в виде линейной комбинации независимых параметров преобразования: $\delta\hat{\mathcal{E}} = \hat{\mathcal{E}}_n\delta\omega^n$; тогда

$$\bar{\delta}\hat{u}_j = i[\hat{u}_j, \hat{\mathcal{E}}_n]\delta\omega^n. \quad (96)$$

Приравнивая (94) и (96), получим искомое коммутационное соотношение

$$i[\hat{u}_j, \hat{\mathcal{E}}_n] = \hat{\psi}_{jn} - \frac{\partial\hat{u}_j}{\partial x^k} X_n^k. \quad (97)$$

Далее выясняется, что $\hat{\mathcal{E}}_n$, $n = 1, 2, \dots, N$ — это операторы тех величин, которые сохраняются благодаря симметриям относительно преобразований, осуществляемых матрицами X_n^k , ψ_{jn} . Для проверки этого утверждения рассмотрим преобразование трансляции. Тогда $\hat{\psi}_{jn} = 0$, $X_n^k = \delta_n^k$. С учетом этого при $n = 0$ из (97) получим $i\frac{\partial\hat{u}_j}{\partial t} = [\hat{u}_j, \hat{\mathcal{E}}_0]$. Сравнив эту формулу с уравнением $i\hbar\frac{\partial\hat{L}}{\partial t} = [\hat{L}, \hat{H}]$ (при $\hbar = 1$), которое в представлении Гейзенберга описывает эволюцию произвольного оператора \hat{L} , находим, что $\hat{\mathcal{E}}_0 = \hat{H}$, т.е. $\hat{\mathcal{E}}_0$ — оператор энергии.

На основе формулы (97) выводятся все свойства операторов \hat{u}_j и другие коммутационные соотношения. Таким образом, эта формула лежит в основе квантового описания полей.

14.4 Квантование заряда

Пусть в формуле (97) $\hat{\mathcal{E}} = \hat{Q}$. Тогда, согласно §8, $\hat{u}_1 = \hat{u}$, $\hat{u}_2 = \hat{u}^\dagger$, $X_n^k = 0$, $\hat{\psi}_1 = iz\hat{u}$, $\hat{\psi}_2 = -iz\hat{u}^\dagger$, и $[\hat{u}, \hat{Q}] = z\hat{u}$, $[\hat{u}^\dagger, \hat{Q}] = -z\hat{u}^\dagger$. Подействуем операторами первого из этих операторных равенств на вектор состояния системы Φ :

$$[\hat{u}, \hat{Q}]\Phi = z\hat{u}\Phi. \quad (98)$$

Пусть заряд системы равен Q , т.е.

$$\hat{Q}\Phi = Q\Phi. \quad (99)$$

Распишем коммутатор в (98): $\hat{u}\hat{Q}\Phi - \hat{Q}\hat{u}\Phi = z\hat{u}\Phi$. С учетом (99) получим $\hat{Q}\hat{u}\Phi = (Q - z)\hat{u}\Phi$; это означает, что $\hat{u}\Phi$ — вектор состояния системы с зарядом $Q - z$. Тогда \hat{u} — оператор уменьшения

заряда (считаем, что $z > 0$). То же самое справедливо для операторов $\hat{u}^{(\pm)}(x)$, $\hat{\varphi}^{(\pm)}(k)$. Аналогично получаем, что \hat{u}^+ (а также $\hat{u}^{(\pm)}(x)$, $\hat{\varphi}^{(\pm)}(k)$) — оператор увеличения заряда. Тем самым показано, что z — это элементарный заряд; полный заряд системы всегда кратен z .

14.5 Операторы рождения и уничтожения частиц

Выясним смысл положительно- и отрицательно-частотных составляющих полевого оператора. Это проще сделать на примере импульсных операторов $\hat{\rho}_j^{(\pm)}$.

Пусть $\hat{\Theta}_n = \hat{P}_n$; в этом случае (97) принимает вид $[\hat{u}_j, \hat{P}_n] = i \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x^n}$. Расписав $\hat{u}_j = \hat{u}_j^{(+)} + \hat{u}_j^{(-)}$,

$$\hat{u}_j^{(\pm)}(x) = \int_{R_3} \eta(k) \hat{\varphi}_j^{(\pm)}(k) e^{\pm i k_l x^l} d\vec{k},$$

с учетом $\frac{\partial}{\partial x^n} e^{\pm i k_l x^l} = \pm i k_n e^{\pm i k_l x^l}$ получим

$$[\hat{\varphi}_j^{(\pm)}(k), \hat{P}_n] = \mp k_n \hat{\varphi}_j^{(\pm)}(k). \quad (100)$$

Пусть Φ — состояние с 4-импульсом P : $\hat{P}_n \Phi = P_n \Phi$. Действуем на Φ операторами (100), расписываем коммутатор и получаем $\hat{P}_n \hat{\varphi}_j^{(+)}(k) \Phi = (P_n + k_n) \hat{\varphi}_j^{(+)}(k) \Phi$. Это означает, что $\hat{\varphi}_j^{(+)}(k) \Phi$ — состояние с 4-импульсом $P_n + k_n$. Это трактуется как рождение частицы с 4-импульсом k . Аналогично, $\hat{\varphi}_j^{(-)}(k)$ описывает уничтожение частицы с 4-импульсом k .

Отметим, что $\hat{\varphi}_j^{(\pm)}(k)$ не могут быть интерпретированы как операторы изменения энергий и импульсов уже имеющихся частиц, поскольку в состав k_0 входит энергия покоя.

Объединим результаты этого и предыдущего пунктов и обсудим смысл операторов $\hat{\varphi}_1^{(\pm)} = \hat{\varphi}^{(\pm)}$, $\hat{\varphi}_2^{(\pm)} = \hat{\varphi}^{\pm}$:

$\hat{\varphi}^{(+)}$ — рождение π^+ -мезона, $\hat{\varphi}^{(-)}$ — рождение π^- -мезона,
 $\hat{\varphi}^+$ — уничтожение π^- -мезона, $\hat{\varphi}^-$ — уничтожение π^+ -мезона.

Аналогично, $\hat{a}_\lambda^{(+)}(k)$ — оператор рождения линейно поляризованного фотона; $\hat{b}_1^{(+)}(k)$, $\hat{b}_2^{(+)}(k)$ — операторы рождения фотона соответственно с правовинтовой и левовинтовой спиральностью.

14.6 Векторы начального и конечного состояний системы

Теперь мы, наконец, можем решить задачу отыскания Φ_i , Φ_f , поставленную в конце §1. Для этого вводят новый объект под названием «вакуум», вектор состояния которого Φ_0 , по определению вакуума, удовлетворяет соотношениям

- 1) $\hat{v}^{(-)}\Phi_0 = 0$, где $\hat{v}^{(-)}$ — любой оператор уничтожения;
- 2) $\hat{\Phi}_0^* \hat{w}^{(+)} = 0$, $\hat{w}^{(+)}$ — любой оператор рождения;
- 3) $(\hat{\Phi}_0 \Phi_0) = 1$.

Пояснение соотношения 2): по определению эрмитова сопряжения, $S = (\hat{\Phi}_0^* \hat{w}^{(+)} \Phi_0) = (\hat{\Phi}_0^* (\hat{w}^{(+)} \Phi_0)^+)^*$. Но $(\hat{w}^{(+)} \Phi_0)^+ = \hat{w}^{(-)} = \hat{v}^{(-)}$, поэтому $S = (\hat{\Phi}_0^* \hat{v}^{(-)} \Phi_0)^* = 0$. Таким образом, при записи соотношения 2 (впрочем, как и 1) подразумевается, что все рассматриваемые векторы состояния и операторы входят в состав скалярного произведения.

Пусть фотон с 4-импульсом k и состоянием поляризации λ сталкивается с π^+ -мезоном, 4-импульс которого p ; параметры этих частиц после рассеяния k' , λ' и p' . Векторы начального и конечного состояний системы имеют вид

$$\Phi_i = \hat{a}_\lambda^{(+)}(k) \hat{\varphi}^{(+)}(p) \Phi_0, \quad \Phi_f = \hat{a}_{\lambda'}^{(+)}(k') \hat{\varphi}^{(+)}(p') \Phi_0.$$

Найдем сопряжение вектора конечного состояния Φ_f^* . Используя опять определение эрмитова сопряжения, запишем

$$(\hat{\Phi} \hat{L} \Psi) = (\hat{\Psi} \hat{L} \Phi)^* = (\Psi (\hat{L} \Phi)^*) = /(\Psi \Phi) = (\Phi \Psi) / = ((\hat{L} \Phi)^* \Psi);$$

сравнив с $(\hat{\Phi} \hat{L} \Psi)$, получаем, что внутри скалярного произведения

$$(\hat{L} \Phi)^* = \hat{\Phi} \hat{L}, \quad (101)$$

т.е. на сопряженный вектор состояния Φ^* действуют операторы, которые стоят справа. С помощью правила (101) находим

$$\Phi_f^* = \Phi_0^* \hat{\varphi}^{(-)}(p') \hat{a}_{\lambda'}^{(-)}(k').$$

Для будущих целей запишем также один из одночастичных векторов — например, вектор состояния π^+ -мезона с 4-импульсом p : $\Phi_p = \hat{\varphi}^{(+)}(p) \Phi_0$. Наряду с этим вектором, нам понадобится его координатное представление (волновая функция) $\psi_p(x)$. Из квантовой механики известно, что $\psi_p(x) = (\Phi_x^* \Phi_p)$, где $\Phi_x = \hat{u}^{(+)}(x) \Phi_0$. Так как $\Phi_x^* = \Phi_0^* \hat{u}^{(-)}(x)$, то

$$\psi_p(x) = (\Phi_0^* \hat{u}^{(-)}(x) \hat{\varphi}^{(+)}(p) \Phi_0). \quad (102)$$

14.7 Коммутаторы полевых операторов заряженных бозонов

Мы нашли коммутаторы, в которых один из операторов — оператор поля, а другой — оператор той или иной наблюдаемой величины. На основе этих коммутаторов можно вывести коммутаторы, которые содержат только полевые операторы. Такие коммутаторы нужны, в частности, для расчета матричных элементов S -оператора. Множество коммутаторов такого типа, которые приводят к непротиворечивой теории, сразу ограничивают с помощью следующей аксиомы, которая является неотъемлемой составной частью определения бозонных полевых операторов.

Аксиома. *Коммутатор двух полевых операторов бозонов — это число или обычная функция.*

Уже на этом этапе можно обсудить способ применения таких коммутаторов. Рассмотрим скалярное произведение $I = (\Phi_0^* \hat{v}^{(-)} \hat{w}^{(+)} \Phi_0)$, где $\hat{v}^{(-)}$ — некоторый полевой оператор уничтожения, а $\hat{w}^{(+)}$ — некоторый полевой оператор рождения. Согласно аксиоме, $[\hat{v}^{(-)}, \hat{w}^{(+)}] = c$ — обычная функция. Расписав коммутатор, запишем это соотношение в виде $\hat{v}^{(-)} \hat{w}^{(+)} = \hat{w}^{(+)} \hat{v}^{(-)} + c$; тогда скалярное произведение запишется в виде $I = I_1 + I_2$, где $I_1 = (\Phi_0^* \hat{w}^{(+)} \hat{v}^{(-)} \Phi_0)$, $I_2 = (\Phi_0^* c \Phi_0)$. Очевидно, $I_1 = 0$. В слагаемом же I_2

обычная функция c выносится из скалярного произведения, что с учетом нормировки $(\Phi_0^* \Phi_0) = 1$ приводит к $I_2 = c$.

Если исходное скалярное произведение I , кроме $\hat{v}^{(-)}$ и $\hat{w}^{(+)}$, содержит еще и другие операторы, то слагаемое, содержащее произведение операторов $\hat{w}^{(+)} \hat{v}^{(-)}$, может и не занулиться. Но в любом случае выражение, в котором оператор уничтожения расположен справа от оператора рождения, является более простым, потому что оператор уничтожения приблизился к вакууму Φ_0 , а оператор рождения — к сопряженному вакууму Φ_0^* . В результате аналогичных перестановок операторов $\hat{v}^{(-)}$, $\hat{w}^{(+)}$ с другими операторами (возможно, с появлением ненулевых слагаемых в виде функций типа c) появится выражение $\hat{v}^{(-)} \Phi_0$ или $\Phi_0^* \hat{w}^{(+)}$, которое приведет к занулению соответствующего слагаемого. В результате скалярное произведение уже не будет содержать операторов $\hat{v}^{(-)}$, $\hat{w}^{(+)}$. Проведя эту процедуру для всех полевых операторов, найдем скалярное произведение в виде суммы обычных функций.

Коммутаторы, равные нулю

а) *Операторы одинаковой частотности коммутируют.* Примеры:

$$[\hat{\varphi}^{(+)}(k), \hat{\varphi}^{(+)}(k')] = 0; [\hat{\varphi}^{(-)}(k), \hat{\varphi}^{(-)}(k')] = 0; [\hat{u}^{(+)}(x), \hat{u}^{(+)}(y)] = 0.$$

Доказательство. Пусть Φ — состояние с 4-импульсом P , т.е. $\hat{P}_n \Phi = P_n \Phi$. Тогда, по установленному выше смыслу положительно-частотных операторов, $\hat{\varphi}^{(+)}(k) \hat{\varphi}^{(+)}(k') \Phi$ и $\hat{\varphi}^{(+)}(k') \hat{\varphi}^{(+)}(k) \Phi$ — состояния с 4-импульсом $P + k + k'$, т.е.

$$\begin{aligned} \hat{P}_n \hat{\varphi}^{(+)}(k) \hat{\varphi}^{(+)}(k') \Phi &= (P_n + k_n + k'_n) \hat{\varphi}^{(+)}(k) \hat{\varphi}^{(+)}(k') \Phi, \\ \hat{P}_n \hat{\varphi}^{(+)}(k') \hat{\varphi}^{(+)}(k) \Phi &= (P_n + k_n + k'_n) \hat{\varphi}^{(+)}(k') \hat{\varphi}^{(+)}(k) \Phi. \end{aligned}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$\hat{P}_n [\hat{\varphi}^{(+)}(k), \hat{\varphi}^{(+)}(k')] \Phi = (P_n + k_n + k'_n) [\hat{\varphi}^{(+)}(k), \hat{\varphi}^{(+)}(k')] \Phi.$$

Согласно аксиоме, входящий в это равенство коммутатор является обычной функцией. Поэтому, во-первых, в левой части его можно вынести из-под знака оператора \hat{P}_n . Во-вторых, его можно сократить, если он отличен от тождественного нуля; в противном случае сокращать нельзя. (Пояснение: утверждение $1 \times 0 = 2 \times 0$ верное,

а $1 = 2$ — нет). Предположим, что коммутатор отличен от тождественного нуля. Тогда его можно сократить, и равенство принимает вид $\hat{P}_n \Phi = (P_n + k_n + k'_n) \Phi$, что противоречит тому, что $\hat{P}_n \Phi = P_n \Phi$. Значит, сокращать коммутатор было нельзя, что, в свою очередь, означает, что он тождественно равен нулю, что и требовалось доказать.

б) *Операторы заряженного поля с одинаковым сопряжением коммутируют.* Примеры:

$[\hat{\varphi}^{(+)}(k), \hat{\varphi}^{(-)}(k')] = 0$; $[\hat{\varphi}^{\dagger(+)}(k), \hat{\varphi}^{\dagger(-)}(k')] = 0$; $[\hat{u}^{(+)}(x), \hat{u}^{(-)}(x')] = 0$.
Доказательство. Пусть Φ — состояние с зарядом Q , т.е. $\hat{Q}\Phi = Q\Phi$. Тогда $\hat{\varphi}^{\dagger(+)}(k)\hat{\varphi}^{\dagger(-)}(k')\Phi$ и $\hat{\varphi}^{\dagger(+)}(k')\hat{\varphi}^{\dagger(-)}(k)\Phi$ — состояния с зарядом $Q + 2z$, т.е.

$$\begin{aligned}\hat{Q}\hat{\varphi}^{\dagger(+)}(k)\hat{\varphi}^{\dagger(-)}(k')\Phi &= (Q + 2z)\hat{\varphi}^{\dagger(+)}(k)\hat{\varphi}^{\dagger(-)}(k')\Phi, \\ \hat{Q}\hat{\varphi}^{\dagger(-)}(k')\hat{\varphi}^{\dagger(+)}(k)\Phi &= (Q + 2z)\hat{\varphi}^{\dagger(-)}(k')\hat{\varphi}^{\dagger(+)}(k)\Phi.\end{aligned}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$\hat{Q}[\hat{\varphi}^{\dagger(+)}(k), \hat{\varphi}^{\dagger(-)}(k')]\Phi = (Q + 2z)[\hat{\varphi}^{\dagger(+)}(k), \hat{\varphi}^{\dagger(-)}(k')]\Phi.$$

Выносим в левой части коммутатор из-под знака оператора \hat{Q} и, в предположении, что этот коммутатор отличен от тождественного нуля, сокращаем его. Полученное равенство $\hat{Q}\Phi = (Q + 2z)\Phi$ противоречит тому, что заряд системы в состоянии Φ равен Q . Противоречие означает, что на самом деле коммутатор тождественно равен нулю, что и требовалось доказать.

в) *Операторы разных полей коммутируют.* Это свойство универсально, но для нас существенно, что операторы мезонного поля коммутируют с операторами электромагнитного поля.

