

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Алтайский государственный университет

Глебова Н.Ю., Папин А.А., Юст Е.С.

**ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
СУБЛИМАЦИИ  
СНЕЖНО-ЛЕДОВОГО ПОКРОВА**

Учебное пособие

Барнаул, 2019

© Глебова Н.Ю., Папин А.А., Юст Е.С., 2019

© Алтайского государственного университета, 2019

Об издании – 1, 2

сведения об издании

**УДК 519.8(075.8) + 556.124(075.8)**

**22.183.5я73+26.222.81в631я73**

**Г513**

**Авторы:**

Глебова Наталья Юрьевна, Папин Александр Алексеевич, Юст Елена Сергеевна

**Рецензент:**

д-р физ.-мат. наук, проф. *О.Н.Гончарова*

**Г531 Глебова, Н.Ю.**

Проблемы математического моделирования сублимации снежно-ледового покрова [Электронный ресурс] : учебное пособие / Глебова Н.Ю., Папин А.А., Юст Е.С.; АлтГУ. - Электрон. текст. дан. (0.5 Мб). - Барнаул : АлтГУ, 2019. - 1 электрон. опт. диск (DVD). - Систем. требования: РС, Intel 1 ГГц; 512 Мб опер. памяти; 30 Мб свобод. диск. пространства; DVD-привод; ОС Windows 7 и выше, ПО для чтения pdf-файлов. - Загл. с экрана.

Учебное электронное издание

Даётся обзор работ, посвященных математическому моделированию процесса сублимации льда. Рассматриваются классическая теория сублимации льда, модели выдувания снега и модель сублимации сферических кристаллов льда. Проводится обоснование одной математической модели сублимации льда.

© Глебова Н.Ю., Папин А.А., Юст Е.С., 2019

© Алтайского государственного университета, 2019

производственно-технические сведения

Публикуется в авторской редакции

Верстка: Котова О.В.

Дата подписания к использованию: 31.05.2019

Объем издания: 0,5 Мб

Комплектация издания: 1 электрон. опт. диск (DVD)

Тираж 15 дисков

ФГБОУ ВО "Алтайский государственный университет" 656049,  
Барнаул, пр. Ленина, 61

## Содержание

1. Классическая теория сублимации
2. Модели выдувания снега
3. Сублимация позёмки
4. Вывод основных уравнений фильтрации газа/жидкости в пороупругой среде с учётом сублимации
5. Постановка задачи о сублимации неподвижного льда, основные результаты
6. Постановка задачи о сублимации подвижного льда
7. Заключение
8. Библиографический список

# 1. Классическая теория сублимации

В работе [1] рассмотрены уравнения и соотношения, используемые для описания процесса сублимации в снеге. Теоретическое уравнение для абсолютной скорости сублимации льда при низких давлениях было получено из кинетической теории на основе двух предположений: 1. существует динамическое равновесие между поверхностью льда и паром; 2. число испаряющихся молекул пара зависит от температуры льда, тогда как число конденсирующих молекул на поверхности льда, зависит от давления и температуры пара [1]. В результате, получаем уравнение Knudsen's для абсолютной скорости сублимации льда  $G_s$ :

$$G_s = \alpha p_s \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{1/2},$$

где  $\alpha$  – коэффициент испарения,  $p_s$  – насыщенное давление пара для льда,  $M$  – молекулярная масса водяного пара,  $R$  – универсальная газовая постоянная и  $T$  – абсолютная температура.

В работе [2] уточняют это уравнение и определяют точное значение  $\alpha$ , которое при идеальных условиях должно быть равно единице. Большая часть аналогичных исследований была использована в промышленной сублимационной сушке и при очень низких давлениях.

В [3] исследования проводились при атмосферном давлении в воздушном потоке и была получена скорость сублимации путем измерения с помощью кварцевых весов прямого испарения ледяной сферы (радиуса 0,3-1,8 мм). Было сделано предположение о наличии баланса между теплоотдачей от атмосферы к частице и скрытой теплотой испарения воды на поверхности частицы. Ледяная сфера радиуса  $r$  и массы  $m$  теряет (или приобретает) массу, в зависимости от разности плотностей водяного пара ( $\rho - \rho_r$ ), где  $\rho$  – плотность воздуха в окружающей среде, а  $\rho_r$  – плотность на поверхности частицы. Если  $D$  – коэффициент диффузии водяного пара в неподвижном воздухе, то [4]

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi D r (\rho - \rho_r). \quad (1)$$

Теплопроводность частицы обеспечивает перенос энергии [3], т.е.

$$L_s \left( \frac{dm}{dt} \right) = 4\pi K r (T_r - T), \quad (2)$$

где  $L_s$  – скрытая теплота сублимации,  $K$  – теплопроводность воздуха,  $T$  – температура окружающей среды, а  $T_r$  – температура на поверхности частицы.

Конвекция воздуха вокруг частицы увеличивает скорость массопереноса; для учета конвекции, правые части уравнений (1) и (2) необходимо умножить на число Шервуда ( $Sh$ ) и Нуссельта ( $Nu$ ), соответственно. Эксперименты в [3] показывают, что для малых ледяных сфер в воздухе,  $Sh$  и  $Nu$  хорошо аппроксимируются функцией числа Рейнольдса частицы ( $10 < Re < 200$ ). В [4] получили зависимость вида:

$$Nu = 1,79 + 0,66(Re)^{0,5}, \quad 0 < Re < 10, \quad (3)$$

где  $Re = 2ru/\nu$ ,  $u$  – скорость конвекции воздуха,  $\nu$  – кинематическая вязкость воздуха.

Объединяя уравнения (1) и (2), получим [1]:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{2\pi r\sigma}{G}, \quad (4)$$

где  $\sigma$  – это недонасыщение окружающей среды по отношению к водяному пару:  $\sigma = \rho/\rho_s(T) - 1$ ,  $\rho$  – плотность водяного пара,  $\rho_s(T)$  – насыщенная плотность водяного пара при температуре  $T$ . Величина  $G$  из (4) определяется следующим уравнением [1]

$$G = \frac{L_s}{KT} \frac{1}{Nu} \left( \frac{L_s M}{RT} - 1 \right) + \frac{1}{D\rho_s(T)Sh}.$$

Здесь  $M$  – молекулярная масса воды,  $R$  – универсальная газовая постоянная из уравнения Clausius-Clapeyron,  $D$  – коэффициент диффузии водяного пара в воздухе,  $Nu$  и  $Sh$  число Нуссельта и Шервуда соответственно. Числа  $Nu$  и  $Sh$  выражают интенсивность тепло- и массообмена между поверхностью ледяных сфер и окружающей средой. В [3] отмечено, что вместо (3) можно использовать зависимость для практических целей  $Sh = Nu = 1,88 + 0,5(Re)^{1/2}$  для числа Рейнольдса  $10 < Re < 200$ .

В лабораторном эксперименте [3] пренебрегли радиационным переносом тепла. Добавление такого члена в уравнение (4) приводит к уравнению [5]

$$\frac{dm}{dt} = \frac{2\pi r(\rho/\rho_s(T) - 1)Nu - Qf(T)}{L_s f(T) + 1/D\rho_s(T)}, \quad (5)$$

где  $f(T) = (1/KT)[(L_s M/RT) - 1]$ ,  $Q$  – передаваемая частице чистая радиация, зависящая от полного потока входящей радиации  $S_0$  и альбедо  $\eta$

$$Q = \pi r^2(1 - \eta)S_0.$$

Коэффициент диффузии водяного пара и кинематическая вязкость воздуха из формулы (5) зависят от атмосферного давления. В стандартных метеорологических таблицах [6] можно найти значения для этих величин, а также температурные зависимости для  $K, L_s, D, \rho_s(T)$  и  $\nu$ . Полученные исследования сублимации ледяных сфер легли в основу исследования сублимации выдуваемого снега [7].

## 2. Модели выдувания снега

Эксперименты в Wyoming позволили рассчитать скорость сублимации при выдувании снега [7]. Было сделано два предположения: скорость сублимации каждой частицы определена; взаимодействие частиц не влияет на скорость сублимации одной выдуваемой ветром частицы. Также в этой работе предполагалось, что общая скорость сублимации  $dM/dt$  для объема снежного покрова может быть определена с учётом формулы из работы [1] следующим образом

$$\frac{dM}{dt} = \int_0^\infty N_z f(r_d) \frac{dm}{dt} dr_d,$$

где  $N_z$  – число частиц с распределением диаметров  $f(r_d)$  в единице объема ( $1\text{ м}^3$ ) снега и воздуха на высоте  $z$  [8]. Для расчета скорости сублимации  $S$  столба снега и воздуха высоты  $z$  и сечением  $1\text{ м}^2$  использовалась формула

$$S = \int_0^z \int_0^\infty N_z f(r_d) \frac{dm}{dt} dr_d dz.$$

Приближённый вариант этой формулы имеет вид [1]

$$S = (1,45 \times 10^{-3}Q - 1,40 \times 10^{-3})\text{ г м}^{-2}\text{ с}^{-2},$$

где  $Q$  – скорость переноса ( $\text{г м}^{-1}\text{ с}^{-1}$ ) для высоты  $z = 1\text{ м}$ . Экспериментальные данные показали, что скорость сублимации составила примерно

13% от скорости ветра (2,6 м при скорости ветра 20 м/с). Скорость процесса зависит от того, насколько быстро воздух обменивается частицами в пограничном слое [7].

В работе [9] рассмотрена модель выдувания снега РІЕКТУК-D. Модель основана на предположении о чистой поверхности снега (т.е. без выступающей растительности). Модель РІЕКТУК-D описывает сублимацию выдуваемого снега, рассматривая изменение массы за счет сублимации с использованием следующей формулы [8]

$$\frac{dm}{dt} = \frac{2\pi r\sigma - \frac{Q_r}{KN_{Nu}T_a} \left( \frac{L_s}{R_v T_a - 1} \right)}{\frac{L_s}{KN_{Nu}T_a} \left( \frac{L_s}{R_v T_a - 1} \right) + R_v \frac{T_a}{N_{Sh} D e_i}},$$

где  $m$  (кг) – масса одной частицы льда, имеющей форму сферы радиуса  $r$  (м),  $\sigma = e/e_i - 1$  – дефицит водяного пара по отношению ко льду,  $e$  – давление водяного пара в воздухе (Па),  $e_i$  – насыщенное давление пара надо льдом,  $T_a$  – температура окружающего воздуха (К),  $L_s$  – скрытая теплота сублимации ( $2,838 \cdot 10^6$  Дж кг<sup>-1</sup>),  $D$  – молекулярная диффузия водяного пара в воздухе ( $2,25 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup> с<sup>-1</sup>),  $N_{Nu}$  и  $N_{Sh}$  – числа Нуссельта и Шервуда соответственно (значения этих двух переменные можно найти в [10]),  $K$  – теплопроводность воздуха ( $2,4 \cdot 10^{-2}$  Вт м<sup>-1</sup> К<sup>-1</sup>),  $R_v$  – газовая постоянная водяного пара ( $461,5$  Дж кг<sup>-1</sup> К<sup>-1</sup>),  $Q_r$  – суммарное излучение, переданное частице (Вт). Передаваемая чистая радиация может быть представлена с помощью (5).

В работе [9] вводится понятие плотности числа частиц  $N$  (м<sup>-3</sup>) как нулевой момент функции распределения частиц по размеру, причём

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_N \frac{\partial N}{\partial z} + v_N N \right) + S_N,$$

где  $z$  – вертикальная координата (м),  $t$  – время (с),  $K_N$  – коэффициент диффузии (м<sup>2</sup> с<sup>-1</sup>),  $v_N$  – предельная скорость для выдуваемых частиц снега (м с<sup>-1</sup>),  $S_N$  – скорость изменения числа частиц в результате сублимации (м<sup>-3</sup> с<sup>-1</sup>).

Для массовой концентрации выдуваемого снега  $q_b$ , водяного пара  $q_v$  и для температуры воздуха в потоке  $T_a$  рассматривается следующая система уравнений [9]

$$\frac{\partial q_b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_b \frac{\partial q_b}{\partial z} + v_b q_b \right) + S_b,$$

$$\frac{\partial T_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_h \frac{\partial T_a}{\partial z} \right) + \frac{S_b L_s}{c_p},$$

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_v \frac{\partial q_v}{\partial z} \right) - S_b,$$

здесь  $K_b$ ,  $K_h$  и  $K_v$  – коэффициенты вихревой диффузии для выдуваемого снега, тепла и влаги, соответственно ( $\text{м}^2 \text{с}^{-1}$ ),  $c_p$  – теплоёмкость при постоянном давлении,  $v_b$  – скорость оседания ( $\text{м}^2 \text{с}^{-1}$ ); и  $S_b$  – скорость сублимации ( $\text{с}^{-1}$ ).

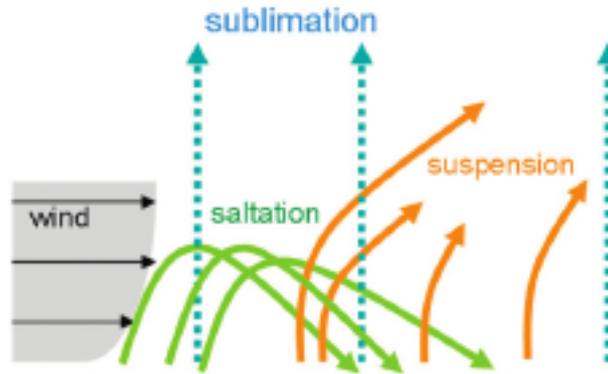


Рисунок 1 – Схема процесса выдувания снега, который включает в себя сублимацию выдуваемых частиц, сальтацию и суспензирование.

На Рисунке 1 схематически представлена 1D модель PИEKTУK-D, описывающая влияние выдувания снега на процессы сублимации, сальтации (скачкообразный процесс перемещения частиц в потоке) и суспензирования. Ввиду одномерности задачи невозможно учесть влияния горизонтального переноса на эволюцию снежного покрова.

Модель PBSM [11] позволяет рассчитать двумерные перемещения выдуваемого снега и скорость сублимации на основе баланса массы и энергетического баланса. Баланс массы снежного покрова над одним элементом ландшафта является результатом накопления снега, а также распределения выдуваемых снежных потоков как внутри, так и вокруг данного элемента

$$\frac{dS}{dt}(x) = P - p \left[ \nabla F(x) + \frac{\int E_B(x) dx}{x} \right] - E - M,$$

где  $dS/dt$  – накопление снега на поверхности (кг м<sup>2</sup> с),  $P$  – падающий снег (кг м<sup>-2</sup> с<sup>-1</sup>),  $p$  – выдуваемый снег,  $F$  – скорость снежного транспорта (кг м<sup>-1</sup> с<sup>-1</sup>),  $E_B$  – сублимация выдуваемого снега (кг м<sup>-2</sup> с<sup>-1</sup>),  $x$  – выборка (м),  $E$  – сублимация на поверхности снега (кг м<sup>-2</sup> с<sup>-1</sup>) и  $M$  – таяние снега (кг м<sup>-2</sup> с<sup>-1</sup>). Для оценки переносимого снега выделяют слой сальтации и слой суспензирования  $F_{salt}$  и  $F_{susp}$  (кг м<sup>-1</sup> с<sup>-1</sup>) соответственно.

Величина  $F_{salt}$  рассчитывается с помощью формулы [12]

$$F_{salt} = \frac{c_1 e \rho u_t^*}{g} (u^{*2} - u_n^{*2} - u_t^{*2}),$$

где  $c_1$  – безразмерное отношение скорости сальтации к скорости трения ( $u_p/u^*$ ),  $e$  – безразмерная эффективность сальтации ( $1/4 \cdot 2u^*$ ),  $\rho$  – атмосферная плотность (кг м<sup>-3</sup>),  $g$  – ускорение силы тяжести (м с<sup>-2</sup>),  $u^*$  – атмосферная скорость трения (м с<sup>-1</sup>) и  $u_n^*$  и  $u_t^*$  относятся к частям  $u^*$ , примененным к неэродируемым элементам, таким как растительность (неэродируемая скорость трения) и самой открытой поверхности снега (пороговая скорость трения), соответственно. Величина  $u_t^*$  рассчитывается с использованием алгоритма, разработанного в [13]. Величина  $u_n^*$  вычисляется с использованием алгоритма, разработанного в работе [14] для расчетов ветровой эрозии и используют формулу

$$\frac{u_n^*}{u^*} = \frac{(m_1 \beta \lambda)^{0,5}}{(1 + m_1 \beta \lambda)^{0,5}},$$

где  $\beta$  – отношение элемента к поверхностному сопротивлению и  $\lambda$  – безразмерная плотность элемента шероховатости. В [14] использованы значения  $\beta \approx 170$ ,  $m$  – эмпирическая константа, учитывающая разницу между средним и максимальным поверхностным напряжением сдвига для инициирования эрозии. Значение для  $m_1$  в PBSM равно 1. В работе [15] использовались значения  $\beta = 202$  и  $m_1 = 0,16$  для кустарниковых креозотов в пустыне Невады. Величина  $\lambda$  вычисляется по формуле [16]

$$\lambda = Nd_v \left( h_v - \frac{S}{\rho_s} \right),$$

где  $N$  – плотность вегетации (м<sup>-2</sup>),  $d_v$  – диаметр вегетирующего стебля (м),  $h_v$  – высота вегетации и глубина снега,  $S$  скопление снега,  $\rho_s$  плотность снега (кг м<sup>-3</sup>). Величина  $F_{susp}$  рассчитывается по формуле [17]:

$$F_{susp} = \frac{u^*}{k} \int_{h^*}^{z_b} \eta(z) \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) dz,$$

где  $k = 0,41$  – постоянная von Karman,  $\eta$  – массовая концентрация выдуваемого снега на высоте  $z$ (м),  $z_0$  – высота аэродинамической шероховатости,  $z_b$  определяется временем, доступным для вертикальной диффузии частиц снега на верхней части сальтации  $h^*$ , рассчитанной с использованием теории турбулентной диффузии при логарифмическом профиле скорости воздуха. Для полностью развитого потока  $z_b = 5$  м. При  $z_b = 5$  м напряжение сдвига постоянно ( $d\tau/dt = 0$ ) и суспензирование переходит в установившееся состояние ( $d\eta/dt = 0$ ). Величина  $E_B$  рассчитывается по формуле [18]

$$E_B = \int_0^{z_b} \frac{1}{m(z)} \frac{dm}{dt}(z) \eta(z) dz,$$

где  $m$  – средняя масса одиночной частицы льда на высоте  $z$ . Скорость испарения водяного пара с поверхности частицы льда  $dm/dt$  рассчитывается на основе баланса радиационного обмена энергией, турбулентного конвективного теплообмена и скрытого теплообмена во время фазового перехода, в предположении, что частицы снега остаются в термодинамическом равновесии. Величина  $dm/dt$  также определяется радиусом сферы льда, диффузией водяного пара в атмосфере, степенью турбулентного переноса водяного пара от поверхности частицы и плотностью водяного пара как в окружающей среде, так и на поверхности частицы. Расчеты  $E_b$  очень чувствительны к температуре окружающей среды и скорости ветра [16], [18].

В работе [19] также рассмотрена модель снежного покрова, учитывающая таяние и сублимацию снега. В основе модели лежит уравнение энергетического баланса снежного покрова лесного полога:

$$C_e \frac{dT_c}{dt} = R_e - H - L_s E - L_f S_M,$$

где  $C_e$  – теплоемкость площади лесного полога,  $T_c$  – температура,  $R_e$  – чистая радиация, поглощаемая пологом,  $H$  и  $E$  – потоки тепла и влажности,  $L_s$  – скрытая теплота сублимации,  $L_f$  – скрытая теплота плавления, а  $S_M$  – скорость снеготаяния. Согласно [3], ледяная сфера радиуса

$r$ , плотности  $\rho_i$  и массы  $m = 4/3\pi\rho_i r^3$  в воздухе при температуре  $T_c$  и влажности  $q_c$  сублимирует со скоростью:

$$\frac{dm}{dt} = 2\pi r D_w \rho S h [q_c - q_{sat}(T_c, p_*)], \quad (6)$$

где

$$D_w = 2,06 \cdot 10^{-5} \left( \frac{T_c}{T_m} \right)^{-1,75},$$

коэффициент диффузии ( $\text{м}^2 \text{с}^{-1}$ ) водяного пара в воздухе, а  $Sh$  – это число Шервуда (3). Скорость конвекции  $u$  равна скорости ветра в лесном пологе и может быть выражена с помощью соотношения [19]:

$$u(z) = U_h e^{-n(1-z/h)},$$

где  $U_h$  – скорость ветра в верхней части лесного полога,  $h$  – высота полога. Общепринятое значение  $n = 2,5$  согласуется со скоростью ветра, измеренной в сосновом пологе, хотя более точное значение можно получить, считая  $n$  функцией  $U_h$  [19]. Для сферы радиуса 500 мкм и с номинальной высотой  $z = 0,6h$  получаем  $Sh \approx 1,79 + 3U_h^{1/2}$ , [19].