Ненулевые мезонные коммутаторы:

$$[\hat{\varphi}^{(-)}(k), \hat{\varphi}^{(+)}(k')] = \delta_3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (103)$$

$$[\hat{\varphi}^{(-)}(k), \hat{\varphi}^{\dagger(+)}(k')] = \delta_3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (104)$$

Формулы (103),(104) существенно разные в том смысле, что не могут быть получены одна из другой путем взятия эрмитова сопряжения. Выведем одну из них. Возьмем за основу (100) при $j = 1$ и положительной частотности, т.е.

$$[\hat{\varphi}^{(+)}(k), \hat{P}_n] = -k_n \hat{\varphi}^{(+)}(k). \quad (105)$$

Подставляем сюда согласно (93)

$$\hat{P}_n = \int_{R_3} d\vec{q} q_n \left(\hat{\varphi}^{(+)}(q) \hat{\varphi}^{(-)}(q) + \hat{\varphi}^{(+)}(q) \hat{\varphi}^{(-)}(q) \right). \quad (106)$$

Вносим знак коммутатора под знак интеграла. Коммутаторы типа $[\hat{a}, \hat{b}\hat{c}]$ распишем по правилу $[\hat{a}, \hat{b}\hat{c}] = [\hat{a}, \hat{b}]\hat{c} + \hat{b}[\hat{a}, \hat{c}]$ (для проверки раскроем коммутаторы в правой части: $\hat{a}\hat{b}\hat{c} - \hat{b}\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{a}\hat{c} - \hat{b}\hat{c}\hat{a} = [\hat{a}, \hat{b}\hat{c}]$). Тогда (105) приводит к

$$\begin{aligned} & \int_{R_3} d\vec{q} q_n \left([\hat{\varphi}^{(+)}(k), \hat{\varphi}^{(+)}(q)] \hat{\varphi}^{(-)}(q) + \hat{\varphi}^{(+)}(q) [\hat{\varphi}^{(+)}(k), \hat{\varphi}^{(-)}(q)] + \right. \\ & \left. + [\hat{\varphi}^{(+)}(k), \hat{\varphi}^{(+)}(q)] \hat{\varphi}^{(-)}(q) + \hat{\varphi}^{(+)}(q) [\hat{\varphi}^{(+)}(k), \hat{\varphi}^{(-)}(q)] \right) = -k_n \hat{\varphi}^{(+)}(k). \end{aligned}$$

Первые три коммутатора равны нулю, и эта формула принимает вид $\int_{R_3} d\vec{q} q_n \hat{\varphi}^{(+)}(q) [\hat{\varphi}^{(+)}(k), \hat{\varphi}^{(-)}(q)] = -k_n \hat{\varphi}^{(+)}(k)$, откуда следует, что $[\hat{\varphi}^{(+)}(k), \hat{\varphi}^{(-)}(q)] = -\delta_3(\vec{q} - \vec{k})$, или, с учетом $[\hat{a}, \hat{b}] = -[\hat{b}, \hat{a}]$, $[\hat{\varphi}^{(-)}(q), \hat{\varphi}^{(+)}(k)] = \delta_3(\vec{q} - \vec{k})$. Это — формула (103) с точностью до обозначений. (104) выводится аналогично.

Вернемся к формуле (102) для волновой функции π^+ -мезона. Произведение операторов $\hat{u}^{(-)} \hat{\varphi}^{(+)}$ внутри скалярного произведения можно заменить их коммутатором:

$$\psi_p(x) = (\Phi_0^* [\hat{u}^{(-)}(x), \hat{\varphi}^{(+)}(p)] \Phi_0),$$

так как $(\Phi_0^* \hat{\varphi}^{(+)}(p) \hat{u}^{(-)}(x) \Phi_0) = 0$. Так как коммутатор полевых операторов — обычная функция, его можно вынести из скалярного

произведения, и с учетом нормировки вакуума получается

$$\psi_p(x) = [\hat{u}^{(-)}(x), \hat{\varphi}^{(+)}(p)].$$

Подставив сюда $\hat{u}^{(-)}(x)$ согласно (92), с учетом (104) и (64) получим

$$\psi_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_0}} e^{-ip_1 x^1}. \quad (107)$$

14.8 Зарядовое сопряжение

Операция зарядового сопряжения \hat{C} заключается в замене всех частиц их античастицами. Значит, $\hat{C}\hat{\varphi}^{(\pm)} = \hat{\varphi}^{\dagger(\pm)}$, $\hat{C}\hat{\varphi}^{\dagger(\pm)} = \hat{\varphi}^{(\pm)}$. Экспериментальным путем установлено, что для частиц, испытывающих только электромагнитное взаимодействие, при такой замене поведение системы не изменяется (симметрия относительно зарядового сопряжения). Набор двух коммутаторов (103), (104) отражает это свойство. Действительно, $\hat{C}(103) = (104)$, $\hat{C}(104) = (103)$, т.е. при зарядовом сопряжении набор коммутаторов переходит сам в себя. Если теория содержала бы только один из этих коммутаторов, то в такой теории отсутствовала бы симметрия относительно зарядового сопряжения.

14.9 Коммутаторы операторов электромагнитного поля

Доказанное выше правило «операторы одинаковой частотности коммутируют» справедливо для полевых операторов любых бозонов, поэтому, например,

$$[\hat{a}_\lambda^{(+)}(k), \hat{a}_{\lambda'}^{(+)}(k')] = 0, \quad [\hat{a}_\lambda^{(-)}(k), \hat{a}_{\lambda'}^{(-)}(k')] = 0. \quad (108)$$

В случае электромагнитного поля коммутатор, аналогичный (105), имеет вид $[\hat{a}_\lambda^{(+)}(k), \hat{P}_n] = -k_n \hat{a}_\lambda^{(+)}(k)$. Подставляем сюда оператор 4-импульса электромагнитного поля

$$\hat{P}_n = \int_{R_3} d\vec{k}' k'_n \sum_{\lambda'=1}^2 \hat{a}_{\lambda'}^{(+)}(k') \hat{a}_{\lambda'}^{(-)}(k'),$$

выносим знаки интеграла и суммы за знак коммутатора. По сравнению с аналогичной формулой для мезонных операторов, от коммутатора требуется устранение не только интеграла, но и суммы. Поэтому в формуле для коммутатора появляется символ Кронекера:

$$[\hat{a}_{\lambda'}^{(-)}(k'), \hat{a}_{\lambda}^{(+)}(k)] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_3(\vec{k} - \vec{k}'),$$

или $/k \leftrightarrow k', \lambda \leftrightarrow \lambda', \delta_3(\vec{k}' - \vec{k}) = \delta_3(\vec{k} - \vec{k}')$

$$[\hat{a}_{\lambda}^{(-)}(k), \hat{a}_{\lambda'}^{(+)}(k')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (109)$$

Оператор \hat{P}_n содержит импульсные фотонные операторы $\hat{a}_{\lambda}^{(\pm)}(k)$ только с $\lambda = 1, 2$. Поэтому и формула (109) получена только для $\lambda = 1, 2$. В оператор \hat{S} входят координатные фотонные операторы типа $\hat{A}_n(x) = \hat{A}_n^{(+)}(x) + \hat{A}_n^{(-)}(x)$, где операторы

$$\hat{A}_n^{(\pm)}(x) = \int_{R_3} \eta(k) e^{\pm i k_l x^l} \varepsilon_n^{(\lambda)}(k) \hat{a}_{\lambda}^{(\pm)}(k) d\vec{k} \quad (110)$$

записаны на основе потенциалов (82). Согласно (81), (82), в (110) входят $\hat{a}_{\lambda}^{(\pm)}$ при $\lambda = 0, 1, 2, 3$. Таким образом, для расчета матричных элементов $(S - 1)_{fi}$ нужны коммутаторы типа (109) также с участием $\lambda = 0, 3$. Процедура определения импульсных фотонных коммутаторов при $\lambda = 0, 1, 2, 3$, включающая в себя использование индефинитной метрики и усредненного условия Лоренца, описана, например, в [2], стр. 96-100. В результате тоже получается формула (109), справедливая теперь уже при всех $\lambda = 0, 1, 2, 3$.

Такие же значения имеют коммутаторы операторов $\hat{b}_{\alpha}^{(\pm)}(k)$, соответствующих фотонам с заданной спиральностью α . Действительно, структура формул (80) и (83) одинакова. Это же справедливо для 4-импульса P_n и оператора \hat{P}_n . Поэтому коммутаторы операторов $\hat{b}_{\alpha}^{(\pm)}$ имеют вид $[\hat{b}_{\alpha}^{(+)}(k), \hat{b}_{\alpha'}^{(+)}(k')] = 0, [\hat{b}_{\alpha}^{(-)}(k), \hat{b}_{\alpha'}^{(-)}(k')] = 0, [\hat{b}_{\alpha}^{(-)}(k), \hat{b}_{\alpha'}^{(+)}(k')] = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_3(\vec{k} - \vec{k}')$.

14.10 Частицы со спином $\hbar/2$

Например, это $e^-, e^+, p, \tilde{p}, n, \tilde{n}, \nu, \tilde{\nu}$.

В отличие от частиц с целым спином, которые описываются уравнением Клейна—Гордона—Фока, квантовое описание частиц с полуцелым спином осуществляется с помощью уравнения Дирака. Нас интересуют заряженные частицы, например, электрон и позитрон. Формула для оператора 4-импульса электрон-позитронного поля имеет вид

$$\hat{P}_n = \int_{\vec{R}_3} d\vec{k} k_n \sum_{\alpha=1}^2 \left(\hat{\phi}_{\alpha}^{(+)}(k) \hat{\phi}_{\alpha}^{(-)}(k) - \hat{\phi}_{\alpha}^{(+)}(k) \hat{\phi}_{\alpha}^{(-)}(k) \right). \quad (111)$$

Принципиальное отличие от (106) заключается в знаке «минус» между слагаемыми.

Предположим, что аксиома из пункта 14.7 справедлива и в случае полуцелого спина. Если повторить рассуждения из п. 14.7 с использованием (111), то получатся коммутаторы

$$\left\{ \begin{array}{l} [\hat{\phi}_{\alpha'}^{(+)}(k'), \hat{\phi}_{\alpha}^{(-)}(k)] = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_3(\vec{k} - \vec{k}'), \\ [\hat{\phi}_{\alpha}^{(-)}(k), \hat{\phi}_{\alpha'}^{(+)}(k')] = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_3(\vec{k} - \vec{k}'). \end{array} \right. \quad (112)$$

Очевидно, $\hat{C}(112) \neq (112)$, т.е. система коммутаторов (112) не обладает симметрией относительно зарядового сопряжения. Теория, содержащая коммутаторы (112), а также нулевые коммутаторы операторов одинаковой частотности или, в случае заряженных частиц, одинакового сопряжения, в случае полуцелого спина приводит к многим другим противоречиям. Был найден способ исправить теорию: заменить коммутаторы полевых операторов на антикоммутаторы. Эту замену нужно сделать, начиная с аксиомы (см. п. 14.7). При этом операторы разных полей, если одно из них с целым, а другое — с полуцелым спином, по-прежнему коммутируют. Антикоммутатором операторов \hat{a}, \hat{b} называется $[\hat{a}, \hat{b}]_+ = \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} = [\hat{b}, \hat{a}]_+$. Повторив рассуждения пункта 14.7 с учетом указанной замены, получим вместо (112) систему антикоммутаторов

$$\left\{ \begin{array}{l} [\hat{\phi}_{\alpha'}^{(-)}(k), \hat{\phi}_{\alpha'}^{(+)}(k')]_+ = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_3(\vec{k} - \vec{k}'), \\ [\hat{\phi}_{\alpha}^{(-)}(k), \hat{\phi}_{\alpha'}^{(+)}(k')]_+ = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_3(\vec{k} - \vec{k}'). \end{array} \right. \quad (113)$$

Эта система отражает симметрию относительно зарядового сопряжения: $\hat{C}(113) = (113)$. При этом исчезают и все остальные противоречия. В частности, теория приходит в согласие с принципом Паули.

Принцип запрета Паули

Согласно принципу Паули, система не может содержать два и более одинаковых фермиона в одинаковом состоянии. В частности, не может существовать система из двух электронов, у каждого из которых поляризация α и 4-импульс k . Другими словами, системы с вектором состояния $\hat{\phi}_\alpha^{(+)}(k)\hat{\phi}_\alpha^{(+)}(k)\Phi_0$ не существуют. Выясним, отражено ли это свойство фермионов в коммутационных соотношениях. Рассмотрим один из нулевых антикоммуторов: $[\hat{\phi}_\alpha^{(+)}(k), \hat{\phi}_{\alpha'}^{(+)}(k')]_+ = 0$. Действуем операторами этого равенства на вектор состояния вакуума Φ_0 . Рассматриваем случай, когда $\alpha' = \alpha, k' = k$. Расписываем антикоммутиатор, сокращаем 2 и получаем $\hat{\phi}_\alpha^{(+)}(k)\hat{\phi}_\alpha^{(+)}(k)\Phi_0 = 0$. Это приводит к тому, что любые вероятностные характеристики системы двух электронов в одинаковом состоянии равны нулю. Отметим, что в случае бозонов, квантовое описание которых осуществляется с помощью коммутаторов, аналогичное рассуждение приводит к тождеству $0 = 0$. Это означает, что система может содержать любое число бозонов в одном и том же состоянии, т.е. принцип запрета на бозоны не распространяется.

14.11 Нормальная форма записи операторов

На основе формулы (72) запишем оператор энергии комплексного скалярного поля:

$$\hat{H} = \int_{R_3} d\vec{k} k^0 \left(\hat{\phi}^{(+)}(k) \hat{\phi}^{(-)}(k) + \hat{\phi}^{(+)}(k) \hat{\phi}^{(-)}(k) \right). \quad (114)$$

Выше мы обсуждали, что при построении операторов наблюдаемых физических величин на основе классических выражений, содержащих произведения полевых функций, нужно поставить множители в таком порядке, чтобы получился эрмитов оператор. Но в данном случае \hat{H} не перестанет быть эрмитовым, если в одном из слагаемых или в обоих слагаемых поменять порядок множителей. Значит, сформулированные ранее правила построения операторов

наблюдаемых величин не позволяют сделать это однозначно, и теория требует доработки. Для этого найдем собственное значение H оператора \hat{H} для вакуума, определяемое уравнением $\hat{H}\Phi_0 = H\Phi_0$. Так как $\hat{\varphi}^{(-)}(k)\Phi_0 = 0$, $\hat{\varphi}^{(+)}(k)\Phi_0 = 0$, то $\hat{H}\Phi_0 = 0$ и, следовательно, $H = 0$, что приемлемо.

Рассмотрим гамильтониан \hat{H}' , который отличается от оператора \hat{H} , определяемого формулой (114), тем, что во втором слагаемом сомножители стоят в обратном порядке:

$$\hat{H}' = \int_{R_3} d\vec{k} k^0 \left(\hat{\varphi}^{(+)}(k)\hat{\varphi}^{(-)}(k) + \hat{\varphi}^{(-)}(k)\hat{\varphi}^{(+)}(k) \right). \quad (115)$$

Первое слагаемое дает нулевой вклад в $\hat{H}'\Phi_0$. Найдем вклад второго слагаемого. Так как коммутатор полевых операторов известен, а $\hat{\varphi}^{(+)}(k)\Phi_0 = 0$, то целесообразно записать $\hat{\varphi}^{(-)}(k)\hat{\varphi}^{(+)}(k)$ в виде $\hat{\varphi}^{(+)}(k)\hat{\varphi}^{(-)}(k) + [\hat{\varphi}^{(-)}(k), \hat{\varphi}^{(+)}(k)]$. Вклад первого слагаемого в $\hat{H}'\Phi_0$ равен нулю. Так как $[\hat{\varphi}^{(-)}(k), \hat{\varphi}^{(+)}(k)] = \delta_3(\vec{k} - \vec{k}) = \infty$, то $\hat{H}'\Phi_0 = \infty$, что неприемлемо. Мы приходим к следующему правилу: при построении операторов наблюдаемых характеристик поля в произведениях полевых операторов операторы уничтожения должны стоять справа от операторов рождения (нормальная форма записи операторов).

Рассмотрим произведение некоторого числа, например, двух полевых операторов $\hat{A}\hat{B}$, каждый из которых равен сумме операторов рождения и уничтожения. Часто бывает нужно указать, что после записи \hat{A} , \hat{B} в виде этих сумм и перемножения скобок следует в каждом слагаемом нормально упорядочить сомножители. Для этой цели используется оператор нормального упорядочивания N : $N(\hat{B}^{(-)}\hat{A}^{(+)}) = \hat{A}^{(+)}\hat{B}^{(-)}$, $N(\hat{A}^{(+)}\hat{B}^{(-)}) = \hat{A}^{(+)}\hat{B}^{(-)}$. В рассматриваемом примере $N(\hat{A}\hat{B}) = \hat{A}^{(+)}\hat{B}^{(+)} + \hat{A}^{(+)}\hat{B}^{(-)} + \hat{B}^{(+)}\hat{A}^{(-)} + \hat{A}^{(-)}\hat{B}^{(-)}$. Другое обозначение: $N(\hat{A}\hat{B}) =: \hat{A}\hat{B} :$.

Из определения N и из того факта, что операторы одинаковой частотности коммутируют, следует, что под знаком N операторы можно произвольно переставлять; например, $N(\hat{A}\hat{B}) = N(\hat{B}\hat{A})$.

Теперь мы можем окончательно записать гамильтониан взаимодействия:

$$\hat{\mathcal{H}}_I(x) = izN \left(\hat{u}^+(x) \partial_n \hat{u}(x) - (\partial_n \hat{u}^+(x)) \hat{u}(x) \right) \hat{A}^n(x) - z^2 N \left(\hat{u}^+(x) \hat{u}(x) \hat{A}_n(x) \hat{A}^n(x) \right). \quad (116)$$

14.12 Полевые операторы в представлении взаимодействия

Входящие в (116) операторы $\hat{u}(x)$, $\hat{A}^n(x)$ нужно, как обычно, определять на основе полевых функций. Мы решали только уравнения (53)–(55) для свободных полей. Можно было думать, что теперь следует искать решения уравнений (87). Однако при переходе от полевых функций к операторам необходимо учесть, что мы работаем в представлении взаимодействия (см. п. 2.2). Из квантовой механики известно, что в этом представлении операторы зависят от времени, причем их эволюция описывается уравнением Гейзенберга, в котором вместо полного гамильтониана стоит гамильтониан свободных частиц. Покажем это. Запишем формулы перехода между представлениями Шредингера и взаимодействия:

$$\hat{u}(x) = \hat{U}^+ \hat{u}^S(x) \hat{U}, \quad (117)$$

$$\hat{u}^S(x) = \hat{U} \hat{u}(x) \hat{U}^+, \quad (118)$$

где \hat{U} — унитарный оператор, на который наложено условие (18). Дифференцируем (117) по t и учитываем, что в представлении Шредингера операторы явно не зависят от времени, т.е. оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ можно внести под знак $\hat{u}^S(x)$: $\frac{\partial \hat{u}(x)}{\partial t} = \frac{\partial \hat{U}^+}{\partial t} \hat{u}^S(x) \hat{U} + \hat{U}^+ \hat{u}^S(x) \frac{\partial \hat{U}}{\partial t}$. С учетом (18), (118), $\hat{U}^+ \hat{U} = 1$ и $\hat{H}^+ = \hat{H}$ получим уравнение Гейзенберга $i \frac{\partial \hat{u}(x)}{\partial t} = [\hat{u}(x), \hat{H}_0]$. Таким образом, в представлении взаимодействия эволюцией операторов управляет гамильтониан свободного поля. Отсюда следует вывод, что полевые операторы, входящие в $\hat{\mathcal{H}}_I$, определяются на основе решений, которые мы уже нашли, уравнений для свободных полей. А именно, операторы определяются на основе решений (65)–(68), (82) уравнений (54), (55), (53) и поэтому имеют вид

$$\hat{u}^{(\pm)}(x) = \int_{R_3} \eta(k) \hat{\varphi}^{(\pm)}(k) e^{\pm ik_\mu x^\mu} d\vec{k}, \quad (119)$$

$$\hat{u}^{\dagger(\pm)}(x) = \int_{R_3} \eta(k) \hat{\varphi}^{\dagger(\pm)}(k) e^{\pm i k_l x^l} d\vec{k}, \quad (120)$$

$$\hat{A}_n^{\dagger(\pm)}(x) = \int_{R_3} \eta(k) \varepsilon_n^{(\lambda)}(k) \hat{a}_\lambda^{\dagger(\pm)}(k) e^{\pm i k_l x^l} d\vec{k}. \quad (121)$$

15 Расчет матричного элемента комптоновского рассеяния фотона. Часть I (лабораторная работа 2)

Цель работы: освоить технику подробного расчета (без применения диаграмм Фейнмана) матричного элемента S -оператора, не содержащего хронологического произведения. Для процесса $\gamma + \pi^+ \rightarrow \gamma + \pi^+$ найти слагаемое матричного элемента S -оператора, содержащее однократный интеграл по объему 4-пространства.

Обозначения: p — 4-импульс пи-мезона до рассеяния; k , λ — 4-импульс и индекс поляризации фотона до рассеяния; p' , k' , λ' — эти величины после рассеяния.

Требуется вычислить матричный элемент $S_{fi}^{(1)} = (\Phi_f^* \hat{S}^{(1)} \Phi_i)$ оператора

$$\hat{S}^{(1)} = -i \int_{R_4} \hat{\mathcal{H}}_I(x) dx,$$

где

$$\Phi_i = \hat{\varphi}^{\dagger(+)}(p) \hat{a}_\lambda^{(+)}(k) \Phi_0, \quad \Phi_f^* = \Phi_0^* \hat{\varphi}^{(-)}(p') \hat{a}_{\lambda'}^{(-)}(k'),$$

$$\hat{\mathcal{H}}_I(x) = \hat{\mathcal{H}}_I'(x) + \hat{\mathcal{H}}_I''(x),$$

$$\hat{\mathcal{H}}_I'(x) = izN \left(\hat{u}^{\dagger(+)}(x) \partial_n \hat{u}(x) - (\partial_n \hat{u}^{\dagger(+)}(x)) \hat{u}(x) \right) \hat{A}^n(x),$$

$$\hat{\mathcal{H}}_I''(x) = -z^2 N \left(\hat{u}^{\dagger(+)}(x) \hat{u}(x) \hat{A}_I^n(x) \hat{A}^n(x) \right).$$

15.1 Указания

Перечислим свойства вектора состояния вакуума и операторов, необходимые для расчета матричного элемента.

1) По определению вакуума, $\hat{b}^{(-)}\Phi_0 = 0$, $\Phi_0^*\hat{b}^{(+)} = 0$, где \hat{b} — любой полевой оператор. Нормировка вектора состояния вакуума: $(\Phi_0^*\Phi_0) = 1$.

2) Коммутатор двух любых полевых операторов представляет собой обычную функцию.

Отсюда вытекает метод вычисления скалярных произведений.

Пример 1.

$$\begin{aligned} (\Phi_0^*\hat{a}^{(-)}\hat{b}^{(+)}\Phi_0) &= /\hat{a}^{(-)}\hat{b}^{(+)} = [\hat{a}^{(-)}, \hat{b}^{(+)}] + \hat{b}^{(+)}\hat{a}^{(-)} / = \\ &= [\hat{a}^{(-)}, \hat{b}^{(+)}](\Phi_0^*\Phi_0) + (\Phi_0^*\hat{b}^{(+)}\hat{a}^{(-)}\Phi_0) = [\hat{a}^{(-)}, \hat{b}^{(+)}]. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что коммутатор полевых операторов является обычной функцией и поэтому выносится из скалярного произведения.

Пример 2.

Покажите, что $(\Phi_0^*\hat{a}^{(-)}\hat{b}^{(+)}\hat{c}^{(+)}\hat{M}\Phi_0) = 0$, $(\Phi_0^*\hat{M}\hat{a}^{(-)}\hat{b}^{(-)}\hat{c}^{(+)}\Phi_0) = 0$, где \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , \hat{M} — любые полевые операторы.

Вывод: два оператора рождения «пробиваются» к сопряженному вакууму сквозь оператор уничтожения, и зануляют скалярное произведение; аналогично, один оператор рождения не может «загородить» обычный вакуум от двух операторов уничтожения.

3) Мезонные операторы \hat{u} , $\hat{\varphi}$ коммутируют с электромагнитными \hat{A} , \hat{a} . Вообще, операторы, относящиеся к разным полям, коммутируют.

4) Операторы одинаковой частотности коммутируют.

5) В случае комплексного поля операторы с одинаковым сопряжением коммутируют.

6) Коммутаторы, отличные от тождественного нуля:

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}^{(-)}(p), \hat{\varphi}^{(+)}(p')] &= \delta_3(\vec{p} - \vec{p}'), & [\hat{\varphi}^{(-)}(p), \hat{\varphi}^{(+)}(p')] &= \delta_3(\vec{p} - \vec{p}'), \\ [\hat{a}_\lambda^{(-)}(k), \hat{a}_{\lambda'}^{(+)}(k')] &= \delta_{\lambda\lambda'}\delta_3(\vec{k} - \vec{k}'). \end{aligned}$$

15.2 Задания

1. Если вы не проделали вычисления в Примере 2, то проделайте их.

2. Вычислите $S_{fi}^{(1)'} (учитывается только \hat{\mathcal{H}}_I'(x))$.

Указание. Обычно матричный элемент состоит из большого числа слагаемых, но многие из них равны нулю. Рассматривая очередное слагаемое, нужно прежде всего попытаться показать, что оно равно нулю. Можно рассматривать мезонные и фотонные операторы по очереди, пользуясь тем, что операторы этих двух типов коммутируют. Целесообразно начинать с операторов, для которых выражение проще. В этом задании более простая — фотонная часть. Мезонную часть $\hat{\varphi}^{(-)}(p')N \left(\hat{u}^{\dagger}(x)\partial_n\hat{u}(x) - (\partial_n\hat{u}^{\dagger}(x))\hat{u}(x) \right) \hat{\varphi}^{(+)}(p)$ обозначим \hat{M} .

Рассмотрите скалярное произведение

$$(\Phi_0^* \hat{M} \hat{a}_{\lambda'}^{(-)}(k') \hat{A}^n(x) \hat{a}_{\lambda}^{(+)}(k) \Phi_0).$$

Для этого запишите оператор $\hat{A}^n(x)$ в виде суммы $\hat{A}^{n(+)}(x) + \hat{A}^{n(-)}(x)$ и используйте результаты из Примера 2. Не обращайте внимания на оператор \hat{M} , который можно написать в любом месте между Φ_0^* и Φ_0 .

3. Расчет $S_{fi}^{(1)''}$ (слагаемое, соответствующее $\hat{\mathcal{H}}_I''(x)$).

Указания.

3.1. Рассмотрим $\hat{h} \stackrel{def}{=} N(\hat{u}^{\dagger}\hat{u}\hat{A}_m\hat{A}^m) = N(\hat{u}^{\dagger}\hat{u})N(\hat{A}_m\hat{A}^m) = N((\hat{u}^{\dagger(+)} + \hat{u}^{\dagger(-)})(\hat{u}^{(+)} + \hat{u}^{(-)}))N((\hat{A}_m^{(+)} + \hat{A}_m^{(-)})(\hat{A}^{m(+)} + \hat{A}^{m(-)})) = (\hat{u}^{\dagger(+)}\hat{u}^{(+)} + \hat{u}^{\dagger(+)}\hat{u}^{(-)} + \hat{u}^{\dagger(-)}\hat{u}^{(+)} + \hat{u}^{\dagger(-)}\hat{u}^{(-)})(\hat{A}_m^{(+)}\hat{A}^{m(+)} + 2\hat{A}_m^{(+)}\hat{A}^{m(-)} + \hat{A}_m^{(-)}\hat{A}^{m(-)}).$

Перемножим эти скобки и получим 12 слагаемых:

$$\hat{h} = \sum_{r=1}^{12} \hat{h}_r, \quad \hat{h}_1 = \hat{u}^{\dagger(+)}\hat{u}^{(+)}\hat{A}_m^{(+)}\hat{A}^{m(+)}, \quad \hat{h}_2 = 2\hat{u}^{\dagger(+)}\hat{u}^{(+)}\hat{A}_m^{(+)}\hat{A}^{m(-)},$$

$$\dots, \quad \hat{h}_5 = 2\hat{u}^{\dagger(+)}\hat{u}^{(-)}\hat{A}_m^{(+)}\hat{A}^{m(-)}, \quad \dots, \quad \hat{h}_8 = 2\hat{u}^{\dagger(+)}\hat{u}^{(-)}\hat{A}_m^{(-)}\hat{A}^{m(-)}, \quad \dots, \quad \hat{h}_{12} = \hat{u}^{\dagger(-)}\hat{u}^{(-)}\hat{A}_m^{(-)}\hat{A}^{m(-)}.$$

3.2. Исходя из свойств операторов 1) — 5) (особенно полезны результаты Примера 2), найдите по возможности все операторы \hat{h}_r , для которых матричные элементы $(h_r)_{fi} = 0$.

3.3. С помощью выкладки, приведенной в Примере 1, преобразуйте $h_{fi} = (\Phi_f \hat{h} \Phi_i)^*$ так, чтобы полевые операторы содержались только внутри коммутаторов; а именно, появятся коммутаторы смешанного типа [координатный полевой оператор, импульсный полевой оператор].

3.4. Вычислите коммутаторы $[\hat{\varphi}^{(-)}(p'), \hat{u}^{(+)}(x)]$, $[\hat{u}^{(-)}(x), \hat{\varphi}^{(+)}(p)]$, $[\hat{a}_{\lambda'}^{(-)}(k'), \hat{A}_m^{(+)}(x)]$, $[\hat{A}^{m(-)}(x), \hat{a}_{\lambda}^{(+)}(k)]$.

Для этого запишите координатные полевые операторы в виде интегралов Фурье:

$$\hat{u}^{(+)}(x) = \int_{R_3} d\vec{p}'' \eta(p'') e^{ip'' x^l} \hat{\varphi}^{(+)}(p''),$$

$$\hat{u}^{(-)}(x) = \int_{R_3} d\vec{p}''' \eta(p''') e^{-ip''' x^l} \hat{\varphi}^{(-)}(p'''),$$

$$\hat{A}_m^{(+)}(x) = \int_{R_3} d\vec{k}'' \eta(k'') e^{ik'' x^l} \varepsilon_m^{(\lambda'')}(k'') \hat{a}_{\lambda''}^{(+)}(k''),$$

$$\hat{A}^{m(-)}(x) = \int_{R_3} d\vec{k}''' \eta(k''') e^{-ik''' x^l} \varepsilon^{(\lambda''')m}(k''') \hat{a}_{\lambda'''}^{(-)}(k''')$$

($d\vec{p}$, $d\vec{k}$ — элементы объема пространства импульсов,

$$\eta(q) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2q_0}}$$

— нормировочный множитель); используйте формулы для ненулевых коммутаторов импульсных операторов.

3.5. Вычислите интеграл по x , запишите $S_{fi}^{(1)''}$.

4. Для проверки полученной формулы для $S_{fi}^{(1)}$ убедитесь, что формула не содержит других свободных индексов, кроме индексов поляризации λ, λ' . Входящая в формулу дельта-функция должна отражать закон сохранения 4-импульса.

15.3 Ответы

2. $S_{fi}^{(1)'} = 0$.

3.2. $(h_r)_{fi} = 0$ для всех r , кроме $r = 5$.

3.3. $h_{fi} = 2[\hat{\varphi}^{(-)}(p'), \hat{u}^{(+)}(x)] \cdot [\hat{u}^{(-)}(x), \hat{\varphi}^{(+)}(p)] \cdot [\hat{a}_{\lambda'}^{(-)}(k'), \hat{A}_m^{(+)}(x)] \cdot [\hat{A}_m^{(-)}(x), \hat{a}_{\lambda}^{(+)}(k)]$.

3.4.

$$[\hat{\varphi}^{(-)}(p'), \hat{u}^{(+)}(x)] = \eta(p')e^{ip'x^l}, \quad [\hat{u}^{(-)}(x), \hat{\varphi}^{(+)}(p)] = \eta(p)e^{-ipx^l},$$

$$[\hat{a}_{\lambda'}^{(-)}(k'), \hat{A}_m^{(+)}(x)] = \varepsilon_m^{(\lambda')} (k') \eta(k') e^{ik'_i x^l},$$

$$[\hat{A}_m^{(-)}(x), \hat{a}_{\lambda}^{(+)}(k)] = \varepsilon^{(\lambda)m} (k) \eta(k) e^{-ik_i x^l}.$$

3.5.

$$S_{fi}^{(1)''} = \frac{iz^2}{8\pi^2} \frac{\varepsilon^{(\lambda)m} (k) \varepsilon_m^{(\lambda')} (k')}{\sqrt{p^0 p'^0 k^0 k'^0}} \delta_4(p + k - p' - k').$$

16 Хронологические произведения

Слагаемые S -оператора с кратными интегралами (см. формулу (20)) содержат хронологический оператор P , определяемый формулой (12):

$$P(\hat{a}(x)\hat{b}(y)) = \begin{cases} \hat{a}(x)\hat{b}(y) & \text{при } x^0 > y^0, \\ \hat{b}(y)\hat{a}(x) & \text{при } y^0 > x^0. \end{cases}$$

Существует способ записи хронологических произведений, который не только упрощает вычисления, но еще и приводит к понятию виртуальных состояний.

16.1 Теорема Вика для двух сомножителей

Хронологическое произведение двух операторов равно сумме их нормальных произведений и их свертки:

$$P(\hat{a}(x)\hat{b}(y)) = N(\hat{a}(x)\hat{b}(y)) + \widehat{\hat{a}(x)\hat{b}(y)}, \quad (122)$$

где

$$\widehat{\hat{a}(x)\hat{b}(y)} = \begin{cases} [\hat{a}^{(-)}(x), \hat{b}^{(+)}(y)] & \text{при } x^0 > y^0, \\ [\hat{b}^{(-)}(y), \hat{a}^{(+)}(x)] & \text{при } y^0 > x^0 \end{cases} \quad (123)$$

— свертка, или хронологическое спаривание операторов \hat{a} , \hat{b} ; причинная функция; функция распространения, или пропагатор; функция Грина.

Проверка: при $x^0 > y^0$ $P(\hat{a}\hat{b}) = \hat{a}\hat{b}$; $P(\hat{a}\hat{b}) - N(\hat{a}\hat{b}) = \hat{a}^{(+)}\hat{b}^{(+)} + \hat{a}^{(+)}\hat{b}^{(-)} + \hat{a}^{(-)}\hat{b}^{(+)} + \hat{a}^{(-)}\hat{b}^{(-)} - \hat{a}^{(+)}\hat{b}^{(+)} - \hat{a}^{(+)}\hat{b}^{(-)} - \hat{b}^{(+)}\hat{a}^{(-)} - \hat{a}^{(-)}\hat{b}^{(-)} = \hat{a}^{(-)}(x)\hat{b}^{(+)}(y) - \hat{b}^{(+)}(y)\hat{a}^{(-)}(x) = [\hat{a}^{(-)}(x), \hat{b}^{(+)}(y)]$. Верно.

Отметим, что, поскольку $P(\hat{a}\hat{b}) = P(\hat{b}\hat{a})$, $N(\hat{a}\hat{b}) = N(\hat{b}\hat{a})$, то

$$\widehat{\hat{a}(x)\hat{b}(y)} = \widehat{\hat{b}(y)\hat{a}(x)}.$$

16.2 Теорема Вика для произвольного числа сомножителей

Хронологическое произведение равно сумме N -произведений со всеми возможными спариваниями под знаком N , включая слагаемое без спариваний.

Поскольку свертка — это коммутатор полевых операторов, который, согласно §15, не является оператором, то свертки могут быть

вынесены из-под знака N , например: $N(\widehat{\hat{a} \hat{b} \hat{c} \hat{d}}) = \widehat{\hat{a} \hat{c} N(\hat{b}\hat{d})}$.

Пример применения теоремы Вика:

$$P(\widehat{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}) = N(\widehat{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}) + \widehat{\hat{a} \hat{b} N(\hat{c}\hat{d})} + \widehat{\hat{a} \hat{c} N(\hat{b}\hat{d})} + \widehat{\hat{a} \hat{d} N(\hat{b}\hat{c})} + \widehat{\hat{b} \hat{c} N(\hat{a}\hat{d})} + \widehat{\hat{b} \hat{d} N(\hat{a}\hat{c})} + \widehat{\hat{c} \hat{d} N(\hat{a}\hat{b})} + \widehat{\hat{a} \hat{b} \hat{c} \hat{d}} + \widehat{\hat{a} \hat{c} \hat{b} \hat{d}} + \widehat{\hat{a} \hat{d} \hat{b} \hat{c}}.$$

16.3 Теорема Вика для смешанного хронологического произведения

Смешанным называется такое хронологическое произведение, в котором под знаком P часть операторов стоит под знаком N .

В смешанном хронологическом произведении отсутствуют слагаемые со свертками тех операторов, которые первоначально стояли под знаком одного и того же N .

Пример. Смешанное P -произведение $P(N(\hat{a}\hat{b})N(\hat{c}\hat{d}))$ может быть найдено путем вычеркивания из обычного P -произведения $P(\widehat{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}})$

$$\text{слагаемых со свертками } \widehat{\hat{a} \hat{b}}, \widehat{\hat{c} \hat{d}}: P(N(\hat{a}\hat{b})N(\hat{c}\hat{d})) = N(\widehat{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}) + \widehat{\hat{a} \hat{c} N(\hat{b}\hat{d})} + \widehat{\hat{a} \hat{d} N(\hat{b}\hat{c})} + \widehat{\hat{b} \hat{c} N(\hat{a}\hat{d})} + \widehat{\hat{b} \hat{d} N(\hat{a}\hat{c})} + \widehat{\hat{a} \hat{c} \hat{b} \hat{d}} + \widehat{\hat{a} \hat{d} \hat{b} \hat{c}}.$$

16.4 Вычисление сверток

1. Свертки мезонных операторов \hat{u}, \hat{u}^\dagger .