Площадь открытой поверхности со снегом  $I$  меньше общей площади поверхности  $I_{max}$ , поэтому предполагается, что скорость сублимации определяется следующим соотношением этих областей [20]

$$C_e = k_1 \left( \frac{I}{I_{max}} \right)^{-0,4},$$

где  $k_1$  – коэффициент индексирующий возраст/структуру снега в лесном пологе.

Сублимацию на единицу площади земли определяют, как

$$E = -C_e \frac{I}{m} \frac{dm}{dt}. \quad (7)$$

Комбинируя уравнения (6) и (7) получаем:

$$E = \frac{\rho}{r_i} [q_c - q_{sat}(T_c, p_*)],$$

где сопротивление  $r_i$  определяется формулой:

$$r_i = \frac{2\rho_i r^2}{3C_e I D_w S h}.$$

В работе [21] исследования проводились на сферических кристаллах льда. Потеря массы кристалла льда определялась следующим образом:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\rho_{air}\sigma_{\infty}q_{\infty}\frac{\bar{v}}{4}(2\pi ac)3\alpha^3}{1 + \alpha^a\dot{a}_{tot}(h^a(\Gamma) + \Gamma^2h^c(\Gamma))},$$

где  $\rho_{air}$  – плотность воздуха,  $\sigma_{\infty} = (q_{\infty} - q_{eq})/q_{\infty}$  – коэффициент перенасыщения дальнего поля,  $q_{\infty}$  – граничное условие на бесконечности соотношения смешивания,  $\bar{v} = \sqrt{(8kt)/(\pi m)}$  – средняя тепловая скорость молекулы водяного пара,  $a$  – радиус кристалла льда,  $c$  – ширина пластины,  $\alpha$  – коэффициент конденсации ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ),  $\dot{a}_{tot} = \dot{a}_v + \dot{a}_{th}$  – общее сопротивление равное сумме сопротивления пара и теплового сопротивления,  $h^a(\Gamma)$ ,  $h^c(\Gamma)$  – коэффициенты смешения,  $\Gamma = c/a$  – соотношения сторон пластины.

Математическое обоснование моделей сублимации льда, построенных на основе формул (1)-(5) проводилось в работах [22],[23].

### 3. Сублимация позёмки

Для расчета сублимации позёмки используется аналог формулы (5) [3]:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_r = \frac{2\pi r(RH/100 - 1)Nu(r)}{F(T)}, \quad (8)$$

где  $RH$  – относительная влажность воздуха (относительно льда),  $F(T)$  – функция абсолютной температуры воздуха  $T$  [24] и  $Nu$  – число Нуссельта. Общая скорость сублимации позёмки на высоте  $S(z)$  задается формулой [25]

$$S(z) = - \sum_r M_r \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{n_r}{4\pi r^2 \rho_p} \left(\frac{dm}{dt}\right)_r \right], \quad (9)$$

где  $M_r$  – масса частицы радиуса  $r$ ,  $n_r$  – число частиц радиуса  $r$  в единичном объеме воздуха и  $\rho_p$  – плотность частицы. Проинтегрировав (9) по  $z$  получим общую скорость сублимации позёмки

$$\bar{S} = \int_1^H S(z) dz. \quad (10)$$

Как правило, верхний предел  $H$  принимается равным 10 м. Скорость сублимации  $\bar{S}$  согласно формулам (22)-(24) определяется скоростью ветра (учитывая количество взвешенных частиц и скорость "вентиляции частиц"), насыщенностью воздуха, температурой окружающей среды и распределением размеров частиц.

Вертикальное распределение плотности взвешенных частиц  $\eta_r$  радиуса  $r$  даётся формулой [26]

$$\eta_r = \eta_{r_0} \left( \frac{z}{z_{ref}} \right)^{-V_r k u_*}, \quad (11)$$

где  $V_r$  – скорость частиц радиуса  $r$  [27],  $\eta_{r_0}$  – плотность частиц на высоте  $z_{ref}$ ,  $u_*$  – скорость трения и  $k$  – постоянная Кармана.

В [28] проведена обработка данных профилей скорости ветра, температуры и относительной влажности.

В [29] используется модель поверхностного слоя SNOWSTORM. В основу модели положены уравнения сохранения импульса, тепла, влаги и взвешенных частиц поземки:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho \overline{u'w'})}{\partial z}, \quad (12)$$

$$\rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho c_p \overline{w'\theta'})}{\partial z} - \lambda \bar{S}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial(\overline{w'q'})}{\partial z} + \frac{\bar{S}}{\rho_f} + E_H + A, \quad (14)$$

$$\rho \frac{\partial \eta_r}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(\rho \overline{w'\eta'_r} - \rho V_r \eta_r) + \rho S_r, \quad (15)$$

где  $u$ ,  $\theta$ , и  $q$  – это скорость ветра, абсолютная температура и удельная влажность, соответственно,  $\overline{w'X'}$  – вертикальный турбулентный поток параметра  $X$ ,  $\rho = \rho_f(1 - C) + \rho_p C$  – общая плотность смеси воздух-снег,  $\rho_f$  и  $\rho_p$  – плотности льда и воздуха и  $C = \eta/\rho_p$  – объемная концентрация частицы ( $0 \leq C \leq 1$ ),  $\eta$  – общая массовая концентрация частицы,  $c_p$  – удельная теплота смеси воздух-снег,  $\lambda$  – скрытая теплота сублимации,  $\eta_r$ ,  $V_r$ , и  $S_r$  – массовая концентрация частицы, скорость выпадения и скорость сублимации частиц среднего радиуса  $r$ ,  $\bar{S}$  – скорость сублимации, суммированная по всем размерным классам частиц на каждой высоте

над поверхностью ( $z$ ). Первые слагаемые в правых частях представляют собой вертикальное отклонение различных турбулентных потоков. Вторые слагаемые в правых частях уравнений (13) и (14) представляют охлаждение и поглощение влаги, вызванные сублимацией поземки, соответственно.

Слагаемые  $E_H$  и  $A$  в уравнении (14) описывают захват влаги на верхней границе слоя и горизонтальную адвекцию влаги. Второе и третье слагаемое в уравнении (15) представляют гравитационное осаждение частиц и эффект сублимации поземки, соответственно. Уравнение частиц (15) выражает равновесие между гравитационным осаждением, восходящей турбулентной диффузией взвешенных частиц с сублимационным слагаемым непрерывно уменьшающим размер и массу взвешенных частиц. В стационарном состоянии поземки наблюдается чистый поверхностный поток взвешенных частиц (эрозия), уравновешивающий потерю массы с помощью сублимации позёмки. Таким образом, сублимация позёмки вызывает потерю массы поверхностью посредством чистой эрозии. В уравнении (15) сублимационное слагаемое выражается следующим образом

$$S_r = M_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{n_r}{4\pi r^2 \rho_p} \left( \frac{\partial m}{\partial t} \right)_r \right), \quad (16)$$

где  $M_r$  – масса частицы радиуса  $r$ ,  $n_r$  – число частиц радиуса  $r$ . Величина  $(dm/dr)_r$  определяется по формуле (4).

Значение концентрации частиц слоя сальтации  $\eta_s$  используется в качестве нижнего граничного слоя для уравнения (15). Используется эмпирическое соотношение из [12] вида

$$\eta_s = \frac{0,68\rho_f}{c_t u_* g h_s} (u_*^2 - u_{*t}^2), \quad u_* \geq u_{*t}, \quad (17)$$

где  $u_*$  и  $u_{*t}$  – скорость трения и предельная скорость трения, соответственно,  $c_t$  – параметр, связанный с эффективностью сальтации,  $g$  – ускорение свободного падения и  $h_s$  – высота слоя сальтации пропорциональная  $u_*^{1,27}$  [17].

На Рисунке 2 дана схематизация процесса позёмки. Источники влаги и сублимация на поверхности добавляют влагу к пограничному слою, тогда как турбулентная диффузия и горизонтальная адвекция действуют как поглотители влаги. В уравнении (14) величина  $E_H$  трактуется

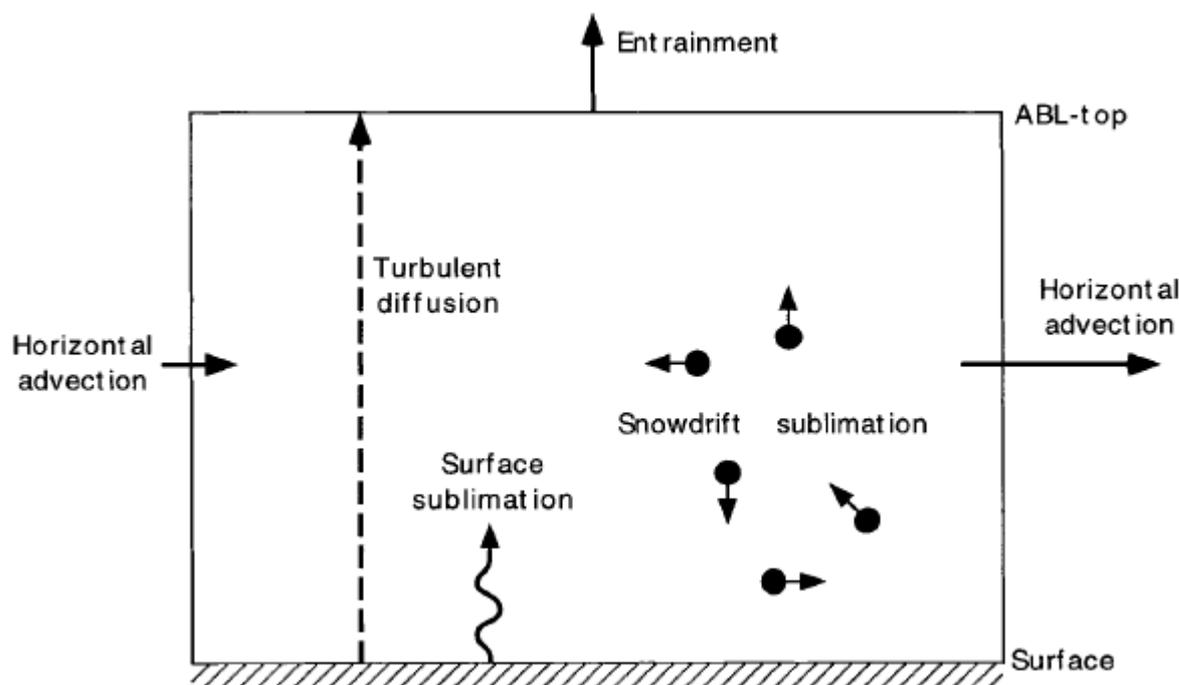


Рисунок 2 – Схема представление запаса влаги в пограничном слое атмосферы во время позёмки.