а) Нулевые свертки:

$$\widehat{\hat{u}(x)\hat{u}(y)} = 0, \quad \widehat{\hat{u}^\dagger(x)\hat{u}^\dagger(y)} = 0.$$

б) Свертка, отличная от тождественного нуля.

В коммутатор $[\hat{u}^{(-)}(x), \hat{u}^{(+)}(y)]$ подставим операторы \hat{u} , определяемые формулами (66), (68). Выносим знаки интегралов и обычные функции за знак коммутатора. Заменяем коммутатор мезонных импульсных операторов дельта-функцией согласно формуле (104). Учитываем, что при $\vec{p}' = \vec{p}, p_0' = p_0$, т.е. в этом случае $p_n' = p_n \forall n$. Наличие дельта-функции позволяет вычислить один из интегралов. Аналогично с помощью (66), (68) и (103) преобразуем коммутатор $[\hat{u}^{(-)}(y), \hat{u}^{(+)}(x)]$. В результате получим

$$\widehat{\hat{u}(x)\hat{u}^\dagger(y)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R_3} e^{\mp i p_n (x^n - y^n)} \frac{d\vec{p}}{2p_0}; \quad (124)$$

при $x^0 > y^0$ в показателе экспоненты — знак «минус», а при $y^0 > x^0$ — «плюс». Здесь $p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, т.е. справедливо обычное релятивистское соотношение между энергией и импульсом, которое можно записать в виде

$$p^2 = m^2, \quad (125)$$

где $p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2$ — квадрат 4-импульса.

Формулу (124) можно привести к виду

$$\widehat{\hat{u}(x)\hat{u}^\dagger(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{R_4} \frac{\exp[-i p_n (x^n - y^n)]}{p^2 - m^2 + i\epsilon} dp = \frac{1}{i} D_m(x - y). \quad (126)$$

$dp = dp^0 d\vec{p}$ — элемент объема 4-мерного импульсного пространства. Здесь, в отличие от формулы (125), квадрат 4-импульса $p^2 = p_n p^n = (p^0)^2 - \vec{p}^2$ не обязан быть равным m^2 и может принимать любые действительные значения, так как при интегрировании каждая из компонент p^i , в том числе p^0 , независимо от других компонент пробегает значения из $(-\infty, +\infty)$.

Для проверки формулы (126) вычислим лишний интеграл, т.е. интеграл по p^0 . Пусть $x^0 > y^0$. Обозначим

$$J(R) = \int_{-R}^{+R} \frac{\exp[-ip_0(x^0 - y^0)]}{(p^0)^2 - \bar{p}^2 - m^2 + i\epsilon} dp^0 = \int_{-R}^{+R} F(p^0) dp^0.$$

Нас интересует $J(\infty) = \lim_{R \rightarrow \infty} J(R)$. Такие интегралы вычисляются путем перехода к интегрированию по комплексной переменной по замкнутому контуру. В связи с этим переменную интегрирования p^0 объявим комплексной величиной: $p^0 = \text{Re } p^0 + i \text{Im } p^0$. Построим на отрезке $[-R, R]$ действительной оси как на диаметре полуокружность γ_R радиусом R в нижней полуплоскости с направлением от $p^0 = R$ к $p^0 = -R$. Тогда $C_R = [-R, R] \cup \gamma_R$ — контур с направлением обхода по часовой стрелке, т.е. с отрицательным направлением. Очевидно, $\int_{-R}^{+R} F(p^0) dp^0 = \oint_{C_R} F(p^0) dp^0 - \int_{\gamma_R} F(p^0) dp^0$. Функция $F(p^0)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана в полуплоскости $\text{Im } p^0 < 0$, поэтому $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} F(p^0) dp^0 = 0$. Поэтому интересующий нас интеграл равен $J(\infty) = \oint_{C_\infty} F(p^0) dp^0$; контур C_∞ состоит из действительной прямой $(-\infty, +\infty)$ и полуокружности бесконечного радиуса в нижней полуплоскости. Все точки полуплоскости $\text{Im } p^0 < 0$ находятся внутри этого контура.

Этот интеграл вычисляется методом вычетов. Найдем полюсы подынтегрального выражения:

$p^0 = \pm \sqrt{\bar{p}^2 + m^2 - i\epsilon} = \pm E \sqrt{1 - i \frac{\epsilon}{\bar{p}^2 + m^2}} \approx \pm E \left(1 - \frac{i}{2} \frac{\epsilon}{\bar{p}^2 + m^2}\right) = \pm \left(E - \frac{i\epsilon}{2E}\right)$, где $E = \sqrt{\bar{p}^2 + m^2} > 0$. Обозначим $p_{(1)}^0 = E - \frac{i\epsilon}{2E}$, $p_{(2)}^0 = -E + \frac{i\epsilon}{2E}$. Функцию $F(p^0)$ можно записать в виде $F(p^0) = \exp[-ip^0(x^0 - y^0)] / (p^0 - p_{(1)}^0)(p^0 - p_{(2)}^0)$. Так как $\epsilon > 0$, то внутри контура C_∞ содержится полюс $p_{(1)}^0$. Применяв метод вычетов, находим $J(\infty) = -2\pi i \frac{\exp[-ip_{(1)}^0(x^0 - y^0)]}{p_{(1)}^0 - p_{(2)}^0} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -2\pi i \frac{\exp[-iE(x^0 - y^0)]}{2E}$.

Учитывая, что в (124) $E = \sqrt{\bar{p}^2 + m^2}$ обозначено p^0 , окончательно получаем

$$J(\infty) = -2\pi i \frac{\exp[-ip_0(x^0 - y^0)]}{2p_0},$$

и тогда при $x^0 > y^0$

$$\widehat{u}(x) \overset{+}{\hat{u}}(y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R_3} \exp[-ip_n(x^n - y^n)] \frac{d\vec{p}}{2p^0},$$

что совпадает со (124). Проверка при $y^0 > x^0$ проводится аналогично; при этом контур строится в верхней полуплоскости, и внутри него оказывается полюс $p_{(2)}^0$.

2. Свертка фотонных операторов:

$$\widehat{A}_m(x) \widehat{A}_n(y) = ig_{mn} D_0(x - y), \quad (127)$$

где функция $D_0(x - y)$ определяется формулой (126) с нулевой массой; g_{mn} — метрический тензор (22).

16.5 Производная под знаком свертки

В результате того, что в $\hat{\mathcal{H}}_I$ содержатся производные $\partial_n \hat{u}$, в матричном элементе появятся свертки типа $\overbrace{\frac{\partial}{\partial x^n} \hat{u}(x) \overset{+}{\hat{u}}(y)} = \frac{\partial}{\partial x^n} \hat{u}(x) \overset{+}{\hat{u}}(y) + F_2$. Известно (см., например, [6], с. 341–343), что при расчете матричных элементов S -оператора функция F_2 взаимно уничтожается с функцией F_1 , которая входит в $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I + F_1$. Поэтому, имея в виду задачу расчета матричных элементов, функции F_1 и F_2 сразу отбрасывают. Правило « $\hat{\mathcal{H}}_I = -\hat{\mathcal{L}}_I$ » уже обсуждалось в 13.3. Теперь оно дополняется правилом о возможности вынесения производных за знак свертки. Пример:

$$\overbrace{\frac{\partial}{\partial x^n} \hat{u}(x) \overset{+}{\hat{u}}(y)} = \frac{\partial}{\partial x^n} \hat{u}(x) \overset{+}{\hat{u}}(y).$$

16.6 Физический смысл свертки

В слагаемом S -оператора $\hat{S}^{(1)} \sim \int dx \hat{\mathcal{H}}_I(x)$ x — это точка 4-пространства, в которой взаимодействуют две частицы. Взаимодействие происходит в одной пространственной точке и мгновенно. Это следует из того, что операторы рождения и уничтожения, которые

входят в $\hat{\mathcal{H}}_I(x)$, относятся к одной и той же точке x . Интегрирование по x отражает тот факт, что взаимодействие может произойти в любой точке.

Так как свертка двух полевых операторов — обычная функция и $(\Phi_0 \hat{\Phi}_0) = 1$, то ее можно записать в виде

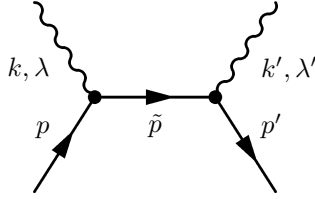
$$\widehat{u}(x) \widehat{u}(y) = (\Phi_0 \widehat{u}(x) \widehat{u}(y) \Phi_0) = \begin{cases} (\Phi_0 \widehat{u}^{(-)}(x) \widehat{u}^{(+)}(y) \Phi_0) \text{ при } x^0 > y^0, \\ (\Phi_0 \widehat{u}^{(+)}(y) \widehat{u}^{(-)}(x) \Phi_0) \text{ при } y^0 > x^0. \end{cases} \quad (128)$$

Проанализируем правую часть с учетом смысла операторов, который мы выяснили в п. 14.5. В верхней строке происходит рождение π^+ -мезона в точке y и уничтожение π^+ -мезона в точке x . В нижней строке — рождение π^- -мезона в точке x и уничтожение π^- -мезона в точке y . В обоих случаях рождение предшествует уничтожению; в связи с этим вспомним одно из многочисленных названий свертки — «причинная функция». Это наводит на мысль, что при $x^0 > y^0$ рассматриваемая свертка описывает распространение одного и того же π^+ -мезона, а при $y^0 > x^0$ — распространение одного и того же π^- -мезона. Для состояний, в которых находятся эти мезоны, можно указать два свойства.

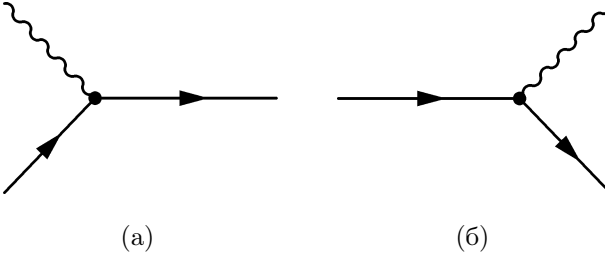
1. Время жизни этих состояний ограничено.
2. Для выяснения второго свойства рассмотрим формулу (126). Экспонента под знаком интеграла представляет собой волновую функцию частицы с 4-импульсом p . Но, так как интегрирования по p^0 и p^α , $\alpha = 1, 2, 3$ проводятся независимо, то $p^2 \neq m^2$ ($c = 1$), или $E^2 - c^2 \vec{p}^2 \neq m^2 c^4$, т.е. не выполняется релятивистская связь энергии и импульса, или, другими словами, частица находится вне массовой поверхности.

Такие состояния называются *виртуальными*. Возможен переход частицы из реального состояния в виртуальное и обратно. Если частица существует только в виртуальном состоянии, то ее называют виртуальной.

Несколько позже мы будем рассматривать диаграммы Фейнмана. На рисунке приведена одна из диаграмм, описывающих процесс рассеяния фотона на π^+ -мезоне. Внутренняя линия соответствует мезону в виртуальном состоянии.



Разделим диаграмму на две части (а), (б) и рассмотрим их по отдельности.



Согласно законам релятивистской кинематики, свободная частица не может поглотить фотон. Это легко показать, записав законы сохранения энергии и импульса для этого процесса. Система уравнений окажется несовместной. Поэтому, если бы на диаграмме (а) все три линии соответствовали реальным свободным частицам, то такой процесс был бы невозможен. Наличие «невозможной» диаграммы (а) в составе полной диаграммы имеет две интерпретации.

1. Нарушается закон сохранения энергии на величину ΔE на малое время Δt согласно соотношению неопределенностей для энергии $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$.
2. Законы сохранения выполняются, но нарушается релятивистская связь между энергией и импульсом.

В обоих подходах выходящая линия на диаграмме (а) соответствует частице в виртуальном состоянии. В квантовой электродинамике принята 2-я интерпретация.

Аналогично, свободная частица не может излучить фотон. Диаграмма (б) возможна потому, что входящая линия соответствует частице в виртуальном состоянии.

17 Расчет матричного элемента комптоновского рассеяния фотона. Часть II (лабораторная работа 3)

Цель работы: освоить преобразование хронологических произведений с помощью теорем Вика; провести анализ слагаемого матричного элемента, которое содержит двойной интеграл и квадратично по заряду. В ходе работы формулируются выводы, на основе которых в дальнейшем (на лекции) будут введены диаграммы Фейнмана.

Введение

В лабораторной работе 2 мы вычислили первое ненулевое слагаемое $S_{fi}^{(1)''}$ ряда Неймана для матричного элемента S -оператора. Оно пропорционально z^2 , т.е. относится ко второму порядку теории возмущений. Такой же порядок малости имеет еще одно слагаемое — $S_{fi}^{(2)'}$ ($\Phi_f \hat{S}^{(2)'} \Phi_i$) — матричный элемент оператора

$$\hat{S}^{(2)'} = \frac{(-i)^2}{2} \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P(\hat{\mathcal{H}}_I'(x) \hat{\mathcal{H}}_I'(y))$$

(обозначения см. в работе 2). Его необходимо вычислить для того, чтобы задача во втором порядке теории возмущений была решена полностью.

Будем рассматривать только такие столкновения частиц, которые сопровождаются изменением импульсов: $p' \neq p, k' \neq k$. Столкновения без изменения импульсов тоже, конечно, представляют интерес; их нужно рассматривать отдельно.

Обозначим $\partial_n \hat{u}(x) = \hat{u}_n(x)$. Рассмотрим $-P(\hat{\mathcal{H}}_I'(x) \hat{\mathcal{H}}_I'(y))/z^2 = P(N(\hat{u}^+(x) \hat{u}_m^-(x) - \hat{u}_m^+(x) \hat{u}^-(x)) N(\hat{u}^+(y) \hat{u}_n^-(y) - \hat{u}_n^+(y) \hat{u}^-(y))) P_A = P_u P_A$,
 $P_u = P_{u1} + P_{u2} + P_{u3} + P_{u4}$, $P_A = P(\hat{A}^m(x) \hat{A}^n(y))$;

$$P_{u1} = P(N(\hat{u}^+(x) \hat{u}_m^-(x)) N(\hat{u}^+(y) \hat{u}_n^-(y))),$$

$$P_{u2} = -P(N(\hat{u}^+(x) \hat{u}_m^-(x)) N(\hat{u}_n^+(y) \hat{u}^-(y))),$$

$$P_{u3} = -P(N(\hat{u}_m^+(x) \hat{u}^-(x)) N(\hat{u}^+(y) \hat{u}_n^-(y))),$$

$$P_{u4} = P(N(\hat{u}_m^+(x) \hat{u}^-(x)) N(\hat{u}_n^+(y) \hat{u}^-(y))).$$

17.1 Задания

Задание 1

Распишите по теореме Вика

Вариант 1: P_{u1} . Вариант 2: P_{u2} . Вариант 3: P_{u4} (не P_{u3} !).

Сразу отбросьте нулевые слагаемые.

Задание 2

Найдите матричный элемент оператора, который содержит

$$\text{Вариант 1: } P_{u10} = N(\hat{u}^+(x)\hat{u}_m(x)\hat{u}^+(y)\hat{u}_n(y)).$$

$$\text{Вариант 2: } P_{u20} = -N(\hat{u}^+(x)\hat{u}_m(x)\hat{u}_n^+(y)\hat{u}(y)).$$

$$\text{Вариант 3: } P_{u40} = N(\hat{u}_m^+(x)\hat{u}(x)\hat{u}_n^+(y)\hat{u}(y)).$$

Указание. Обозначим фотонные операторы $\hat{\Gamma} = \hat{a}_{\lambda'}^{(-)}(k')P_A\hat{a}_{\lambda}^{(+)}(k)$ и рассмотрим $(\Phi_0\hat{\varphi}^{(-)}(p')P_{ui0}\hat{\varphi}^{(+)}(p)\hat{\Gamma}\Phi_0)$, обращая внимание только на мезонные операторы.

Задание 3

Найти вклад в матричный элемент S -оператора того слагаемого, которое содержит

$$\text{Вариант 1: } P_{u12} = \overbrace{\hat{u}^+(x)\hat{u}_n^+(y)} \cdot \overbrace{\hat{u}_m(x)\hat{u}^+(y)};$$

$$\text{Вариант 2: } P_{u22} = -\overbrace{\hat{u}^+(x)\hat{u}(y)} \cdot \overbrace{\hat{u}_m(x)\hat{u}_n^+(y)};$$

$$\text{Вариант 3: } P_{u42} = \overbrace{\hat{u}_m^+(x)\hat{u}(y)} \cdot \overbrace{\hat{u}(x)\hat{u}_n^+(y)}.$$

Задание 4 (только для вариантов 1 и 3)

Покажите, что слагаемые S -оператора, которые содержат операторы

Вариант 1:

$$P_{u11}^{(1)} = \overbrace{\hat{u}^+(x)\hat{u}_n^+(y)} N(\hat{u}_m(x)\hat{u}^+(y)) \text{ и } P_{u11}^{(2)} = \overbrace{\hat{u}_m(x)\hat{u}^+(y)} N(\hat{u}(x)\hat{u}_n^+(y)),$$

Вариант 3:

$P_{u41}^{(1)} = \overbrace{\hat{u}_m^+(x)\hat{u}^+(y)}^+ N(\hat{u}^+(x)\hat{u}_n^+(y))$ и $P_{u41}^{(2)} = \hat{u}^+(x)\overbrace{\hat{u}_n^+(y)}^+ N(\hat{u}_m^+(x)\hat{u}^+(y))$,
 дают одинаковый вклад в матричный элемент.

Указание. Покажите, что $\int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P_{ui1}^{(1)} P_A = \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P_{ui1}^{(2)} P_A$.

Задание 5

Вариант 1: Запишите $\overbrace{\hat{u}^+(x)\hat{u}_n^+(y)}^+ \stackrel{def}{=} \hat{u}^+(x) \overbrace{\frac{\partial}{\partial y^n} \hat{u}^+(y)}^+$ в виде интеграла, вычислите производную.

Вариант 2:

Запишите $\overbrace{\hat{u}^+(x)\hat{u}^+(y)}^+$ в виде интеграла. Запишите $\hat{u}_m^+(x)\overbrace{\hat{u}_n^+(y)}^+$ в виде интеграла, вычислите производные.

Вариант 3: Запишите $\overbrace{\hat{u}_m^+(x)\hat{u}^+(y)}^+$ в виде интеграла, вычислите производную.

На основе результатов заданий 1 — 5 можно сделать следующий вывод.

Вывод 1. Вклад в $(S - 1)_{fi}$ дают только такие слагаемые, в которых для каждого поля число несвернутых операторов под знаком N равно сумме чисел операторов начального и конечного состояний этого поля.

Задание 6

Свертка полевых операторов не является оператором и выносится из скалярного произведения. Рассмотрим оставшиеся операторы в скалярном произведении.

Вариант 1: $F = (\Phi_0 \hat{\varphi}^{(-)}(p') N(\hat{u}_m^+(x)\hat{u}^+(y)) \hat{\varphi}^{(+)}(p) \hat{\Gamma} \Phi_0)$.

Вариант 2: $F^{(1)} = (\Phi_0 \hat{\varphi}^{(-)}(p') N(\hat{u}_m^+(x)\hat{u}_n^+(y)) \hat{\varphi}^{(+)}(p) \hat{\Gamma} \Phi_0)$,

$F^{(2)} = (\Phi_0 \hat{\varphi}^{(-)}(p') N(\hat{u}^+(x)\hat{u}^+(y)) \hat{\varphi}^{(+)}(p) \hat{\Gamma} \Phi_0)$.

Вариант 3: $F = (\Phi_0 \hat{\varphi}^{(-)}(p') N(\hat{u}^+(x)\hat{u}_n^+(y)) \hat{\varphi}^{(+)}(p) \hat{\Gamma} \Phi_0)$.

Начнем с мезонных операторов, в связи с чем фотонная часть кратко обозначена $\hat{\Gamma}$.

Распишите координатные полевые операторы на сумму положительно- и отрицательно-частотных составляющих; раскройте скобки; определите, какие слагаемые не равны нулю. Запишите выражение F в таком виде, чтобы полевые операторы входили только в коммутаторы. Вычислите коммутаторы и определите их физический смысл.

Вывод 2. Мезонный оператор без сопряжения $\hat{u}(x)$ (или $\hat{u}_m(x) = \frac{\partial}{\partial x^m} \hat{u}(x)$) вместе с $\hat{\varphi}^{(+)}(p)$ описывает начальное состояние π^+ -мезона, а оператор с сопряжением $\hat{u}^+(y)$ вместе с $\hat{\varphi}^{(-)}(p')$ — конечное состояние π^+ -мезона.

Задание 7

В задании 6 все мезонные операторы вошли в состав коммутаторов, которые выносятся за пределы скалярного произведения. Рассмотрим фотонные операторы, которые пока остаются под знаком скалярного произведения. Обозначим $G = (\hat{\Phi}_0 \hat{\Gamma} \hat{\Phi}_0)^* = (\hat{\Phi}_0 \hat{a}_{\lambda'}^{(-)}(k') P_A \hat{a}_{\lambda}^{(+)}(k) \hat{\Phi}_0)$, где $P_A = P(\hat{A}^m(x) \hat{A}^n(y))$.

1) Распишите P_A по теореме Вика. Рассмотрите то слагаемое выражения G , в котором фотонные координатные операторы свернуты. Указание: это задание аналогично заданию 3, результат которого сформулирован в Выводе 1.

2) Распишите полевые операторы в N -произведении на сумму положительно- и отрицательно-частотных составляющих; раскройте скобки с учетом N ; определите, какие слагаемые отличны от нуля. Запишите выражение в таком виде, чтобы полевые операторы входили только в коммутаторы. Вычислите коммутаторы и определите их физический смысл.

Вывод 3. Оператор $\hat{A}^m(x)$ из средней части матричного элемента описывает как начальное (вместе с оператором $\hat{a}_{\lambda}^{(+)}(k)$), так и конечное (вместе с оператором $\hat{a}_{\lambda'}^{(-)}(k')$) состояние фотона. То же самое относится к оператору $\hat{A}^n(y)$.

Вывод 4. После раскрытия P -произведений и отбрасывания нулевых слагаемых структура средней части матричного элемента начинает отражать число и типы частиц в начальном и конечном состояниях.

Задание 8

Закончите расчет слагаемого матричного элемента

Вариант 1: $S_{fi}^{(2)'}(P_{u1}, P_A)$. Не забудьте учесть результат задания 4.

Вариант 2: $S_{fi}^{(2)'}(P_{u2}, P_A)$.

Вариант 3: $S_{fi}^{(2)'}(P_{u4}, P_A)$. Не забудьте учесть результат задания 4.

Задание 9

Покажите, что $S_{fi}^{(2)'}(P_{u3}, P_A) = S_{fi}^{(2)'}(P_{u2}, P_A)$.

Задание 10

Найдите $S_{fi}^{(2)'}(P_u, P_A)$, сложив результаты всех вариантов. Не забудьте удвоить $S_{fi}^{(2)'}(P_{u2}, P_A)$ с учетом результата, полученного в задании 9. Прибавьте слагаемое $S_{fi}^{(1)''}$, найденное в лабораторной работе 2. Тем самым будет вычислен матричный элемент рассеяния фотона на π -мезоне во втором порядке теории возмущений.

17.2 Ответы

Задание 1

Вариант 1. $P_{u1} = P_{u10} + P_{u11}^{(1)} + P_{u11}^{(2)} + P_{u12}$,

$$P_{u10} = N(\hat{u}^+(x)\hat{u}_m(x)\hat{u}^+(y)\hat{u}_n(y)), \quad P_{u11}^{(1)} = \hat{u}^+(\overbrace{x\hat{u}_n}^+)(y)N(\hat{u}_m(x)\hat{u}^+(y)),$$

$$P_{u11}^{(2)} = \hat{u}_m(\overbrace{x\hat{u}^+}^+)(y)N(\hat{u}^+(x)\hat{u}_n(y)), \quad P_{u12} = \hat{u}^+(\overbrace{x\hat{u}_n}^+)(y) \cdot \hat{u}_m(\overbrace{x\hat{u}^+}^+)(y).$$

Учтено, что свертки операторов комплексного поля с одинаковым

сопряжением равны нулю: $\hat{u}(\overbrace{x\hat{u}}^+)(y) = 0$, $\hat{u}^+(\overbrace{x\hat{u}^+}^+)(y) = 0$.

Вариант 2. $P_{u2} = P_{u20} + P_{u21}^{(1)} + P_{u21}^{(2)} + P_{u22}$,

$$P_{u20} = -N(\hat{u}^+(x)\hat{u}_m(x)\hat{u}_n^+(y)\hat{u}(y)), \quad P_{u21}^{(1)} = -\hat{u}^+(\overbrace{x\hat{u}}^+)(y)N(\hat{u}_m(x)\hat{u}_n^+(y)),$$

$$P_{u21}^{(2)} = -\hat{u}_m(\overbrace{x\hat{u}_n^+}^+)(y)N(\hat{u}^+(x)\hat{u}(y)), \quad P_{u22} = -\hat{u}^+(\overbrace{x\hat{u}}^+)(y) \cdot \hat{u}_m(\overbrace{x\hat{u}_n^+}^+)(y).$$

Учтено, что свертки операторов комплексного поля с одинаковым сопряжением равны нулю: $\widehat{u}_m(x)\widehat{u}(y) = 0$, $\widehat{u}^+(x)\widehat{u}_n^+(y) = 0$.

Вариант 3. $P_{u4} = P_{u40} + P_{u41}^{(1)} + P_{u41}^{(2)} + P_{u42}$,

$$P_{u40} = N(\widehat{u}_m^+(x)\widehat{u}^+(x)\widehat{u}_n^+(y)\widehat{u}(y)), \quad P_{\widehat{u}41}^{(1)} = \widehat{u}_m^+(x)\widehat{u}(y)N(\widehat{u}^+(x)\widehat{u}_n^+(y)),$$

$$P_{u41}^{(2)} = \widehat{u}^+(x)\widehat{u}_n^+(y)N(\widehat{u}_m^+(x)\widehat{u}(y)), \quad P_{\widehat{u}42} = \widehat{u}_m^+(x)\widehat{u}(y) \cdot \widehat{u}^+(x)\widehat{u}_n^+(y).$$

Учтено, что свертки операторов комплексного поля с одинаковым сопряжением равны нулю: $\widehat{u}(x)\widehat{u}(y) = 0$, $\widehat{u}_m^+(x)\widehat{u}_n^+(y) = 0$.

Задание 2

Матричный элемент равен нулю. Пояснение: в операторе P_{ui0} мысленно запишем каждый из четырех полевых операторов в виде суммы положительно-частотной и отрицательно-частотной составляющих и раскроем все скобки. Каждое из 16-ти слагаемых содержит 4 сомножителя. Среди сомножителей есть по крайней мере 2 оператора одной и той же частотности. Операторы нормально упорядочены, т.е. операторы уничтожения стоят справа от операторов рождения. Из лабораторной работы 2 мы знаем, что $\widehat{b}^{(-)}\widehat{c}^{(-)}\widehat{d}^{(+)}\Phi_0 = 0$, $\Phi_0\widehat{b}^{(-)}\widehat{c}^{(+)}\widehat{d}^{(+)} = 0$ (\widehat{b} , \widehat{c} , \widehat{d} — любые полевые операторы), откуда и следует, что слагаемое с оператором P_{ui0} не дает вклада в матричный элемент S -оператора.

Задание 3

Матричный элемент равен нулю. Пояснение:

$$(\Phi_0\widehat{\varphi}^{(-)}(p')\widehat{\varphi}^{(+)}(p)\widehat{\Gamma}\Phi_0) = \delta_3(\vec{p} - \vec{p}')(\Phi_0\widehat{\Gamma}\Phi_0); \text{ так как } \vec{p}' \neq \vec{p}, \text{ то } \delta_3(\vec{p} - \vec{p}') \equiv 0.$$

Заодно заметим, что по этой же причине слагаемое, в котором свернуты все фотонные операторы, тоже не дает вклада в матричный элемент. Поэтому можно заменить $P_A \stackrel{def}{=} P(\widehat{A}^m(x)\widehat{A}^n(y))$ на $N(\widehat{A}^m(x)\widehat{A}^n(y))$.

Задание 4

Вариант 1.

$$\begin{aligned} \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P_{u11}^{(1)} P_A &= \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy \overbrace{\hat{u}^+(x) \hat{u}_n^+(y)} N(\hat{u}_m^+(x) \hat{u}^+(y)) N(\hat{A}^m(x) \hat{A}^n(y)) = \\ /x \leftrightarrow y, m \leftrightarrow n/ &= \int_{R_4} dy \int_{R_4} dx \overbrace{\hat{u}^+(y) \hat{u}_m^+(x)} N(\hat{u}_n^+(y) \hat{u}^+(x)) N(\hat{A}^n(y) \hat{A}^m(x)) = \\ /меняем порядок интегрирования; меняем местами операторы под \\ знаком свертки и внутри нормального произведения/ & \\ = \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy \overbrace{\hat{u}_m^+(x) \hat{u}^+(y)} N(\hat{u}^+(x) \hat{u}_n^+(y)) N(\hat{A}^m(x) \hat{A}^n(y)) &= \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P_{u11}^{(2)} P_A. \end{aligned}$$

Вариант 3.

$$\begin{aligned} \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P_{u41}^{(1)} P_A &= \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy \overbrace{\hat{u}_m^+(x) \hat{u}^+(y)} N(\hat{u}(x) \hat{u}_n^+(y)) N(\hat{A}^m(x) \hat{A}^n(y)) = \\ /x \leftrightarrow y, m \leftrightarrow n/ &= \int_{R_4} dy \int_{R_4} dx \overbrace{\hat{u}_n^+(y) \hat{u}^+(x)} N(\hat{u}(y) \hat{u}_m^+(x)) N(\hat{A}^n(y) \hat{A}^m(x)) = \\ &= \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy \overbrace{\hat{u}(x) \hat{u}_n^+(y)} N(\hat{u}_m^+(x) \hat{u}(y)) N(\hat{A}^m(x) \hat{A}^n(y)) = \int_{R_4} dx \int_{R_4} dy P_{u41}^{(2)} P_A. \end{aligned}$$

Задание 5

Вариант 1.

$$\begin{aligned} \overbrace{\hat{u}^+(x) \frac{\partial}{\partial y^n} \hat{u}(y)} &= \overbrace{\frac{\partial}{\partial y^n} \hat{u}(y) \hat{u}^+(x)} = \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y^n} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{R_4} \frac{e^{-i\tilde{p}_i(y^l - x^l)}}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} d\tilde{p} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{R_4} \frac{\tilde{p}_n e^{-i\tilde{p}_i(y^l - x^l)}}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} d\tilde{p}. \end{aligned}$$

Вариант 2.

$$\overbrace{\hat{u}^+(x) \hat{u}(y)} = \overbrace{\hat{u}(y) \hat{u}^+(x)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{R_4} \frac{e^{-i\tilde{p}_i(y^l - x^l)}}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} d\tilde{p}.$$

$$\begin{aligned} \widehat{u}_m(x) \widehat{u}_n(y) &= \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n} \widehat{u}(x) \widehat{u}(y) = \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{R_4} \frac{e^{-i\tilde{p}_l(x^l - y^l)}}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} d\tilde{p} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{R_4} \frac{\tilde{p}_m \tilde{p}_n e^{-i\tilde{p}_l(x^l - y^l)}}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} d\tilde{p}. \end{aligned}$$

Вариант 3.

$$\begin{aligned} \widehat{u}_m(x) \widehat{u}(y) &= \frac{\partial}{\partial x^m} \widehat{u}(y) \widehat{u}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{R_4} \frac{e^{-i\tilde{p}_l(y^l - x^l)}}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} d\tilde{p} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{R_4} \frac{\tilde{p}_m e^{-i\tilde{p}_l(y^l - x^l)}}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} d\tilde{p}. \end{aligned}$$

Задание 6

Вариант 1.

$$\begin{aligned} F &= (\Phi_0^* \hat{\varphi}^{(-)}(p') \hat{u}^{(+)}(y) \hat{u}_m^{(-)}(x) \hat{\varphi}^{(+)}(p) \hat{\Gamma} \Phi_0) = \\ &= [\hat{\varphi}^{(-)}(p'), \hat{u}^{(+)}(y)] [\hat{u}_m^{(-)}(x), \hat{\varphi}^{(+)}(p)] (\Phi_0^* \hat{\Gamma} \Phi_0); \\ [\hat{\varphi}^{(-)}(p'), \hat{u}^{(+)}(y)] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ip'_l y^l}}{\sqrt{2p'_0}}; \quad [\hat{u}_m^{(-)}(x), \hat{\varphi}^{(+)}(p)] = \frac{-ip_m}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ip_l x^l}}{\sqrt{2p_0}}. \end{aligned}$$

Вариант 2.

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= (\Phi_0^* \hat{\varphi}^{(-)}(p') \hat{u}_n^{(+)}(y) \hat{u}_m^{(-)}(x) \hat{\varphi}^{(+)}(p) \hat{\Gamma} \Phi_0) = \\ &= [\hat{\varphi}^{(-)}(p'), \hat{u}_n^{(+)}(y)] [\hat{u}_m^{(-)}(x), \hat{\varphi}^{(+)}(p)] (\Phi_0^* \hat{\Gamma} \Phi_0); \\ [\hat{\varphi}^{(-)}(p'), \hat{u}_n^{(+)}(y)] &= \frac{ip'_n}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ip'_l y^l}}{\sqrt{2p'_0}}; \quad [\hat{u}_m^{(-)}(x), \hat{\varphi}^{(+)}(p)] = \frac{-ip_m}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ip_l x^l}}{\sqrt{2p_0}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{(2)} &= (\Phi_0^* \hat{\varphi}^{(-)}(p') \hat{u}^{(+)}(x) \hat{u}^{(-)}(y) \hat{\varphi}^{(+)}(p) \hat{\Gamma} \Phi_0) = \\ &= [\hat{\varphi}^{(-)}(p'), \hat{u}^{(+)}(x)] [\hat{u}^{(-)}(y), \hat{\varphi}^{(+)}(p)] (\Phi_0^* \hat{\Gamma} \Phi_0); \\ [\hat{\varphi}^{(-)}(p'), \hat{u}^{(+)}(x)] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ip'_l x^l}}{\sqrt{2p'_0}}; \quad [\hat{u}^{(-)}(y), \hat{\varphi}^{(+)}(p)] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ip_l y^l}}{\sqrt{2p_0}}. \end{aligned}$$

Вариант 3.

$$F = (\Phi_0 \hat{\varphi}^{(-)}(p') \hat{u}_n^{\dagger(+)}(y) \hat{u}^{(-)}(x) \hat{\varphi}^{\dagger(+)}(p) \hat{\Gamma} \Phi_0) = \\ = [\hat{\varphi}^{(-)}(p'), \hat{u}_n^{\dagger(+)}(y)] [\hat{u}^{(-)}(x), \hat{\varphi}^{\dagger(+)}(p)] (\Phi_0 \hat{\Gamma} \Phi_0);$$

$$[\hat{\varphi}^{(-)}(p'), \hat{u}_n^{\dagger(+)}(y)] = \frac{ip'_n}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ip'_i y^i}}{\sqrt{2p'_0}}; \quad [\hat{u}^{(-)}(x), \hat{\varphi}^{\dagger(+)}(p)] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ip_i x^i}}{\sqrt{2p_0}}.$$

Смысл коммутаторов: выражения, содержащие $e^{-ip_i x^i}$ или $e^{-ip_i y^i}$, пропорциональны волновой функции π^+ -мезона в начальном состоянии, а выражения с $e^{ip'_i x^i}$ или $e^{ip'_i y^i}$ пропорциональны комплексному сопряжению волновой функции π^+ -мезона в конечном состоянии.