следующим образом

$$E_H = w_e \left( \frac{\Delta q}{\Delta z} \right)_e, \quad (18)$$

где  $w_e$  – скорость поступления и  $(\Delta q / \Delta z)_e$  – вертикальный градиент (отрицательный). Предполагается, что эти параметры не зависят от характеристик пограничного слоя.

Горизонтальная адвекция влаги играет важную роль, когда, например, холодный сухой воздух течет вниз по склону. Для величины  $A$  в уравнении (14) используется зависимость

$$A = u \frac{\partial q}{\partial x}, \quad (19)$$

где  $\partial q / \partial x$  представляет собой горизонтальный градиент удельной влажности (предполагается независимым от высоты и времени) направленный вдоль линии потока.

В работе [30] рассматриваются не отдельные частицы, а снежный шлейф. Снежный шлейф состоит из большого числа частиц снега. Про-

исходит обмен между отдельными частицами, частицами пограничного слоя и окружающим воздухом. Таким образом, сублимация влияет не только на снежные частицы в пограничном слое, но и на температуру воздуха и влажность. Для постоянного радиуса  $r_0$ , скорость сублимации  $S$  ( $\text{кг м}^{-3} \text{с}^{-1}$ ) связана с концентрацией снега  $c$  с помощью формулу

$$S(x, t) = \frac{dm}{dt}(T_a, \sigma, u) \frac{c(x, t)}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}. \quad (20)$$

В модели Alpine3D для удельной влажности  $q$ , абсолютной температуры  $\theta$  и концентрации взвешенного снега  $c$  используется один и тот же адвекционно-диффузионный тип уравнений. Получаем уравнения сохранения вида [31]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_c \frac{\partial c}{\partial x} \right) + u_p \frac{\partial c}{\partial x} = -S, \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_q \frac{\partial q}{\partial x} \right) + u \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{S}{\rho_{air}}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + u \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_{air} C_P} (L_s S). \quad (23)$$

Во всех уравнениях первое слагаемое представляет собой турбулентную диффузию, второе – адвекцию, а третье – сублимацию как источник или поглотитель. Здесь  $\rho_{air}$  – плотность воздуха,  $C_p$  – удельная теплоемкость, а  $L_s$  – скрытая теплота сублимации;  $u$  и  $u_p$  обозначают скорость ветра ( $\text{м с}^{-1}$ ) и скорость частицы ( $\text{м с}^{-1}$ ) соответственно, и  $K$  ( $\text{м}^2 \text{с}^{-1}$ ) – коэффициент диффузии. Данная система уравнений не учитывает влияние изменения температуры, влажности и концентрации снега на динамику течения воздуха, поскольку поле скоростей воздуха вычисляется отдельно.

Сублимация присутствует как источник (сток) во всех уравнениях. Она определяется с помощью всех трех переменных состояния  $c$ ,  $q$ ,  $\theta$  и через уравнение (4), таким образом, объединяет три уравнения (21) – (23). Для решения полученной системы уравнений применяется итерационный метод [31]. Система уравнений (21) – (23) решена методом сопряженных градиентов, описанном в [30]. Для концентрации используем граничное условие типа Неймана. Для влажности и температуры – условие Дирихле на боковой и верхней границе области.

Моделирование сублимации позёмки в работе [32] включает в себя создание модели процесса сальтации снега и численный расчет. Процесс сальтации снежных частиц можно разделить на 4 этапа: аэродинамический захват, вычисление траектории частиц, столкновение частиц и изменение воздушного потока [33].

Полагая, что зерно позёмки имеет сферическую форму и подвержено гравитации, выталкивающей силе и силе сопротивления воздуха, в качестве определяющих уравнений используются следующие

$$m_p \frac{dU_p}{dt} = F_D \left( \frac{U_f - U_p}{V_r} \right), \quad (24)$$

$$m_p \frac{dV_p}{dt} = -W_g + F_B + F_D \left( \frac{V_f - V_p}{V_r} \right), \quad (25)$$

$$\frac{dx_p}{dt} = U_p, \quad (26)$$

$$\frac{dy_p}{dt} = V_p, \quad (27)$$

где  $m_p$  и  $w_g$  – масса и вес снежной частицы, соответственно;  $U_f$ ,  $V_f$  и  $U_p$ ,  $V_p$  – горизонтальные и вертикальные скорости воздушного потока и снежных частиц, соответственно;  $V_r = \sqrt{(U_f - U_p)^2 + (V_f - V_p)^2}$  – относительная скорость снежной частицы в потоке;  $x_p$  и  $y_p$  – координаты снежной частицы;  $F_B = \frac{1}{6}\rho_f\pi D^3g$  и  $F_D = \frac{1}{8}C_D\rho_f\pi D^2V_r^2$  – выталкивающая сила и сила сопротивления, действующие на снежную частицу, соответственно;  $\rho_f$  – плотность воздуха;  $D$  – диаметр снежной частицы;  $g$  – ускорение свободного падения;  $C_D$  – коэффициент силы сопротивления.

В атмосферном поверхностном слое горизонтальная скорость  $u$  удовлетворяет уравнению Навье-Стокса [34]

$$\rho_f \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_f u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} + F_x, \quad (28)$$

где  $x$  – координата, согласованная со средним направлением ветра;  $y$  – вертикальное направление;  $\tau$  – напряжение сдвига воздуха,  $F_x$  – сила, с которой частицы воздействуют на жидкость в направлении потока

$$F_x = \sum_{i=1}^n m_p a_i, \quad (29)$$

где  $n$  – число частиц на единицу объема жидкости на высоте  $y$ , а  $a_i$  – горизонтальное ускорение частицы  $i$ .

Согласно теории Прандтля, для стационарного потока, расположенного над бесконечным плоским слоем, уравнение (28), можно упростить [33]

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho_f k^2 y^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy}) + F_x = 0, \quad (30)$$

где  $k$  – постоянная Кармана.

Когда скорость ветра над снежной поверхностью увеличивается, снежные частицы начинают подниматься в воздух. Число аэродинамически захваченных частиц можно описать правилом избыточного сдвига, впервые предложенным в работах [35, 36]. Для определения наилучшего значения размерной постоянной в правиле использовалось следующее отношение, основанное на сохранении импульса [37]

$$N_a = \zeta u_* \left( 1 - \frac{u_{*t}^2}{u_*^2} \right) D^{-3}, \quad (31)$$

где  $N_a$  – число снежных частиц, захваченных ветром, на единицу площади и единицу времени;  $\zeta$  – безразмерный коэффициент (в данной модели  $1 \cdot 10^{-3}$ ),  $u_*$  – скорость трения,  $u_{*t}$  – скорость порогового трения. Следуя [38], вертикальную скорость всех аэродинамически захваченных частиц берут равной  $\sqrt{2gD}$ .

В слое сальтации снежные частицы попеременно сталкиваются с поверхностью и отскакивают в воздух. Они могут отскакивать последовательно или даже выдергивать другие частицы с поверхности. Такой процесс называется "разбрызгиванием". Следующие три функции "разбрызгивания" для позёмки, предложенные в [39] на основе экспериментов, используются для определения числа и состояния движения разбрызганных частиц

$$S_v(e_v) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e_v^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{e_v}{\beta}\right), \quad (32)$$

$$S_h(e_h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(e_h - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (33)$$

$$S_e(n_e) = C_{n_e}^m p^{n_e} (1-p)^{m-n_e}. \quad (34)$$

В уравнении (32) величина  $S_v$  – это распределение вероятностей коэффициента вертикальной реституции, (т. е. отношение относительных скоростей после и до столкновения может иметь любую величину от 1 (вполне упругое столкновение) до 0)  $e_v$ ,  $\Gamma(\alpha)$  – гамма-функция,  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры формы и масштаба, соответственно. В уравнении (33)  $S_h$  – это распределение вероятностей коэффициента горизонтальной реституции,  $e_h$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  – среднее значение и дисперсия, соответственно. В уравнении (34)  $S_e$  – функция отброшенных частиц,  $n_e$  – биномиальная функция распределения со средним значением  $mp$  и дисперсией  $mp(1-p)$ . Параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $t$  и  $p$  измерялись при температуре  $-15^\circ\text{C}$  как функция скорости удара и угол для частицы позёмки на слое уплотненных частиц снега [39].

Общая скорость сублимации позёмки  $Q_S$  кг/с слоя сальтации в области получается в результате суммирования массы всех сальтирующих частиц в этой области:

$$Q_S = \sum_i \left( \frac{dm}{dt} \right)_i \quad (35)$$

где  $\left( \frac{dm}{dt} \right)_i$  – скорость потери массы, соответствующая  $i$ -ой частице. При температуре  $T$  и недонасыщении  $\delta = \theta - 1$  скорость изменения массы одной частицы радиуса  $r$  вследствие сублимации вычисляется по формуле (4).

#### 4. Вывод основных уравнений фильтрации газа/жидкости в пороупругой среде с учётом сублимации

Скорость Дарси (удельный расход на единицу площади поверхности) определяется следующей формулой [40]

$$\vec{q}_D = \phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s),$$

где  $\phi$  – пористость (доля объема среды, приходящаяся на пустоты),  $\vec{v}_f$ ,  $\vec{v}_s$  – скорости жидкости и породы соответственно.

Закон сохранения масс для жидкости и твердой фазы с учётом фазовых переходов выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f\phi\vec{v}_f) &= S, \\ \frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)\rho_s\vec{v}_s) &= -S,\end{aligned}$$

где  $t$  – время,  $\rho_f$  – плотность жидкости,  $\rho_s$  – плотность породы,  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ ,  $(x_1, x_2, x_3)$  – переменные Эйлера,  $S$  – интенсивность фазового перехода.