Задание 7

2) $G = G_1 + G_2$, где

$$G_1 = [\hat{a}_{\lambda'}^{(-)}(k'), \hat{A}^{m(+)}(x)] \cdot [\hat{A}^{n(-)}(y), \hat{a}_{\lambda}^{(+)}(k)] = \\ = \frac{\varepsilon^{(\lambda')m}(k')}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ik'_i x^i}}{\sqrt{2k'_0}} \cdot \frac{\varepsilon^{(\lambda)n}(k)}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ik_i y^i}}{\sqrt{2k_0}},$$

$$G_2 = [\hat{a}_{\lambda'}^{(-)}(k'), \hat{A}^{n(+)}(y)] \cdot [\hat{A}^{m(-)}(x), \hat{a}_{\lambda}^{(+)}(k)] = \\ = \frac{\varepsilon^{(\lambda')n}(k')}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ik'_i y^i}}{\sqrt{2k'_0}} \cdot \frac{\varepsilon^{(\lambda)m}(k)}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ik_i x^i}}{\sqrt{2k_0}}.$$

Задание 8

Вариант 1.

$$S_{fi}^{(2)'}(P_{u1}, P_A) = \frac{-iz^2 \delta_4(p+k-p'-k')}{16\pi^2 \sqrt{p_0 k_0 p'_0 k'_0}} \times \\ \times \left\{ \frac{p_m \varepsilon^{(\lambda')m}(k') (p_n - k'_n) \varepsilon^{(\lambda)n}(k)}{(p-k')^2 - m^2} + \frac{p_m \varepsilon^{(\lambda)m}(k) (p_n + k_n) \varepsilon^{(\lambda')n}(k')}{(p+k)^2 - m^2} \right\}.$$

Вариант 2.

$$S_{fi}^{(2)'}(P_{u2}, P_A) = \frac{-iz^2 \delta_4(p+k-p'-k')}{32\pi^2 \sqrt{p_0 k_0 p'_0 k'_0}} \times \left\{ \frac{p_m \varepsilon^{(\lambda)m}(k') p'_n \varepsilon^{(\lambda)n}(k)}{(p-k')^2 - m^2} + \frac{p_m \varepsilon^{(\lambda)m}(k) p'_n \varepsilon^{(\lambda)n}(k')}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{(p_m + k_m) \varepsilon^{(\lambda)m}(k') (p_n + k_n) \varepsilon^{(\lambda)n}(k)}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{(p_m - k'_m) \varepsilon^{(\lambda)m}(k) (p_n - k'_n) \varepsilon^{(\lambda)n}(k')}{(p-k')^2 - m^2} \right\}.$$

Вариант 3.

$$S_{fi}^{(2)'}(P_{u1}, P_A) = \frac{-iz^2 \delta_4(p+k-p'-k')}{16\pi^2 \sqrt{p_0 k_0 p'_0 k'_0}} \times \left\{ \frac{p'_m \varepsilon^{(\lambda)m}(k') (p_n + k_n) \varepsilon^{(\lambda)n}(k)}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{p'_m \varepsilon^{(\lambda)m}(k) (p_n - k'_n) \varepsilon^{(\lambda)n}(k')}{(p-k')^2 - m^2} \right\}.$$

Задание 9

Сначала заметим, что P_{u3} может быть получено из P_{u2} заменой $x \leftrightarrow y$, $m \leftrightarrow n$, а P_A при такой замене не изменяется. Области интегрирования по x , y одинаковы, и одинаковы области суммирования по m , n . Наконец, учтем, что под знаками P и N операторы можно переставлять. Поэтому одинаковы и $S_{fi}^{(2)'}(P_{u2}, P_A)$, $S_{fi}^{(2)'}(P_{u3}, P_A)$:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{R}_4} dx \int_{\hat{R}_4} dy P_{u2} P_A &= \\ &= - \int_{\hat{R}_4} dx \int_{\hat{R}_4} dy P(N(\hat{u}_m^+(x) \hat{u}_m^-(x)) N(\hat{u}_n^+(y) \hat{u}_n^-(y))) P(\hat{A}^m(x) \hat{A}^n(y)) = \end{aligned}$$

$/x \leftrightarrow y, m \leftrightarrow n$; после этого меняем порядок интегрирования и порядок сомножителей внутри P /

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\hat{R}_4} dx \int_{\hat{R}_4} dy P(N(\hat{u}_m^\dagger(x)\hat{u}(x))N(\hat{u}^\dagger(y)\hat{u}_n(y)))P(\hat{A}^m(x)\hat{A}^n(y)) = \\
&= \int_{\hat{R}_4} dx \int_{\hat{R}_4} dy P_{u3}P_A.
\end{aligned}$$

Задание 10

$$\begin{aligned}
(S-1)_{fi} &= S_{fi}^{(1)''} + S_{fi}^{(2)'} = \frac{iz^2}{16\pi^2} \frac{\delta_4(p+k-p'-k')}{\sqrt{p_0 p'_0 k_0 k'_0}} \times \\
&\times \left\{ 2\varepsilon^{(\lambda)m}(k)\varepsilon_m^{(\lambda')}(k') - \frac{\varepsilon^{(\lambda)m}(k)\varepsilon^{(\lambda')n}(k')}{(p+k)^2 - m^2} (2p'_n + k'_n)(2p_m + k_m) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\varepsilon^{(\lambda)n}(k)\varepsilon^{(\lambda')m}(k')}{(p-k')^2 - m^2} (2p'_n - k_n)(2p_m - k'_m) \right\}.
\end{aligned}$$

18 Диаграммы Фейнмана и правила соответствия

18.1 Структура матричного элемента S -оператора

Подставим (20) в (4):


$$\begin{aligned}
(S-1)_{fi} &= \sum_{n=1}^{\infty} S_{fi}^{(n)}, \\
S_{fi}^{(n)} &= \frac{(-i)^n}{n!} \int_{\hat{R}_4} dx_1 \dots \int_{\hat{R}_4} dx_n (\Phi_f^* P(\hat{\mathcal{H}}_I(x_1) \dots \hat{\mathcal{H}}_I(x_n)) \Phi_i). \quad (129)
\end{aligned}$$


Хронологическое произведение гамильтонианов взаимодействия называется средней частью матричного элемента.



Допустим, мы хотим изобразить процесс рассеяния $\gamma + \pi^+ \rightarrow \gamma + \pi^+$ на диаграмме. Во-первых, диаграмма содержит внешние линии, число и тип которых определяются числом и типом частиц начального и конечного состояний. Диаграммы, соответствующие


рассматриваемым реакциям, содержат 4 внешние линии: две входящие (фотонная и мезонная) и две выходящие. Во-вторых, у диаграммы имеется так называемая средняя часть, на которой изображаются частицы в виртуальном состоянии. Информация о них содержится в средней части матричного элемента.


18.2 Графическое изображение элементов S -оператора в координатном пространстве

1. Элемент $\hat{S}: \hat{u}(x)$. Элемент диаграммы:  — внешняя мезонная входящая линия. Соответствует π^+ в начальном состоянии или π^- в конечном состоянии.

2. Элемент $\hat{S}: \hat{u}^+(x)$. Элемент диаграммы:  — внешняя мезонная выходящая линия. Соответствует π^+ в конечном или π^- в начальном состоянии.

3. Элемент $\hat{S}: \hat{A}_n(x)$. Элемент диаграммы: ,  — внешние фотонные линии. Соответствуют фотону в начальном или конечном состоянии.

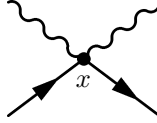
4. Элемент $\hat{S}: \hat{u}^+(x)\hat{u}(y)$. Элемент диаграммы:  — внутренняя мезонная линия. Стрелка направлена от точки оператора с сопряжением к точке оператора без сопряжения, т.е. в данном случае — от x к y . Соответствует движению π^+ -мезона в виртуальном состоянии из x в y или движению π^- в виртуальном состоянии из y в x .

5. Элемент $\hat{S}: \hat{A}_m(x)\hat{A}_n(y)$. Элемент диаграммы:  — внутренняя фотонная линия. Соответствует виртуальному фотону.

Для построения диаграмм наличие производной у оператора и расположение индекса (верхнее, нижнее) несущественны. Например, $\hat{u}(x)$ и $\partial_n \hat{u}(x)$ равноправны; $\hat{A}_n(x)$ и $\hat{A}^n(x)$ равноправны.

18.3 Диаграммы процесса $\gamma + \pi^+ \rightarrow \gamma + \pi^+$

1. В $\hat{S}''^{(1)}$ средняя часть имеет вид $N(\hat{u}^+(x)\hat{u}(x))N(\hat{A}_n^+(x)\hat{A}^n(x))$. Ей соответствует диаграмма



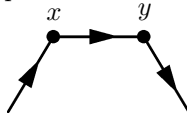
Точка пересечения линий называется вершиной, или узлом диаграммы. В данном случае вершина — двойная, так как в ней сходятся две фотонные линии. Эта диаграмма — первого порядка, так как она содержит одну вершину.

2. В $\hat{S}''^{(2)}$ средняя часть состоит из четырех слагаемых $P_{ui}P_A$, $i = 1, 2, 3, 4$, у которых фотонная часть P_A одинакова, а мезонные части имеют только такие различия, которые не отражаются на диаграммах. Поэтому достаточно рассмотреть какое-нибудь одно слагаемое, например, при $i = 1$. В свою очередь, P_{u1} содержит два слагаемых $P_{u11}^{(1)}$ и $P_{u11}^{(2)}$, которые дают ненулевой вклад в матричный элемент.

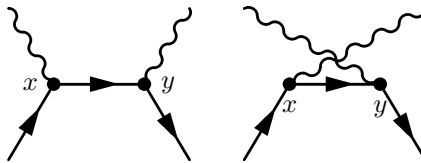
Строим диаграмму на основе

$$P_{u11}^{(1)}P_A = \hat{u}^+(\overbrace{x}) (\partial_n \hat{u}(y)) N((\partial_m \hat{u}(x)) \hat{u}^+(y)) N(\hat{A}^m(x)\hat{A}^n(y)).$$

Сначала рисуют линии заряженных частиц; в данном случае это — линии мезонов:



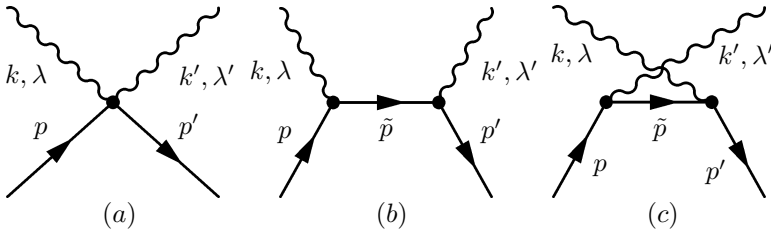
Начинать построение диаграммы с линий заряженных частиц удобно потому, что эти линии непрерывны, что отражает закон сохранения заряда. При построении фотонных линий следует учесть, что, согласно правилу соответствия 3 из пункта 18.2, в вершине x может быть либо входящий, либо выходящий фотон. То же самое справедливо для вершины y . Таким образом, получаем две диаграммы:



Эти диаграммы — топологически различные. Диаграммы, которые можно построить на основе

$P_{u11}^{(2)} P_A = (\partial_m \hat{u}(x)) \hat{u}(y) N(\hat{u}(x)(\partial_n \hat{u}(y))) N(\hat{A}^m(x) \hat{A}^n(y))$, отличаются только тем, что у них левая вершина обозначена y , а правая x . Эти диаграммы топологически эквивалентны уже построенным, и добавлять их к набору диаграмм не нужно.

На основе диаграмм в пространстве координат строят диаграммы в пространстве импульсов:



18.4 Алгоритм расчета матричного элемента S -оператора

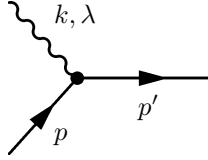
1. Расписать хронологическое произведение с помощью теорем Вика. Оставить только слагаемые, дающие ненулевой вклад в матричный элемент. Расписывать координатные операторы на частотные составляющие не нужно. Можно использовать правило (см. лаб. работу №3, Вывод 1): ненулевой вклад в $(S - 1)_{fi}$ дают только такие слагаемые, в которых число несвернутых операторов для каждого поля равно суммарному числу операторов начального и конечного состояний этого поля.
2. Построить все топологически различные диаграммы.
3. Для каждой диаграммы по правилам соответствия (см. далее) вычислить матричный элемент.
4. Сложить матричные элементы всех диаграмм.

18.5 Правила соответствия для сомножителей матричного элемента

Замечание. Слагаемое матричного элемента может содержать произведение двух или большего числа скалярных произведений. Каж-

дое скалярное произведение записывается в виде суммы произведений компонент. Нужно проследить, чтобы в разных скалярных произведениях были использованы разные индексы суммирования.

1. Одиночной вершине

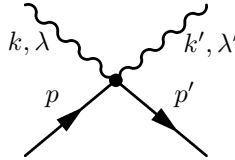


(а также одиночным вершинам с другим расположением линий) ставится в соответствие множитель

$$(2\pi)^4 z(p_n + p'_n) \delta_4(p \pm k - p').$$

Знак «+» соответствует поглощению фотона, «-» — излучению фотона, так что четырехмерная дельта-функция отражает закон сохранения 4-импульса в узле. Замечание: каждой линии, входящей в узел или выходящей из него, тоже соответствуют множители (см. далее).

2. Двойной вершине



ставится в соответствие множитель

$$-(2\pi)^4 z^2 g_{mn} \delta_4(p \pm k - p' \pm k'),$$

где g_{mn} — компоненты метрического тензора, определяемые формулой (22). Индексы m, n соответствуют индексам компонент векторов поляризации $\varepsilon^{(\lambda)m}$, $\varepsilon^{(\lambda')n}$, которые входят в множители, соответствующие фотонным линиям (см. далее). Таким образом, 4-векторы поляризации скалярно перемножаются.


3. Внутренней мезонной линии



соответствует со-

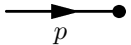
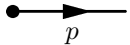
множитель

$$\frac{i}{(2\pi)^4} \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon}.$$



4. Внутренней фотонной линии  соответствует
 множитель

$$-\frac{i}{(2\pi)^4} g^{mn} \frac{d\tilde{k}}{\tilde{k}^2 + i\epsilon}.$$

Если эта линия соединяет одиночные вершины, то m, n соответствуют индексам у $p_m + p'_m, p_n + p'_n$. Если она соединяет двойные вершины, то в них должны быть множители g_{mi}, g_{nj} .

5. Внешним мезонным линиям  или  со-
 ответствует множитель

$$1/(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_0}.$$

6. Внешним фотонным линиям  или  со-
 ответствует множитель

$$\varepsilon^{(\lambda)n}(k)/(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k_0}.$$

Индекс n соответствует индексу компонент импульсов пи-мезона для одиночной вершины или индексу компоненты тензора g_{mn} для двойной вершины.

7. Полученное скалярное произведение умножить на $(-i)^\nu 2^{d-b}$, где ν — порядок диаграммы, d — число двойных вершин в диаграмме; b — число пар двойных вершин, соединенных двумя фотонными линиями. Произведение проинтегрировать по всем внутренним импульсам. Найти предел при $\epsilon \rightarrow 0$.

19 Расчет матричного элемента комптоновского рассеяния фотона с помощью диаграмм Фейнмана (лабораторная работа 4)

Цель работы: расчет матричного элемента комптоновского рассеяния фотона на заряженной скалярной частице («пи-мезоне») в низшем неисчезающем порядке теории возмущений (борновское приближение) с помощью диаграмм Фейнмана.

19.1 Задание

Дан полный набор топологически различных диаграмм для 2-го порядка теории возмущений процесса $\gamma + \pi^+ \rightarrow \gamma + \pi^+$ (диаграммы (a), (b), (c) в п. 18.3). Вычислите матричный элемент S -оператора.

19.2 Ответы

$$S_a = \frac{iz^2}{8\pi^2} \frac{\varepsilon^{(\lambda)m}(k)\varepsilon_m^{(\lambda')}(k')}{\sqrt{p^0 p'^0 k^0 k'^0}} \delta_4(p+k-p'-k'), \quad (130)$$

что совпадает с ответом к работе №2.

$$S_b = \frac{(-i)^2 2^0}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p^0}} \frac{\varepsilon^{(\lambda)m}(k)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k^0}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p'^0}} \frac{\varepsilon^{(\lambda')n}(k')}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k'^0}} \times \\ \times \int_{R^4} d\tilde{p} z (2\pi)^4 (p_m + \tilde{p}_m) \delta_4(p+k-\tilde{p}) \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} z (2\pi)^4 (\tilde{p}_n + p'_n) \times \\ \times \delta_4(\tilde{p} - k' - p').$$

$$S_c = \frac{(-i)^2 2^0}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p^0}} \frac{\varepsilon^{(\lambda')m}(k')}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k'^0}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p'^0}} \frac{\varepsilon^{(\lambda)n}(k)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k^0}} \times \\ \times \int_{R^4} d\tilde{p} z (2\pi)^4 (p_m + \tilde{p}_m) \delta_4(p-k'-\tilde{p}) \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\epsilon} z (2\pi)^4 (\tilde{p}_n + p'_n) \times \\ \times \delta_4(\tilde{p} + k - p').$$

После интегрирования по \tilde{p} получим

$$S_b = \frac{-iz^2 \delta_4(p+k-p'-k')}{16\pi^2 \sqrt{p^0 p'^0 k^0 k'^0}} \frac{\varepsilon^{(\lambda)m}(k)(2p_m + k_m) \varepsilon^{(\lambda')n}(k')(2p'_n + k'_n)}{(p+k)^2 - m^2};$$

$$S_c = \frac{-iz^2 \delta_4(p+k-p'-k')}{16\pi^2 \sqrt{p^0 p'^0 k^0 k'^0}} \frac{\varepsilon^{(\lambda')m}(k')(2p_m - k'_m) \varepsilon^{(\lambda)n}(k)(2p'_n - k_n)}{(p-k')^2 - m^2};$$

$$\begin{aligned}
(S-1)_{fi} &= \\
&= S_a + S_b + S_c = \frac{iz^2\delta_4(p+k-p'-k')}{16\pi^2\sqrt{p^0p'^0k^0k'^0}} \left\{ 2\varepsilon^{(\lambda)m}(k)\varepsilon_m^{(\lambda')}(k') - \right. \\
&\quad - \varepsilon^{(\lambda)m}(k)(2p_m+k_m)\varepsilon^{(\lambda')n}(k')(2p'_n+k'_n)\frac{1}{(p+k)^2-m^2} - \\
&\quad \left. - \varepsilon^{(\lambda)m}(k')(2p_m-k'_m)\varepsilon^{(\lambda)n}(k)(2p'_n-k_n)\frac{1}{(p-k')^2-m^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Это совпадает с ответом к работе №3.