Закон сохранения массы можно записать в терминах материальной производной ( $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla \cdot A$ ). Откуда для несжимаемой жидкости получим

$$\frac{d\phi}{dt} = -\nabla \cdot \vec{q}_D - \phi \nabla \cdot \vec{v}_s + \frac{S}{\rho_f}. \quad (36)$$

Для несжимаемой породы ( $\rho_s = const$ ) уравнение (36) можно представить в виде

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -(1-\phi)(\nabla \cdot \vec{v}_s) - \vec{v}_s \cdot \nabla(1-\phi) - \frac{S}{\rho_s},$$

и, следовательно,

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = \frac{1}{1-\phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{S}{(1-\phi)\rho_s}. \quad (37)$$

Используя (36) и (37), выводим

$$-\nabla \cdot \vec{q}_D = \frac{1}{1-\phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{S\phi}{(1-\phi)\rho_s} - \frac{S}{\rho_f}.$$

### Напряжение и эффективное напряжение

При движении жидкости в горной породе постулируется:

1. общий тензор напряжения  $\sigma$  определяется через тензор напряжения твердой фазы  $\sigma_s$  и жидкой  $\sigma_f$  по правилу:

$$\sigma = (1-\phi)\sigma_s + \phi\sigma_f = (1-\phi)(S_s - p_s I) - \phi p_f I,$$

а полное (общее) давление есть  $p_{tot} = (1-\phi)p_s + \phi p_f$ , где  $\sigma_s, S_s, p_s$  – тензор напряжения, девиатор тензора напряжения и давление твердой фазы. Соответственно,  $\sigma_f$  и  $p_f$  – тензор напряжения и давление жидкой фазы;

2. девиатор тензора напряжения в жидкой фазе отсутствует ( $S_f = 0$ ), потому что вязкость жидкости много меньше, чем каркасная сдвиговая вязкость.

В соответствии с принципом Терцаги [40] деформация двухфазной среды определяется через эффективное напряжение  $\sigma_e = \sigma + p_f I$ . Тогда в случае полного насыщения среды динамическое эффективное давление  $p_e = p_{tot} - p_f$  [41].

*Реологическое соотношение для вязкоупругой среды*

Для каждой составляющей двухфазной среды (скелета  $s$  породы и содержащейся в ней воды  $f$ ) вводятся понятия объемов твердого скелета  $V_s$  и пор  $V_p$ . Тогда удельный объем пор (пористость)  $\phi = \frac{V_p}{V_t}$ , где  $V_p, V_t$  – объем пор и общий объем. Общий объем – это объем пор и породы  $V_t = V_p + V_s$ . Заметим, что

$$d\phi = \frac{dV_p}{V_t} - V_p \frac{dV_t}{V_t^2} = \frac{dV_p}{V_t} - \phi \frac{dV_t}{V_t}. \quad (38)$$

Если плотность  $\rho_s$  твердой фазы постоянна, то  $dV_s = 0$  и  $dV_t = dV_p$ . Из уравнения (38) получим

$$d\phi = (1 - \phi) \frac{dV_t}{V_t}. \quad (39)$$

Объемная сжимаемость двухфазной среды  $\beta_t$  определяется как относительное суммарное изменение объема, реагирующее на изменение приложенного эффективного динамического давления:  $\beta_t = -\frac{1}{V_t} \left( \frac{\partial V_t}{\partial p_e} \right)$ .

Уравнение (39) примет вид

$$d\phi = -(1 - \phi) \beta_t dp_e.$$

Объемная сжимаемость также является функцией пористости:  $\beta_t = \phi \beta_\phi$ ,  $\beta_\phi = -1/V_p (\partial V_p / \partial p_e) = -1/\phi (\partial \phi / \partial p_e)$ , где  $\beta_\phi$  – коэффициент сжимаемости.

Тогда изменение пористости для механического сжатия может быть записано следующим образом:

$$\nabla \cdot \vec{u}_s = -\phi \beta_\phi \frac{dp_e}{dt}.$$

Аналогичное соотношение получено в работе [42].

При этом закон деформации может быть записан как [43], [44], [45]

$$\nabla \cdot \vec{u}_s = -\frac{p_e}{\xi},$$

где  $\xi$  – объемная вязкость. Аналогичное соотношение используется при изучении переноса магмы в мантии Земли [46].

Объемная вязкость зависит от  $\phi$  [46], [47], [48]:  $\xi = \frac{\eta}{\phi}$ , где  $\eta$  – сдвиговая вязкость горной породы (твердой матрицы).

Таким образом постулируется реологический закон, объединяющий механическую и вязкую сжимаемость [43], [44]

$$\nabla \cdot \vec{u}_s = -\beta_t(\phi) \frac{dp_e}{dt} - \frac{p_e}{\xi(\phi)},$$

где  $\beta_t(\phi)$ ,  $\xi(\phi)$  – объемная сжимаемость и объемная вязкость.

*Закон Дарси*

Уравнение сохранения импульса для жидкости берется в форме закона Дарси [49]

$$\vec{q}_D = -K \nabla \left( \frac{P_{ex}}{\rho_f g} \right),$$

где  $K$  – гидравлическая проводимость (тензор фильтрации),  $K = (k' \rho_f g) / \mu$ ,  $k'$ ,  $\mu$  – проницаемость и динамическая вязкость жидкости,  $P_{ex}$  – избыточное давление жидкости, определяемое как разность между давлением жидкости и гидростатическим давлением:  $P_{ex} = p_f - p_h$ .

Отсюда получаем, что

$$\vec{q}_D = -\frac{k'}{\mu} (\nabla p_f + \rho_f g).$$

В некоторых случаях коэффициенты  $k'$ ,  $\beta_t$ ,  $\xi$  могут быть опытным путем определены несколько иначе. В рассматриваемой нами модели они имеют вид:  $\beta_t = \phi^b \beta_\phi$ ,  $\xi = \eta / \phi^m$ ,  $k' = k \phi^n$ , где  $b = 1/2$ ,  $m \in [0, 2]$ ,  $n = 3$  [43].

Таким образом, уравнения модели с учётом фазовых переходов имеют вид [40], [43]:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \text{div}((1-\phi)\rho_s \vec{v}_s) = -S, \quad \frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho_f \phi \vec{v}_f) = S, \quad (40)$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{k\phi^n}{\mu}(\nabla p_f + \rho_f \vec{g}), \quad (41)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_s = -\frac{\phi^m}{\eta} p_e - \phi^b \beta_\phi \frac{dp_e}{dt}, \quad (42)$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1 - \phi) p_s, \quad p_e = (1 - \phi)(p_s - p_f). \quad (43)$$

Данная квазилинейная система составного типа описывает пространственное нестационарное изотермическое движение сжимаемой жидкости в вязкоупругой горной породе. Здесь  $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_s, \vec{v}_f$  – соответственно истинные плотности и скорости фаз;  $\phi$  – пористость;  $\vec{g} = (0, 0, -g)$  – ускорение силы тяжести;  $k$  – проницаемость,  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости;  $\eta, \beta_\phi, b, m$  – параметры горной породы. Задача записана в эйлеровых координатах  $(x_1, x_2, x_3)$ , (начало отсчета на глубине  $H$  от поверхности земли, ось  $x_3$  направлена вверх, т.е. движение происходит при  $x_3 > 0$ ),  $t$ –время. Истинная плотность горной породы  $\rho_s$  принимается постоянной. Искомыми являются величины  $\phi, \rho_f, v_s, v_f, p_f$ .

В одномерном случае система (40)-(43) является замкнутой, если  $p_f = p(\rho_f)$  или  $\rho_f = const$ . В общем случае к системе (40)-(43) кроме уравнения состояния добавляется уравнение сохранения импульса системы "твердая матрица - паровая жидкость" [50], а именно: уравнение несжимаемой деформации твердого скелета с учетом влияния порового давления жидкости

$$\nabla \cdot \sigma + \rho g = 0,$$

где  $\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f$  - средняя плотность среды.

*Уравнение баланса энергии*

При выводе уравнения баланса энергии предполагается, что в каждой точке среды имеет место термодинамическое равновесие, т.е. фазовые температуры совпадают  $\theta_i = \theta, i = 1, 2$ . Пусть  $c_i > 0$  - теплоемкость  $i$  - й фазы при постоянном давлении. Тогда уравнение энергии для снега можно представить в виде [51]:

$$\left( \sum_{i=1}^2 \rho_i^0 c_i \alpha_i \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left( \sum_{i=1}^2 \rho_i^0 c_i \vec{v}_i \right) \nabla \theta = div(\lambda_c \nabla \theta) - L_s S,$$

где  $\lambda_c$  - коэффициент теплопроводности снега,  $L_s$ - скрытая теплота сублимации льда,  $S$ - интенсивность фазового перехода лёд-влажный воздух.

Следуя [51], для  $\lambda_c$  будем использовать зависимость  $\lambda_c = a_c + b_c \rho_c^2$ , где  $\rho_c = \sum_{i=1}^2 \rho_i^0 \alpha_i = \rho_1^0 m + \rho_2^0 (1 - m)$ ,  $a_c$  и  $b_c$  - положительные постоянные.

#### Сублимация

В работе [52] для описания процесса сублимации сферической частицы льда используется формула

$$\frac{dm}{dt} = \frac{2\pi r \sigma}{\frac{L_s}{K\theta Nu} \left( \frac{L_s M}{R\theta} - 1 \right) + \frac{1}{D\rho_n Sh}}, \quad (44)$$

$$\sigma = \left( \frac{\rho_f}{\rho_n} - 1 \right),$$

где  $L_s$  - теплота сублимации льда,  $\frac{dm}{dt}$  - скорость изменения массы,  $\sigma$  - пересыщение водяного пара относительно льда,  $M$  - молекулярная масса воды,  $r(m)$  - радиус частицы,  $D$  - коэффициент диффузии,  $K$  - молекулярная теплопроводность в атмосфере,  $\rho_n$  - плотность насыщенного водяного пара,  $Nu$  - число Нуссельта,  $Sh$  - число Шервуда.

В работе [53] на основе формулы (44) определяется интенсивность фазового перехода "лёд-влажный воздух"

$$S(x, t) = \frac{dm}{dt}(\theta, \sigma, u) \frac{c(x, t)}{\frac{4}{3}\pi r^3}, \quad (45)$$

$$S = \begin{cases} G\phi(1 - \phi)(\rho_f - \rho_n), & \rho_f < \rho_n, \\ 0, & \rho_f \geq \rho_n, \end{cases} \quad (46)$$

$$G = \frac{3\rho_s}{\rho_n r^2 \left( \frac{L_s}{K\theta Nu} \left( \frac{L_s M}{R\theta} - 1 \right) + \frac{1}{D\rho_n Sh} \right)},$$

где  $c(x, t)$  - концентрация льда.

## 5. Постановка задачи о сублимации неподвижного льда, основные результаты

### Постановка задачи

В работе изучается модель, описывающая процесс сублимации льда. Лёд рассматривается как деформируемая пористая среда, в порах которой движется влажный воздух. В основе рассматриваемой модели лежат уравнения сохранения масс с учётом фазового перехода, закон Дарси для

влажного воздуха, учитывающий движение пористого скелета, реологическое уравнение для пористости, уравнения равновесия и сохранения энергии для системы лёд-воздух

$$\frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi \rho_f \vec{u}_f) = S, \quad (47)$$

$$\frac{\partial (1 - \phi) \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div}((1 - \phi) \rho_s \vec{u}_s) = -S, \quad (48)$$

$$\phi(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = -K_0 \frac{k}{\mu} (\nabla p_f + \rho_f \vec{g}), \quad (49)$$

$$\left( \sum_{i=1}^2 \rho_i^0 c_i \alpha_i \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left( \sum_{i=1}^2 \rho_i^0 c_i \vec{u}_i \right) \nabla \theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) - L_s S, \quad (50)$$

$$p_f = \rho_f R \theta, \quad \nabla \cdot \vec{u}_s = -a(\phi) p_e, \quad \nabla p_{tot} = \rho_{tot} \vec{g}, \quad (51)$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1 - \phi) p_s, \quad p_e = (1 - \phi)(p_s - p_f), \quad (52)$$

$$\rho_{tot} = \phi \rho_f + (1 - \phi) \rho_s. \quad (53)$$

Здесь  $\rho_f, \rho_s, \vec{u}_f, \vec{u}_s$  - соответственно истинные плотности и скорости влажного воздуха и льда,  $\phi$  - пористость,  $p_f(\rho_f, \theta), p_s$  - соответственно давление пара и льда,  $p_e$  - эффективное давление,  $\theta$  - температура среды,  $S(\phi, \rho_f)$  - интенсивность фазового перехода лёд-влажный воздух,  $K_0$  - тензор фильтрации,  $k$  - проницаемость,  $\mu$  - динамическая вязкость газа,  $a(\phi), c_f, c_s, \lambda_c$  - параметры пороупругой среды,  $R$  - универсальная газовая постоянная.

В одномерном случае система (47)-(53) принимает вид

$$\frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\phi \rho_f u_f) = S, \quad (54)$$

$$\frac{\partial (1 - \phi) \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}((1 - \phi) \rho_s u_s) = -S, \quad (55)$$

$$\phi(u_f - u_s) = -K_0 \frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p_f}{\partial z} + \rho_f g \right), \quad (56)$$

$$\left(\sum_{i=1}^2 \rho_i^0 c_i \alpha_i\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i^0 c_i \vec{u}_i\right) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_c \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - \mu \frac{\partial \rho_1^0 \phi}{\partial t}, \quad (57)$$

$$p_f = \rho_f R \theta, \quad \frac{\partial u_s}{\partial z} = -a(\phi) p_e, \quad \frac{\partial p_{tot}}{\partial z} = \rho_{tot} g, \quad (58)$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1 - \phi) p_s, \quad p_e = (1 - \phi)(p_s - p_f), \quad (59)$$

$$\rho_{tot} = \phi \rho_f + (1 - \phi) \rho_s. \quad (60)$$

Искомые функции:  $\phi, \rho_f, \rho_s, \theta, u_f, u_s, p_f$ .

### Автомодельное решение типа бегущей волны

В рассматриваемой математической модели предполагается: лёд - неподвижная, вязкая и несжимаемая среда (т.е.  $u_s = 0$ , значит  $p_e = 0 \Rightarrow p_s = p_f, \rho_s = const$ ); температура постоянна; в системе координат  $Oxyz$  вектор  $g = (0, 0, -g)$ ; входящие в систему (54)-(60) функции зависят от  $z, t$ , т.е.

$$\frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_f \phi u_f) = S, \quad (61)$$

$$\frac{\partial(1 - \phi) \rho_s}{\partial t} = -S, \quad (62)$$

$$\phi u_f = -k(\phi) \left( R \theta \frac{\partial \rho_f}{\partial z} - \rho_f g \right). \quad (63)$$

В системе (61)-(63) перейдём к автомодельной переменной  $\xi = z - ct$ . Получим

$$\frac{d}{d\xi}((-c + u_f) \rho_f \phi) = S, \quad (64)$$

$$-c \rho_s \frac{d}{d\xi}(1 - \phi) = -S, \quad (65)$$

$$\phi u_f = -k(\phi) \left( R \theta \frac{d\rho_f}{d\xi} - \rho_f g \right).$$

Предполагаем, что выполнены граничные условия:

$$u_f(0) = u^+ < 0, \quad \phi(0) = \phi^+, \quad \rho_f(0) = \rho^+, \quad (66)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} u_f(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi(\xi) = \phi^-, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \rho_f(\xi) = \rho^-, \quad (67)$$

где  $u^+, \phi^+, \rho^+, \phi^-, \rho^-$  – заданные постоянные.

Складывая уравнения (64) и (65) получим систему

$$\frac{d}{d\xi}((-c + u_f)\rho_f\phi - c\rho_s(1 - \phi)) = 0, \quad (68)$$

$$\phi u_f = -k(\phi) \left( R\theta \frac{d\rho_f}{d\xi} - \rho_f g \right). \quad (69)$$

Из уравнения (68) получим первый интеграл в виде

$$-c(\rho_f\phi + \rho_s(1 - \phi)) + u_f\rho_f\phi = A_1. \quad (70)$$

используя граничные условия, получим систему для нахождения постоянных  $A_1$  и  $c$

$$-c(\rho^+\phi^+ + \rho_s(1 - \phi^+)) + u^+\rho^+\phi^+ = A_1, \quad (71)$$

$$-c(\rho^-\phi^- + \rho_s(1 - \phi^-)) = A_1. \quad (72)$$

Из уравнений (71) и (72) следует

$$c[\phi^+\rho^+ + (1 - \phi^+)\rho_s - \phi^-\rho^- - \rho_s(1 - \phi^-)] = u^+\rho^+\phi^+, \quad (73)$$

Если  $[\phi^+\rho^+ + (1 - \phi^+)\rho_s - \phi^-\rho^- - \rho_s(1 - \phi^-)] = 0$ , то  $u_+ = 0$ . Но по предположению  $u_+ < 0$ . Следовательно  $[\phi^+\rho^+ + (1 - \phi^+)\rho_s - \phi^-\rho^- - \rho_s(1 - \phi^-)] \neq 0$ , значит  $c < 0$  определяется из (73)

$$c = \frac{u^+\rho^+\phi^+}{\phi^+(\rho^+ + \rho_s) - \phi^-(\rho^- + \rho_s)}.$$

Отсюда получаем представление для  $A_1$

$$A_1 = u^+\rho^+\phi^+ - \frac{u^+\rho^+\phi^+}{\phi^+(\rho^+ + \rho_s) - \phi^-(\rho^- + \rho_s)}(\rho_f\phi + \rho_s(1 - \phi)).$$

Используя представление (46) для  $S$ , уравнение (65) перепишем в виде

$$|c|\rho_s \frac{d}{d\xi}(1 - \phi) = -G\phi(1 - \phi)(\rho_f - \rho_n). \quad (74)$$

Уравнение (74) представим в виде

$$-\frac{d}{d\xi} \left( \ln \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right) \right) = -\frac{G(\rho_f - \rho_n)}{|c|\rho_s}. \quad (75)$$

Интегрируя это соотношение по  $\xi$  от некоторого  $\xi$  до 0, выводим

$$-\ln \left( \frac{\phi^+}{1-\phi^+} \right) + \ln \left( \frac{\phi(\xi)}{1-\phi(\xi)} \right) = -\int_{\xi}^0 \frac{G(\rho_f - \rho_n)}{|c|\rho_s} d\eta,$$

и, следовательно,

$$\ln \left( \frac{1-\phi^+}{\phi^+} \frac{\phi(\xi)}{1-\phi(\xi)} \right) = -\int_{\xi}^0 \frac{G(\rho_f - \rho_n)}{|c|\rho_s} d\eta.$$

Откуда

$$\frac{\phi(\xi)}{1-\phi(\xi)} = \frac{\phi^+}{1-\phi^+} \exp^{-\int_{\xi}^0 \frac{G(\rho_f - \rho_n)}{|c|\rho_s} d\eta}.$$

Правая часть этого равенства неотрицательна, следовательно, и слева должна быть неотрицательная функция, что приводит к выводу  $\frac{\phi(\xi)}{1-\phi(\xi)} \geq 0$ , а это выполнено лишь тогда, когда  $\phi(\xi) \geq 0$  и  $1-\phi(\xi) \geq 0$ , значит  $0 \leq \phi(\xi) \leq 1$ .

Вернёмся к представлению первого интеграла (70) и разделим на  $\rho_f$ , а также рассмотрим уравнение (69). Получим уравнения

$$|c| \left( \phi + \frac{\rho_s}{\rho_f} (1-\phi) \right) + \frac{A_1}{\rho_f} = \phi u_f, \quad \phi u_f = -k(\phi) \left( R\theta \frac{d\rho_f}{d\xi} - \rho_f g \right). \quad (76)$$

Из (76) получим уравнение для плотности пара  $\rho_f$

$$k(\phi) R\theta \frac{d\rho_f}{d\xi} = k(\phi) \rho_f g + |c| \left( \phi + \frac{\rho_s}{\rho_f} (1-\phi) \right) - \frac{A_1}{\rho_f}. \quad (77)$$

Полагая  $u = \ln \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right)$  и  $v = \rho_f - \rho_n$ , а так же безразмеривая уравнения (75) и (77), разделив на  $\rho_s$ , получим систему вида

$$k(\phi) R\theta \frac{dv}{d\xi} = k(\phi) \frac{\rho_f}{\rho_s} g - |c| \left( \phi + \frac{\rho_s}{\rho_f} (1-\phi) \right) - \frac{A_1 \rho_s}{\rho_f},$$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{G}{|c|}v.$$

Заметим, что при  $0 \leq \phi \leq 1$ ,  $u'_\phi = \frac{1}{\phi(1-\phi)} > 0$ , т.е. функция  $u(\phi)$ -монотонно возрастает, причём

$$\frac{du}{d\xi} = u'_\phi \frac{d\phi}{d\xi}, \quad \frac{d^2u}{d\xi^2} = u''_\phi \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 + u'_\phi \frac{d^2\phi}{d\xi^2}.$$

В точках экстремума знаки производных  $\frac{d^2u}{d\xi^2}$  и  $\frac{d^2\phi}{d\xi^2}$  совпадают.