20 Построение диаграмм Фейнмана для процесса $\pi^+ + \pi^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+$ (лабораторная работа 5)

Цель работы: самостоятельное построение диаграмм Фейнмана для процесса рассеяния двух пи-мезонов с учетом только электромагнитного взаимодействия.

Следует провести анализ структуры матричного элемента S -оператора и построить диаграммы Фейнмана, которые могут давать вклад в матричный элемент, до 4-го порядка включительно.

20.1 Указания и задания

1) Гамильтониан взаимодействия — в точности такой же, как в задаче о комптоновском рассеянии фотона на пи-мезоне:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}_I(x) &= \hat{\mathcal{H}}'_I(x) + \hat{\mathcal{H}}''_I(x), \quad \hat{\mathcal{H}}''_I(x) = -z^2 N \left(\hat{u}^+(x)\hat{u}(x)\hat{A}_n(x)\hat{A}^n(x) \right), \\
\hat{\mathcal{H}}'_I(x) &= izN \left(\hat{u}^+(x)\partial_n\hat{u}(x) - (\partial_n\hat{u}^+(x))\hat{u}(x) \right) \hat{A}^n(x).
\end{aligned}$$

2) Обозначим начальные 4-импульсы p_1, p_2 , конечные — p_3, p_4 .

Запишите векторы начального и конечного состояний Φ_i, Φ_f, Φ_f^* .

3) Выясните, дает ли вклад в матричный элемент слагаемое ряда Неймана для S -оператора с однократным интегралом.

4) Рассмотрим слагаемое $S_f^{(2)'}$ с двойным интегралом, причем в каждом гамильтониане учитывается только слагаемое, линейное по

заряду, т.е. $\hat{\mathcal{H}}'_I$. Распишите хронологические произведения по теореме Вика, оставьте только те слагаемые, которые могут дать вклад в матричный элемент.

Постройте топологически различные диаграммы в координатном и импульсном пространствах. Укажите порядок диаграмм и соответствующий им порядок теории возмущений.

5) Рассмотрим слагаемое $S_{fi}^{(2)''}$ с двойным интегралом, в каждом из которых учитывается только слагаемое гамильтониана, квадратичное по заряду, т.е. $\hat{\mathcal{H}}''_I(x)$. Прodelайте то же, что в пункте 4, ограничившись диаграммой в пространстве координат.

6) Рассмотрим слагаемое с тройным интегралом, причем в двух гамильтонианах учитывается слагаемое $\hat{\mathcal{H}}'_I$, а в третьем гамильтониане — слагаемое $\hat{\mathcal{H}}''_I$. Постройте топологически различные диаграммы в координатном пространстве, укажите порядок диаграмм и порядок теории возмущений.

7) Рассмотрим слагаемое $S_{fi}^{(4)'}$ с 4-кратным интегралом, причем в каждом гамильтониане учитываем только слагаемое, линейное по заряду, т.е. $\hat{\mathcal{H}}'_I$. Проанализируйте среднюю часть матричного элемента, постройте топологически различные диаграммы в координатном пространстве, укажите порядок диаграмм и порядок теории возмущений.

20.2 Ответы

$$2) \Phi_i = \hat{\varphi}^{(+)}(p_1) \hat{\varphi}^{(+)}(p_2) \Phi_0, \quad \Phi_f = \hat{\varphi}^{(+)}(p_3) \hat{\varphi}^{(+)}(p_4) \Phi_0, \\ \Phi_f^* = \Phi_0^* \hat{\varphi}^{(-)}(p_3) \hat{\varphi}^{(-)}(p_4).$$

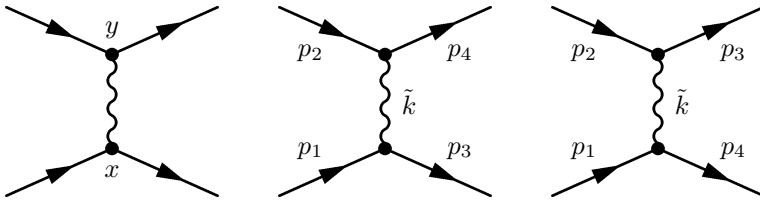
3) Для того, чтобы увидеть, что слагаемые ряда Неймана с однократным интегралом не дают вклада в матричный элемент для данного процесса, достаточно отметить любое из следующих двух обстоятельств: число несвернутых мезонных координатных операторов меньше 4-х (суммарное число мезонных операторов начального и конечного состояний); имеются несвернутые фотонные координатные операторы, тогда как в начальном и конечном состояниях фотонов нет.

4) Ненулевой матричный элемент имеют операторы типа

$$\hat{\varphi}^{(-)}(p_3) \hat{\varphi}^{(-)}(p_4) N(\hat{u}(x) \hat{u}_m(x) \hat{u}(y) \hat{u}_n(y)) \overbrace{\hat{A}^m(x) \hat{A}^n(y)} \hat{\varphi}^{(+)}(p_1) \hat{\varphi}^{(+)}(p_2).$$

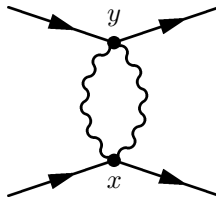
Они содержат нормальное произведение четырех мезонных операторов и не содержат несвернутых фотонных операторов. Другие операторы этого типа отличаются расстановкой сопряжений и индексов m, n , означающих дифференцирование, в мезонных операторах; они не приводят к новым диаграммам.

Получается одна диаграмма в координатном пространстве, которой соответствуют две топологически различные диаграммы в пространстве импульсов:



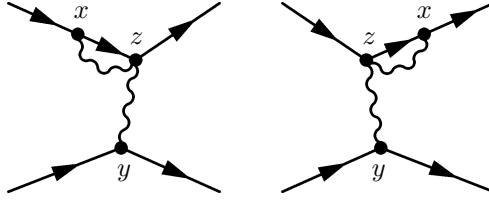
Эти диаграммы — второго порядка (у каждой — две вершины) и они относятся ко второму порядку теории возмущений (матричный элемент пропорционален z^2).

5) Получается диаграмма 2-го порядка (две вершины);

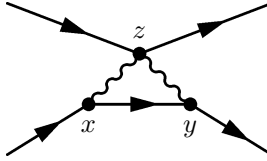


обе вершины — двойные, и диаграмма соответствует четвертому порядку теории возмущений $((S - 1)_{fi} \sim z^4)$.

6) Средняя часть матричного элемента состоит из 4-х слагаемых вида $P_{u1}P_A$, где $P_{u1} = P(N(\hat{u}^+(x)\hat{u}_m(x))N(\hat{u}^+(y)\hat{u}_n(y))N(\hat{u}^+(z)\hat{u}(z)))$, $P_A = \hat{A}^m(x)\hat{A}^l(z)\hat{A}^n(y)\hat{A}^l(z)$. Распишем P_{u1} по теореме Вика. Слагаемые $\hat{u}^+(x)\hat{u}(z)N(\hat{u}_m(x)\hat{u}^+(y)\hat{u}_n(y)\hat{u}^+(z))P_A$, $\hat{u}_m(x)\hat{u}(z)N(\hat{u}^+(x)\hat{u}^+(y)\hat{u}_n(y)\hat{u}(z))P_A$ приводят к диаграммам



Слагаемое $\hat{u}^+(x)\hat{u}_n^+(y)N(\hat{u}_m^+(x)\hat{u}^+(y)\hat{u}^+(z)\hat{u}^+(t))P_A$ приводит к диаграмме



Все эти диаграммы — 3-го порядка и соответствуют четвертому порядку теории возмущений.

7) Средняя часть матричного элемента имеет структуру $P_u P_A$, где

$$P_A = P \left(\hat{A}^k(x)\hat{A}^l(y)\hat{A}^m(z)\hat{A}^n(t) \right),$$

$P_u = P_{u_1} + \dots + P_{u_{16}}$; для построения диаграмм достаточно рассмотреть какое-нибудь одно слагаемое, например,

$$P_{u_1} = P \left(N(\hat{u}^+(x)\hat{u}_k^+(x))N(\hat{u}^+(y)\hat{u}_l^+(y))N(\hat{u}^+(z)\hat{u}_m^+(z))N(\hat{u}^+(t)\hat{u}_n^+(t)) \right).$$

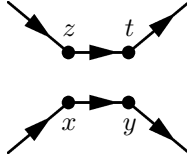
Другие слагаемые могут отличаться знаком, расстановкой аргументов и символов дифференцирования и не приводят к топологически новым диаграммам.

Если расписать P_{u_1} по теореме Вика, то получатся слагаемые следующих типов.

а) У всех четырех свернутых операторов — разные аргументы, например:

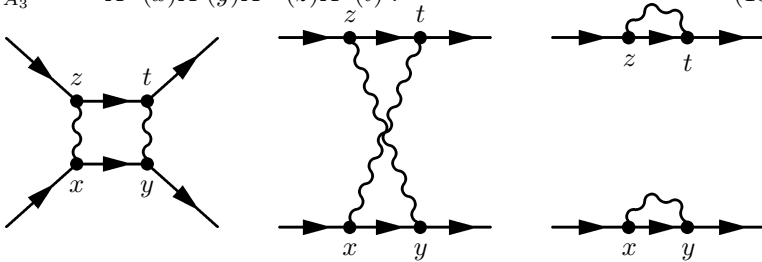
$$\hat{u}^+(x)\hat{u}_l^+(y)\hat{u}^+(z)\hat{u}_n^+(t)N \left(\hat{u}_k^+(x)\hat{u}^+(y)\hat{u}_m^+(z)\hat{u}^+(t) \right).$$

Строим сначала мезонные линии:



В зависимости от того, как скоμμутированы фотонные операторы, получаются разные диаграммы:

$$\begin{aligned}
 P_{A_1} &= \overbrace{\hat{A}^k(x)\hat{A}^m(z)} \overbrace{\hat{A}^l(y)\hat{A}^n(t)}, & P_{A_2} &= \overbrace{\hat{A}^k(x)\hat{A}^n(t)} \overbrace{\hat{A}^l(y)\hat{A}^m(z)}, \\
 P_{A_3} &= \overbrace{\hat{A}^k(x)\hat{A}^l(y)} \overbrace{\hat{A}^m(z)\hat{A}^n(t)} : & & (131)
 \end{aligned}$$

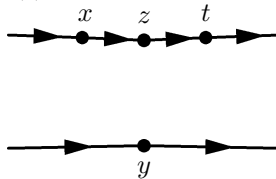


Две мезонные линии, в состав которых входят начальные и конечные частицы реакции $\pi^+ + \pi^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+$, назовем *основными линиями*. В этих диаграммах каждая основная линия содержит одну внутреннюю мезонную линию. Третья из этих диаграмм соответствует переходу без взаимодействия и, конечно, без изменения 4-импульсов частиц, и вклада в матричный элемент перехода $\Phi_i \rightarrow \Phi_f$ при $f \neq i$ не дает.

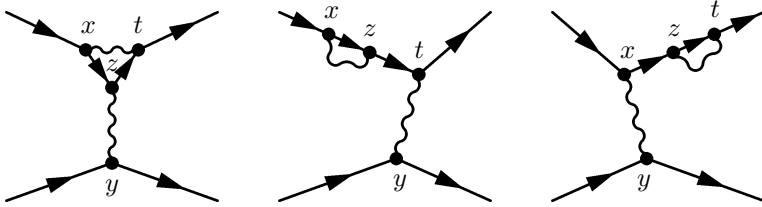
б) Из 4-х свернутых операторов у двух (конечно, входящих в разные свертки) — одинаковые аргументы, а у двух остальных — разные:

$$\hat{u}^+(x)\hat{u}_m^+(z)\hat{u}^+(z)\hat{u}_n^+(t)N\left(\hat{u}_k^+(x)\hat{u}^+(t)\hat{u}_l^+(y)\hat{u}^+(y)\right).$$

Мезонные линии выглядят так:



Получаются диаграммы, на которых обе внутренние мезонные линии входят в состав одной и той же основной линии:

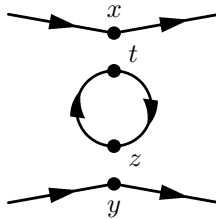


Первая из этих диаграмм соответствует фотонному оператору P_{A_2} (см. формулы (131)), вторая — P_{A_1} , третья — P_{A_3} .

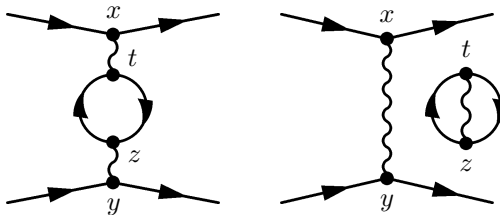
в) Операторы с одинаковым аргументом (например, z) свернуты с операторами, у которых аргумент тоже одинаков (например, t):

$$P_{u2} = \hat{u}^+(z) \hat{u}_n(t) \hat{u}_m(z) \hat{u}^+(t) N \left(\hat{u}^+(x) \hat{u}_k(x) \hat{u}^+(y) \hat{u}_l(y) \right).$$

В этом случае мезонная часть диаграмм отличается тем, что, кроме двух основных непрерывных линий, имеется третья непрерывная линия в виде петли:



Учет фотонных операторов приводит к диаграммам следующих двух типов:



Петля на первой из этих диаграмм соответствует образованию и аннигиляции виртуальной пары мезонов.

Вторая диаграмма — несвязная; левая ее часть (с вершинами x, y) совпадает с диаграммой 2-го порядка, уже построенной в п. 4), а правая часть («устрица» с вершинами z, t) в данном контексте не имеет смысла.

Все построенные в п. 7) диаграммы — 4-го порядка, соответствующие четвертому порядку теории возмущений (кроме последней, несвязной диаграммы, которую не нужно учитывать).

21 Сечение комптоновского рассеяния фотона на π -мезоне

21.1 Упрощение S_{fi} в лабораторной системе отсчета

Будем называть лабораторной системой отсчета ту систему, в которой пи-мезон до рассеяния покоился. В этой системе начальный импульс мезона равен нулю: $\vec{p} = 0$.

Рассмотрим слагаемые S_b, S_c матричного элемента, формулы для которых были получены в §19. Распишем входящие в них скалярные произведения: $p^m \varepsilon_m^{(\lambda)}(k) = p^0 \varepsilon_0^{(\lambda)}(k) - \vec{p} \vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k) = p^0 \varepsilon_0^{(\lambda)}(k)$; $k^m \varepsilon_m^{(\lambda)}(k) = k^0 \varepsilon_0^{(\lambda)}(k) - \vec{k} \vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k) = k^0 \varepsilon_0^{(\lambda)}(k)$. $\vec{k} \vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k) = 0$, так как вектор \vec{k} направлен вдоль $\vec{\varepsilon}^{(3)}$, а $\lambda = 1$ или 2 . Аналогично, $k'^m \varepsilon_m^{(\lambda')}(k') = k'^0 \varepsilon_0^{(\lambda')}(k')$.

Согласно (81), при $\lambda = 1, 2$ $\varepsilon_0^{(\lambda)} = 0$. Поэтому $S_b = 0, S_c = 0$.

21.2 Сечение, дифференциальное по импульсам рассеянных частиц

Сечение σ_{fi} , которое мы до сих пор рассматривали — это сечение столкновения с переходом из состояния i в определенное квантовомеханическое состояние f . Рассмотрим рассеяние, при котором 3-мерные импульсы \vec{p}' и \vec{k}' оказываются в интервалах шириной соответственно $d\vec{p}'$ и $d\vec{k}'$. Обозначим $N_{\text{сост}}$ число состояний в «объеме» $d\vec{p}' d\vec{k}'$. Так как этот объем мал, то принадлежащие ему состояния практически не отличаются друг от друга, и сечения σ_{fi} для всех этих состояний одинаковы. Тогда дифференциальное сечение равно

$$d^6\sigma = \sigma_{fi} N_{\text{сост}}; \quad (132)$$

в теории столкновений эта формула известна под названием «золотое правило №2».

Очевидно, что число состояний пропорционально вышеупомянутому «объему»: $N_{\text{сост}} \propto d\vec{p}' d\vec{k}'$. Найдем коэффициент пропорциональности. Из квантовой механики известно, что точный импульс частица может иметь только в бесконечной области. Именно для такой области были получены все формулы, в том числе формула (20) для S -оператора. Это было сделано с целью упрощения дальнейших вычислений. Но в формуле (2) подразумевается, что W — вероятность перехода хотя и в большой, но конечной области пространства и времени. Пусть область пространства имеет форму куба с ребром L ; $V = L^3$. Частицы, находящиеся в конечной области, имеют дискретный энергетический спектр. Вообще говоря, спектр зависит от типа граничных условий. Однако для подсчета числа состояний нужно знать только «расстояния» между соседними уровнями. Интуитивно понятно, что эти расстояния не должны зависеть от условий на границе макроскопической области. Поэтому можно использовать те граничные условия, которые нам удобны, — например, периодические условия $\psi(x + L, y, z) = \psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z + L) = \psi(x, y, z)$. Движение частицы внутри области считаем свободным и описываем плоской волной (107): $\psi \propto e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}'\vec{r} - E't)}$. Применив граничные условия, находим значения проекций импульсов: $p'_x = (2\pi\hbar/L)n_x$, где $n_x \geq 1$ — целое число; далее полагаем $\hbar = 1$. Аналогичные формулы получаются для p'_y, p'_z и для \vec{k}' . Ширина интервала проекции импульса равна $\Delta p'_x = 2\pi/L$. Число состояний в интервале $\Delta p'_x$ равно $N_{\text{сост. } x} = \frac{dp'_x}{\Delta p'_x} = \frac{L}{2\pi} dp'_x$. Число конечных состояний пи-мезона равно $N_{\text{сост. } \pi} = (V/(2\pi)^3) d\vec{p}'$. Формула для числа состояний фотона фиксированной поляризации аналогична: $N_{\text{сост. } \gamma} = (V/(2\pi)^3) d\vec{k}'$. Число конечных состояний системы $\pi + \gamma$ равно

$$N_{\text{сост.}} = N_{\text{сост. } \pi} N_{\text{сост. } \gamma} = (V^2/(2\pi)^6) d\vec{p}' d\vec{k}'. \quad (133)$$

21.3 Переход к конечной пространственно-временной области

Использование бесконечной пространственно-временной области $V = \infty, T = \infty$ привело к появлению в составе σ_{fi} ряда неприемлемых выражений: квадрата дельта-функции $(\delta_4(p + k - p' - k'))^2$, не

имеющего математического смысла; бесконечных норм $\|\Phi_i\|$, $\|\Phi_f\|$; нулевых концентраций частиц и, как следствие, нулевого потока J . Все эти проблемы решаются путем перехода к конечной области.