В дальнейшем будет рассматриваться случай  $g = 0$  и  $k(\phi) = const$

$$kR\theta \frac{dv}{d\xi} = |c| \left( \phi + \frac{\rho_s}{\rho_f}(1 - \phi) \right) - \frac{A_1\rho_s}{\rho_f}, \quad (78)$$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{G}{|c|}v. \quad (79)$$

Выразим  $v$  из (79) и подставим в (78). Получим следующее уравнение для  $\phi$

$$kR\theta \frac{|c|}{G} \frac{d^2u}{d\xi^2} = |c| \left( \phi + \frac{\rho_s}{\rho_f}(1 - \phi) \right) - \frac{A_1\rho_s}{\rho_f}. \quad (80)$$

В дальнейшем систему (78), (79) и условия (66),(67) будем называть задачей I.

*Замечание 1.* Согласно [54] для реальных процессов

$$\rho_s = 0,925 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_f = 1,2928 \text{ кг/м}^3, \quad R = 8,314 \text{ Дж/моль К},$$

$$\rho^+, \rho^- > 0, \quad \rho_n < \rho_s, \quad \rho^- \leq \rho_n, \rho^+ \leq \rho_n, \quad b = \frac{\rho_s - \rho_n}{\rho_s - \rho^-} \leq 1,$$

Положим

$$F(\phi) = \phi + \frac{\rho_s}{\rho_n}(1 - \phi), \quad F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n} \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} \phi^- + (1 - \phi^-) \right).$$

Заметим, что для  $0 \leq \phi \leq 1$ ,  $0 \leq \phi^- \leq 1$  функция  $F(\phi)$  меняется от 1 до  $\frac{\rho_s}{\rho_n}$ , а  $F_1(\phi^-)$  от  $\frac{\rho^-}{\rho_n} \leq 1$  до  $\frac{\rho_s}{\rho_n} > 1$ .

### Принципы максимума

*Лемма1 (принцип максимума для пористости).* Пусть начальные данные задачи I удовлетворяют условиям

$$0 \leq \phi^-, \phi^+ \leq 1, \quad 0 < \rho_s < \rho_n < \infty, \rho^+, \rho^- > 0.$$

Тогда для решения  $\phi(\xi)$  задачи I для любого  $\xi \in (-\infty, 0)$  справедливы неравенства  $0 \leq \phi(\xi) \leq 1$ .

Кроме того

а) если  $F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n}$ , то максимум функции  $\phi(\xi)$  равен нулю и, следовательно,  $\phi(\xi) = 0$ ;

б) если  $1 < F_1(\phi^-) < \frac{\rho_s}{\rho_n}$ , то максимум  $\phi(\xi)$  достигается внутри области и лежит на интервале  $[\phi^*, 1]$ , где  $\phi^*$ - решение уравнения  $F(\phi^*) = F_1(\phi^-)$  и определяется равенством

$$\phi^* = \frac{\frac{\rho_s}{\rho_n} - F_1(\phi^-)}{\frac{\rho_s}{\rho_n} - 1};$$

в) если  $F_1(\phi^-) < 1$ , то положительный максимум не достигается внутри области, т.е.

$$\max_{\xi}(\phi) = \max(\phi^-, \phi^+);$$

г) если  $F_1(\phi^-) = 1$ , то положительный максимум достигается внутри области и он равен единице.

*Доказательство.* Заметим, что при  $0 \leq \phi \leq 1$ ,  $u'_\phi = \frac{1}{\phi(1-\phi)} > 0$ , т.е., функция  $u(\phi)$ - монотонная, причём  $\frac{du}{d\xi} = u'_\phi \frac{d\phi}{d\xi}$ ,  $\frac{d^2u}{d\xi^2} = u''_\phi \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 + u'_\phi \frac{d^2\phi}{d\xi^2}$ . В точках экстремума знаки производных  $\frac{d^2u}{d\xi^2}$  и  $\frac{d^2\phi}{d\xi^2}$  совпадают.

Пусть  $\xi_0$ - внутренняя точка положительного максимума функции  $u$ , тогда в этой точке  $u_{\xi\xi} \leq 0$ ,  $u_\xi = 0$ . Из уравнения (78) следует  $v = 0$  и  $\rho_f = \rho_n$ . Поскольку  $u_{\xi\xi} \leq 0$ , то

$$|c| \left( \phi + \frac{\rho_s}{\rho_n}(1 - \phi) \right) - \frac{A_1 \rho_s}{\rho_n} \leq 0.$$

С учётом представления для  $A_1$ , выводим

$$|c| \left( \phi + \frac{\rho_s}{\rho_n}(1 - \phi) \right) \leq \frac{A_1 \rho_s}{\rho_n} \leq |c| \frac{\rho_s}{\rho_n} \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} \phi^- + (1 - \phi^-) \right). \quad (81)$$

Неравенство (81) представим в виде

$$F(\phi) = \phi + \frac{\rho_s}{\rho_n}(1 - \phi) \leq \frac{\rho_s}{\rho_n} \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} \phi^- + (1 - \phi^-) \right) = F_1(\phi^-). \quad (82)$$

В левой части неравенства (82) функция  $F(\phi)$ - является монотонно убывающей по  $\phi \in (0, 1)$  и меняется от 1 до  $\frac{\rho_s}{\rho_n}$ . В правой части неравенства (82) функция  $F_1(\phi^-)$  также монотонно убывает и изменяется от  $\frac{\rho^-}{\rho_n}$  до  $\frac{\rho_s}{\rho_n}$ .

Сравним функции  $F(\phi)$  и  $F_1(\phi^-)$ . Возможны четыре случая:

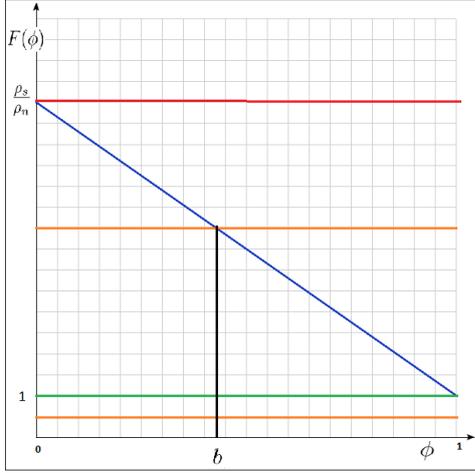


Рисунок 3 – График функции  $F(\phi)$ .

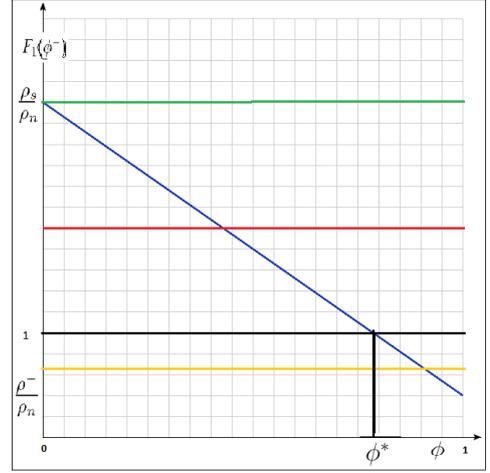


Рисунок 4 – График функции  $F_1(\phi^-)$ .

1)  $F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n}$ . Это равенство верно только при  $\phi^- = 0$ , и  $\max(\phi) = 0$ . Поэтому  $\phi \equiv 0$  (см. рисунок 3).

2) Рассмотрим случай когда  $1 < F_1(\phi^-) < \frac{\rho_s}{\rho_n}$ . Из равенства  $F(\phi^*) = F_1(\phi^-)$  находим  $\phi^*$ :

$$\phi^* + \frac{\rho_s}{\rho_n}(1 - \phi^*) = F_1(\phi^-),$$

$$\phi^* = \frac{\frac{\rho_s}{\rho_n} - F_1(\phi^-)}{\frac{\rho_s}{\rho_n} - 1}. \quad (83)$$

В силу (83) неравенство (82) выполняется для всех  $\phi \in [\phi^*, 1]$ , т.е. максимум  $\phi$  достигается на данном отрезке.

3) При  $F_1(\phi^-) = 1$ , неравенство (82) верно в одной точке  $\phi = 1$ , т.е. максимум достигается внутри области, причём

$$\max_{\xi}(\phi) = 1,$$

что означает  $\phi(\xi) \leq 1$ , для всех  $\xi \in (-\infty, 0)$ .

4)  $F_1(\phi^-) < 1$  неравенство (82) не выполняется, значит положительный максимум не достигается внутри области, а достигается на границе

$$\max_{\xi}(\phi) = \max(\phi^-, \phi^+).$$

Лемма 1 доказана.

*Замечание 2.* Условия леммы 1 в терминах  $\phi^-$  выглядят следующим образом:

а)  $F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n}$ , эквивалентно  $\phi^- = 0$ , значит максимум функции  $\phi(\xi)$  равен нулю и, следовательно,  $\phi(\xi) = 0$ ;

б)  $1 < F_1(\phi^-) < \frac{\rho_s}{\rho_n}$ , эквивалентно  $0 < \phi^- < b$ , где  $b = \frac{\rho_s - \rho_n}{\rho_s - \rho^-}$ , значит максимум  $\phi(\xi)$  достигается внутри области и лежит на интервале  $[\phi^*, 1]$ , где  $\phi^*$ - решение уравнения  $F(\phi^*) = F_1(\phi^-)$  и определяется равенством

$$\phi^* = \frac{\frac{\rho_s}{\rho_n} - F_1(\phi^-)}{\frac{\rho_s}{\rho_n} - 1}.$$

в)  $F_1(\phi^-) = 1$ , эквивалентно  $\phi^- = b$ , значит положительный максимум достигается внутри области и он равен единице.

г)  $F_1(\phi^-) < 1$ , эквивалентно  $\phi^- < b$ , т.е. неравенство (82) не выполняется, положительный максимум не достигается внутри области и

$$\max_{\xi}(\phi) = \max(\phi^-, \phi^+).$$

*Доказательство.*

1) Рассмотрим условие  $F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n}$ . Имеем:

$$F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n} \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} \phi^- + (1 - \phi^-) \right) = \frac{\rho_s}{\rho_n},$$

отсюда получим

$$\phi^- \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} - 1 \right) = 0,$$

значит  $\phi^- = 0$ . Используя условие леммы 1 получаем, что максимум функции  $\phi(\xi)$  равен нулю и, следовательно,  $\phi(\xi) = 0$ .