Каждое слагаемое матричного элемента $(S - 1)_{fi}$ содержит множитель в виде 4-мерной дельта-функции $\delta_4(q)$, где $q = p + k - p' - k'$. Выделим этот множитель: $(S - 1)_{fi} = \delta_4(q)M_{fi}$. Согласно (2), (5),

$$\sigma_{fi} = \frac{\delta_4(q)\delta_4(q)}{VT} \frac{|M_{fi}|^2}{J\|\Phi_i\|^2\|\Phi_f\|^2}. \quad (134)$$

Рассмотрим первый сомножитель в правой части. Напомним, что дельта-функцию можно представить в виде интеграла Фурье

$$\delta_4(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{R_4} e^{iq_i x^i} dx.$$

Сделаем шаг назад и одну из дельта-функций заменим интегралом $\delta_4(q; T, V)$ по большой, но все же конечной области 4-пространства:

$$\delta_4(q) \rightarrow \delta_4(q; T, V) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-T/2}^{T/2} dx_0 \int_V dV e^{iq_i x^i}.$$

Воспользовавшись свойством дельта-функции $f(x)\delta(x-a) = f(a) \times \delta(x-a)$, получим $\delta_4(q; T, V)\delta_4(q) = \delta_4(0; T, V)\delta_4(q) = VT\delta_4(q)/(2\pi)^4$; тогда

$$\frac{\delta_4(q)\delta_4(q)}{VT} \rightarrow \delta_4(q)/(2\pi)^4. \quad (135)$$

Применим аналогичный переход к конечному V для вычисления норм векторов состояния. Рассмотрим

$$\|\Phi_i\|^2 = (\Phi_i^* \Phi_i) = (\Phi_0^* \hat{a}_\lambda^{(-)}(k) \hat{\varphi}^{(-)}(p) \hat{a}_\lambda^{(+)}(k) \hat{\varphi}^{(+)}(p) \Phi_0) =$$

$$[\hat{a}_\lambda^{(-)}(k), \hat{a}_\lambda^{(+)}(k)][\hat{\varphi}^{(-)}(p), \hat{\varphi}^{(+)}(p)].$$

В каждом коммутаторе оба оператора относятся к одному и тому же состоянию. Сначала рассмотрим коммутатор операторов, относящихся к разным импульсам: $[\hat{\varphi}^{(-)}(p), \hat{\varphi}^{(+)}(p')] = \delta_3(\vec{p} - \vec{p}')$. Он был получен, как и другие формулы, для случая бесконечного V , и не определен при $p' = p$: $\delta_3(\vec{p} - \vec{p}') = \delta_3(0) = \infty$. Для перехода к конечному V снова используем интегральное представление

дельта-функции:

$$\delta_3(\vec{p} - \vec{p}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R_3} e^{i(\vec{p} - \vec{p}')\vec{r}} d\vec{r} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V e^{i(\vec{p} - \vec{p}')\vec{r}} d\vec{r}.$$

При $p' = p$ $[\hat{\varphi}^{(-)}(p), \hat{\varphi}^{(+)}(p)] \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d\vec{r} = \frac{V}{(2\pi)^3}$.

Аналогично, $[\hat{a}_\lambda^{(-)}(k), \hat{a}_\lambda^{(+)}(k)] \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3}$. Таким образом,

$$\|\Phi_i\|^2 = \frac{V^2}{(2\pi)^6}; \quad \text{аналогично, } \|\Phi_f\|^2 = \frac{V^2}{(2\pi)^6}. \quad (136)$$

Найдем поток сталкивающихся частиц $J = n_\pi n_\gamma v$. Согласно §1, до столкновения в объеме V содержалась одна частица каждого сорта: $n_\pi = 1/V$, $n_\gamma = 1/V$. Скорость фотонов $v = c = 1$, поэтому

$$J = 1/V^2. \quad (137)$$

Подставив (133) — (137) в (132), получим

$$d^6\sigma = (2\pi)^2 \delta_4(p + k - p' - k') |M_{fi}|^2 d\vec{p}' d\vec{k}'. \quad (138)$$

21.4 Сечение, дифференциальное по телесному углу рассеянного фотона

Для нахождения этого сечения нужно проинтегрировать найденное сечение $d^6\sigma$ по всем проекциям конечного импульса пи-мезона \vec{p}' и по модулю $|\vec{k}'| = k'_0$ конечного импульса фотона.

По импульсу мезона проинтегрировать легко, так как в состав $d^6\sigma$ входит четырехмерная дельта-функция $\delta_4(p + k - p' - k') = \delta_3(\vec{p}' + \vec{k}' - \vec{p} - \vec{k}) \delta(p'_0 + k'_0 - p_0 - k_0)$. В результате получим

$$\begin{aligned} d^3\sigma &= \int_{R_3} d^6\sigma d\vec{p}' = \\ &= (2\pi)^2 \delta[p'_0(p, k, k') + k'_0 - p_0 - k_0] |M_{fi}(p, k, p'(p, k, k'), k')|^2 d\vec{k}'. \end{aligned}$$

Обратите внимание, что входящие в правую часть компоненты 4-импульса p' (p'_0 в аргументе дельта-функции; разные компоненты в аргументе M) должны быть выражены через компоненты 4-векторов p, k, k' .

Для интегрирования по k'_0 распишем элемент объема пространства импульсов $d\vec{k}'$ в сферических импульсных координатах: $d\vec{k}' = k_0'^2 dk'_0 d\Omega$, где $d\Omega$ — элемент телесного угла вблизи направления \vec{k} . Тогда

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega} = (2\pi)^2 \int_0^\infty \delta[k'_0 - (p_0 + k_0 - p'_0)] |M_{fi}|^2 k_0'^2 dk'_0.$$

Выразим дельта-функцию сложного аргумента $\delta[\varphi(k'_0)]$, где $\varphi(k'_0) = k'_0 - (p_0 + k_0 - p'_0)$, через дельта-функцию простого аргумента. Для этого необходимо найти нули функции $\varphi(k'_0)$, для чего, как уже отмечалось, нужно выразить p'_0 через k'_0 . Запишем релятивистскую связь энергии с импульсом: $p'_0 = \sqrt{|\vec{p}'|^2 + m^2}$; из закона сохранения импульса $\vec{p} + \vec{k} = \vec{p}' + \vec{k}'$ с учетом $\vec{p} = 0$ найдем $\vec{p}' = \vec{k} - \vec{k}'$, $|\vec{p}'|^2 = k_0^2 + k_0'^2 - 2k_0k'_0 \cos\theta$, где θ — угол между \vec{k} и \vec{k}' , т.е. угол рассеяния фотона. Итак,

$$\varphi(k'_0) = k'_0 + \sqrt{k_0^2 + k_0'^2 - 2k_0k'_0 \cos\theta + m^2} - m - k_0;$$

учтено, что $p_0 = m$. Из уравнения $\varphi(a) = 0$ находим $a = k_0 m / [m + k_0(1 - \cos\theta)]$. Таким образом, у функции $\varphi(k'_0)$ всего один нуль $k'_0 = a$. Поэтому дельта-функцию можно расписать по формуле $\delta[\varphi(k'_0)] = \delta(k'_0 - a) / |\frac{d\varphi(k'_0)}{dk'_0}|_{k'_0=a}$. Вычисляем производную: $\frac{d\varphi}{dk'_0} = (p'_0 + k'_0 - k_0 \cos\theta) / p'_0$; упрощаем с помощью закона сохранения энергии $p'_0 + k'_0 = m + k_0$: $\frac{d\varphi}{dk'_0} = [m + k_0(1 - \cos\theta)] / p'_0$. Тогда сечение равно

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^2 |M_{fi}|^2 k_0'^2 p'_0}{m + k_0(1 - \cos\theta)}.$$

Так как, согласно (130), $M_{fi} = iz^2 \varepsilon^{(\lambda)n}(k) \varepsilon_n^{(\lambda')}(k') / (8\pi^2 \sqrt{p_0 p'_0 k_0 k'_0})$, то $\frac{d^2\sigma}{d\Omega} = z^4 k_0' (\varepsilon^{(\lambda)n}(k) \varepsilon_n^{(\lambda')}(k'))^2 / \{4(2\pi)^2 m k_0 [m + k_0(1 - \cos\theta)]\}$. Подставив сюда найденное $k'_0 = a$, получим искомую формулу

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega} = \frac{z^4 (\varepsilon^{(\lambda)n}(k) \varepsilon_n^{(\lambda')}(k'))^2}{(4\pi)^2 [m + k_0(1 - \cos\theta)]^2}.$$

Аналогичная формула для сечения рассеяния фотона на электроне с учетом спина электрона называется формулой Клейна—Нишины—Тамма.

21.5 Усреднение по λ и суммирование по λ'

Эти операции выполняются в том случае, если до рассеяния фотон не поляризован (т.е. его состояние представляет собой равновероятную смесь двух поляризаций), а поляризация рассеянного фотона нас не интересует.

$$\text{Обозначим } \mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\lambda'=1}^2 (\varepsilon^{(\lambda)n}(k) \varepsilon_n^{(\lambda')}(k'))^2.$$

Учтем, что $\varepsilon^{(\lambda)0}(k) = 0$, $\varepsilon_0^{(\lambda')}(k') = 0$, поэтому $\varepsilon^{(\lambda)n}(k) \varepsilon_n^{(\lambda')}(k') = \varepsilon^{(\lambda)0}(k) \varepsilon_0^{(\lambda')}(k') - \vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k) \vec{\varepsilon}^{(\lambda')}(k') = -\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k) \vec{\varepsilon}^{(\lambda')}(k')$. Заметим, что $\sum_{\lambda'=1}^3 (\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k) \vec{\varepsilon}^{(\lambda')}(k'))^2 = 1$, так как это — сумма квадратов проекций единичного вектора $\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k)$ на оси прямоугольной системы координат, образованной векторами $\vec{\varepsilon}^{(1)}(k')$, $\vec{\varepsilon}^{(2)}(k')$, $\vec{\varepsilon}^{(3)}(k')$.

Тогда $\sum_{\lambda'=1}^2 (\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k) \vec{\varepsilon}^{(\lambda')}(k'))^2 = 1 - (\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k) \vec{\varepsilon}^{(3)}(k'))^2$,

$\mathcal{E} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 (\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k) \vec{\varepsilon}^{(3)}(k'))^2$. Аналогично, заметим, что

$\sum_{\lambda=1}^3 (\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k) \vec{\varepsilon}^{(3)}(k'))^2 = 1$ (сумма квадратов проекций единичного вектора $\vec{\varepsilon}^{(3)}(k')$ на оси системы, образованной векторами $\vec{\varepsilon}^{(1)}(k)$, $\vec{\varepsilon}^{(2)}(k)$, $\vec{\varepsilon}^{(3)}(k)$). Тогда $\mathcal{E} = \frac{1}{2} [1 + (\vec{\varepsilon}^{(3)}(k) \vec{\varepsilon}^{(3)}(k'))^2]$. Векторы $\vec{\varepsilon}^{(3)}(k)$, $\vec{\varepsilon}^{(3)}(k')$ параллельны соответственно \vec{k} и \vec{k}' . Поэтому угол между ними тоже равен θ , и $\vec{\varepsilon}^{(3)}(k) \vec{\varepsilon}^{(3)}(k') = \cos \theta$. Тогда $\mathcal{E} = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta)$, и искомое сечение рассеяния неполяризованных фотонов имеет вид

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega} = \frac{z^4}{2(4\pi)^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{[m + k_0(1 - \cos \theta)]^2}.$$

21.6 Интегральное сечение

Интегральное сечение равно $\sigma = \int_{4\pi} \frac{d^2\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{d^2\sigma}{d\Omega} d \cos \theta$. Ограничимся случаем $k_0 \ll m$. Тогда справедливо приближение $\frac{d^2\sigma}{d\Omega} \approx \frac{z^4}{2(4\pi)^2 m^2} (1 + \cos^2 \theta)$; эта функция легко интегрируется. В результате получим

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{3} \frac{z^4}{(4\pi)^2 m^2}. \quad (139)$$

Напомним, что мы работали в системе единиц, в которой $c = \hbar = 1$. Теперь необходимо перейти к единицам системы СГС или СИ.

21.7 Связь величин в системе единиц $\{c = \hbar = 1\}$ с величинами системы СГС

Пусть A — некоторая физическая величина с размерностью $[A] = M^\alpha L^\beta T^\gamma$, где $M = \text{г}$, $L = \text{см}$, $T = \text{с}$. Эту же величину в системе единиц $\{c = \hbar = 1\}$ обозначим A' . Всегда можно принять, что $[A'] = L^n$, т.е. что при $c = \hbar = 1$ любая величина измеряется в степенях сантиметра. Предположим, что связь между A и A' можно записать в виде $A' = A/(\hbar^x c^y)$; показатели x , y предстоит найти. Из $[A]/[\hbar^x c^y] = [A']$ с учетом $[\hbar] = ML^2T^{-1}$, $[c] = LT^{-1}$ получим уравнение относительно x , y : $M^{\alpha-x} L^{\beta-2x-y} T^{\gamma+x+y} = L^n$, откуда находим $x = \alpha$, $y = -\gamma - \alpha$. Итак,

$$A' = A c^{\alpha+\gamma} / \hbar^\alpha. \quad (140)$$

21.8 Сечение в единицах системы СГС

Входящие в формулу (139) величины выражены в единицах системы $c = \hbar = 1$. Далее через m , z , σ будем обозначать массу, заряд и сечение рассеяния в единицах СГС, а через m' , z' , σ' — в единицах системы $c = \hbar = 1$. В связи с этим формулу (139) следует переписать в виде

$$\sigma' \approx \frac{8\pi}{3} \frac{z'^4}{(4\pi)^2} m'^2. \quad (141)$$

С помощью формулы (140) выразим штрихованные величины через нештрихованные.

а) Величине $A = m$ соответствуют $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Тогда $m' = mc/\hbar$.

б) Пусть $A = z$. Здесь есть одна тонкость. Дело в том, что имеются две единицы заряда, которые отличаются множителем $\sqrt{4\pi}$: единица Гаусса, принятая в системе СГС, и единица Хевисайда. Заряд в этих единицах обозначим соответственно $z_{\text{Г}}$ и z_{H} . При использовании единицы Гаусса закон Кулона имеет вид $|\vec{F}| = z_{\text{Г}}^2/r^2$, а уравнение Д'Аламбера — вид $\square A_n(x) = -4\pi j_n^{\text{Г}}$, а при использовании единицы Хевисайда $|\vec{F}| = z_{\text{H}}^2/4\pi r^2$, $\square A_n(x) = -j_n^{\text{H}}$. В этих

формулах $\square = -\partial_k \partial^k$ — оператор Д'Аламбера, j_n — плотность 4-тока.

Напомним, что при выводе формулы для величины, сохраняющейся благодаря глобальной калибровочной симметрии, мы сначала не были уверены даже в том, что эта величина — электрический заряд. В ходе дальнейшего построения теории мы нашли подтверждение этого предположения. Сейчас нам всего-навсего нужно выяснить, в каких единицах измеряется заряд, фигурирующий в полученных формулах. Для этого на основе выведенных формул найдем вид уравнения Д'Аламбера. Для этого используем уравнение Лагранжа $\frac{\partial \mathcal{L}^\gamma}{\partial A_m} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}^\gamma}{\partial \partial_k A_m} = 0$ и лагранжиан электромагнитного поля, взаимодействующего с полем мезонов: $\mathcal{L}^\gamma = \mathcal{L}_0^\gamma + \mathcal{L}_I$, где \mathcal{L}_0^γ , \mathcal{L}_I определяются формулами (61), (88), причем в \mathcal{L}_I пренебрежем слагаемым, квадратичным по заряду. Тогда, согласно (88) и (76), $\mathcal{L}_I \approx -j_l(x)A^l(x)$, $\mathcal{L}^\gamma \approx -\frac{1}{2}(\partial_n A_l(x))(\partial^n A^l(x)) - j_l(x)A^l(x)$. Подставив \mathcal{L}^γ в уравнение Лагранжа, найдем, что уравнение Д'Аламбера имеет вид $\partial_k \partial^k A_n(x) = j_n(x)$. Значит, заряд и ток в наших формулах выражены в единицах Хевисайда, т.е. величина, которая у нас обозначена z' — это z'_H . Выразим ее через z'_G : $z'_H{}^2 = 4\pi z'_G{}^2$.

Теперь выразим z'_G через $z_G = e$. $[e^2] = [Fr^2] = ML^3T^{-2}$, т.е. $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = -2$, тогда $x = 1$, $y = 1$, $z'_G{}^2 = e^2/\hbar c \approx 1/137$. Кстати, это и дает право считать, что $z' \ll 1$.

в) $[\sigma] = L^2$, тогда $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$, $\sigma' = \sigma$. Подставив σ' , m' , z' в (141), получим формулу для сечения в единицах СГС:

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_e^2 (m_e/m)^2, \quad (142)$$

где $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2,82 \cdot 10^{-13}$ см — классический радиус электрона. Если заменить m на m_e , то получится формула Томсона для приближенного сечения рассеяния фотона на электроне: $\sigma_e \approx \frac{8\pi}{3} r_e^2$.

Литература

1. Лагутин А. А. Элементы квантовой теории. Барнаул.: Азбука, 2013. – 124 с.
2. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976. – 480 с.
3. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля. М.: Наука, 1993. – 336 с.
4. Нелипа Н. Ф. Физика элементарных частиц. М.: Высшая школа, 1977. – 608 с.
5. Биленький С. М. Введение в диаграммную технику Фейнмана. М.: Атомиздат, 1971. – 216 с.
6. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. Т. 1. М.: Мир, 1984. – 448 с.
7. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: Изд-во иностран. лит-ры, 1963. – 844 с.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1967. – 460 с.
9. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Том 1. М.: Изд-во иностран. лит-ры, 1958. – 931 с.
10. Бете Г. Квантовая механика. М.: Мир, 1965. – 336 с.

Учебное издание

Гончаров Александр Иванович

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Учебное пособие

Публикуется в авторской редакции

Дизайн обложки Ю.В. Плетнева

Оригинал-макет подготовлен и отпечатан в пакете L^AT_EX 2_ε

Подписано в печать 24.06.2019. Формат 60 × 84/16.

Усл. печ. л. 6,28. Тираж 100 экз. Заказ 331.

Типография Алтайского государственного университета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66.