2) В условии  $1 < F_1(\phi^-) < \frac{\rho_s}{\rho_n}$  рассмотрим:

а)

$$F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n} \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} \phi^- + (1 - \phi^-) \right) > 1.$$

Из этого неравенства получаем

$$\phi^- \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} - 1 \right) > \frac{\rho_n}{\rho_s} - 1,$$

заметим, что  $\left(\frac{\rho_n}{\rho_s} - 1\right)$  и  $\left(\frac{\rho^-}{\rho_s} - 1\right)$  меньше нуля, значит имеем

$$\phi^- \left(1 - \frac{\rho^-}{\rho_s}\right) < 1 - \frac{\rho_n}{\rho_s},$$

откуда получаем что

$$\phi^- < \frac{\rho_s - \rho_n}{\rho_s - \rho^-} = b.$$

б)

$$F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n} \left(\frac{\rho^-}{\rho_s} \phi^- + (1 - \phi^-)\right) > \frac{\rho_s}{\rho_n},$$

Разделив на  $\frac{\rho_s}{\rho_n} \neq 0$ , получим  $\phi^- \left(\frac{\rho^-}{\rho_s} - 1\right) < 0$ , т.е.  $\phi^- > 0$ .

Получили условие для  $\phi^-$  в виде  $0 < \phi^- < b$ . Пользуясь результатом леммы 1 получаем, что максимум  $\phi(\xi)$  достигается внутри области и лежит на интервале  $[\phi^*, 1]$ , где  $\phi^*$ - решение уравнения  $F(\phi^*) = F_1(\phi^-)$  и определяется равенством

$$\phi^* = \frac{\frac{\rho_s}{\rho_n} - F_1(\phi^-)}{\frac{\rho_s}{\rho_n} - 1}.$$

Учитывая вид  $F_1(\phi^-)$  получим  $\phi^*$  в виде  $\phi^* = \frac{\phi^-}{b}$ .

3) Рассмотрим условие  $F_1(\phi^-) = 1$ . Воспользуемся предыдущим подпунктом а) из 2), учитывая что в нашем случае используется равенство, т.е. получаем что

$$\phi^- = \frac{\rho_s - \rho_n}{\rho_s - \rho^-} = b.$$

Из леммы 1 получим, что максимум достигается внутри области и он равен единице.

4) При  $F_1(\phi^-) < 1$ , получаем что

$$F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n} \left(\frac{\rho^-}{\rho_s} \phi^- + (1 - \phi^-)\right) < 1,$$

из этого неравенства следует

$$\phi^- \left(\frac{\rho^-}{\rho_s} - 1\right) < \frac{\rho_n}{\rho_s} - 1.$$

Заметим, что  $\frac{\rho_n}{\rho_s} < 1$  и  $\frac{\rho^-}{\rho_s} < 1$ , значит имеем

$$\phi^- \left( 1 - \frac{\rho^-}{\rho_s} \right) > 1 - \frac{\rho_n}{\rho_s},$$

откуда получаем, что

$$\phi^- > \frac{\rho_s - \rho_n}{\rho_s - \rho^-} = b,$$

т.е. неравенство (82) не выполняется, положительный максимум не достигается внутри области и

$$\max_{\xi}(\phi) = \max(\phi^-, \phi^+).$$

*Лемма 2 (о положительном минимуме).* Пусть начальные данные задачи I удовлетворяют условиям

$$0 \leq \phi^-, \phi^+ \leq 1, 0 < \rho_s < \rho_n < \infty, \rho^+, \rho^- > 0.$$

Тогда для решения  $\phi(\xi)$  задачи I для любого  $\xi \in (-\infty, 0)$  справедливо неравенство  $0 \leq \phi(\xi) \leq 1$ .

Кроме того

а) если  $F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n}$ , то минимум достигается внутри области и равен нулю.

б) если  $1 < F_1(\phi^-) < \frac{\rho_s}{\rho_n}$ , то минимум  $\phi$  достигается внутри области и лежит на интервале  $[0, \tilde{\phi}]$ , где  $\tilde{\phi}$  – решение уравнения  $F(\tilde{\phi}) = F_1(\phi^-)$  и имеет вид

$$\tilde{\phi} = \frac{\frac{\rho_s}{\rho_n} - F_1(\phi^-)}{\frac{\rho_s}{\rho_n} - 1}.$$

в) если  $F_1(\phi^-) \leq 1$ , то минимум достигается внутри области.

*Доказательство.* Пусть  $\xi_1$  – внутренняя точка положительного минимума функции  $u$ . Тогда в этой точке  $u_{\xi\xi} \geq 0, u_{\xi} = 0$ . Из уравнения (78) получаем  $v = 0$ , а значит  $\rho_f = \rho_n$ .

Поскольку  $u_{\xi\xi} \geq 0$ , имеем

$$|c| \left( \phi + \frac{\rho_s}{\rho_n} (1 - \phi) \right) - \frac{A_1 \rho_s}{\rho_n} \geq 0,$$

тогда учитывая вид  $A_1$  получаем

$$|c| \left( \phi + \frac{\rho_s}{\rho_n} (1 - \phi) \right) \geq \frac{A_1 \rho_s}{\rho_n} \geq |c| \frac{\rho_s}{\rho_n} \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} \phi^- + (1 - \phi^-) \right). \quad (84)$$

Перепишем неравенство (84) в виде

$$F(\phi) = \phi + \frac{\rho_s}{\rho_n}(1 - \phi) \geq \frac{\rho_s}{\rho_n} \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} \phi^- + (1 - \phi^-) \right) = F_1(\phi^-). \quad (85)$$

В левой части неравенства (85) функция  $F(\phi)$ - является монотонно убывающей по  $\phi \in (0, 1)$  и меняется от 1 до  $\frac{\rho_s}{\rho_n}$ . В правой части неравенства (85) функция  $F_1(\phi^-)$  также монотонно убывает и изменяется от  $\frac{\rho^-}{\rho_n}$  до  $\frac{\rho_s}{\rho_n}$ .

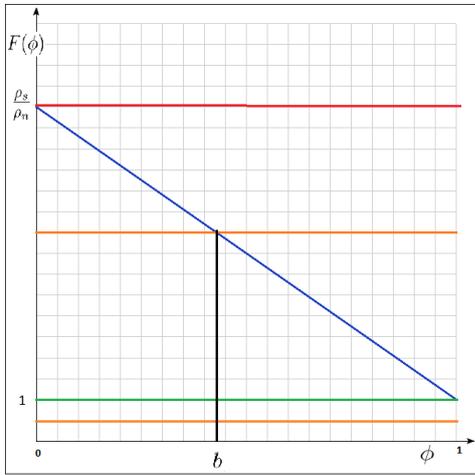


Рисунок 5 – График функции  $F(\phi)$ .

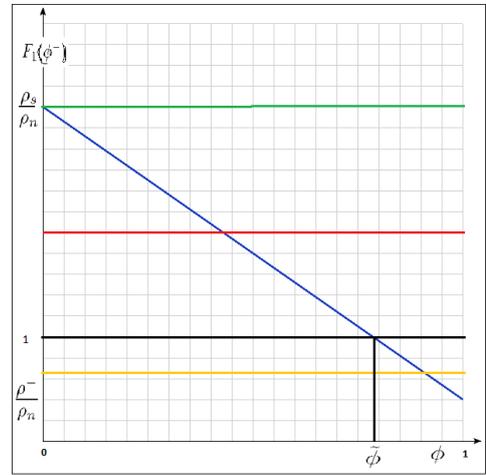


Рисунок 6 – График функции  $F_1(\phi^-)$ .

Сравним функции  $F(\phi)$  и  $F_1(\phi^-)$ . Возможны три случая:

1) если  $F_1(\phi^-) \leq 1$ , то неравенство (85) выполнено всегда, значит минимум достигается внутри области.

2) При  $F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n}$  неравенство (85) верно в одной точке, т.е. положительный минимум достигается внутри области, причём

$$\min_{\xi}(\phi) = 0,$$

для всех  $\xi \in (-\infty, 0)$ .

3) Рассмотрим случай когда  $1 < F_1(\phi^-) < \frac{\rho_s}{\rho_n}$ . Из равенства  $F(\tilde{\phi}) = F_1(\phi^-)$  находим  $\tilde{\phi}$ :

$$\tilde{\phi} + \frac{\rho_s}{\rho_n}(1 - \tilde{\phi}) = F_1(\phi^-),$$

$$\tilde{\phi} = \frac{\frac{\rho_s}{\rho_n} - F_1(\phi^-)}{\frac{\rho_s}{\rho_n} - 1}. \quad (86)$$

В силу (86) неравенство (85) выполняется для всех  $\phi \in [0, \tilde{\phi}]$ , т.е. минимум достигается внутри области и лежит на данном отрезке.

Лемма 2 доказана.

*Замечание 3.* Условия леммы 2 в терминах  $\phi^-$  выглядят следующим образом

а) условие  $F_1(\phi^-) \leq 1$ , эквивалентно  $\phi^- \geq b$ , значит минимум достигается внутри области;

б) условие  $F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n}$ , эквивалентно  $\phi^- = 0$  значит минимум достигается внутри области и равен нулю;

в) условие  $1 < F_1(\phi^-) < \frac{\rho_s}{\rho_n}$ , эквивалентно  $0 < \phi^- < b$  значит минимум  $\phi$  достигается внутри области и лежит на интервале  $[0, \tilde{\phi}]$ , где  $\tilde{\phi}$ - решение уравнения  $F(\tilde{\phi}) = F_1(\phi^-)$  и имеет вид

$$\tilde{\phi} = \frac{\frac{\rho_s}{\rho_n} - F_1(\phi^-)}{\frac{\rho_s}{\rho_n} - 1}.$$

*Доказательство.*

а) Рассмотрим условие

$$F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n} \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} \phi^- + (1 - \phi^-) \right) \leq 1.$$

Из этого неравенства получаем

$$\phi^- \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} - 1 \right) \leq \frac{\rho_n}{\rho_s} - 1.$$

Заметив, что  $\frac{\rho_n}{\rho_s} < 1$  и  $\frac{\rho^-}{\rho_s} < 1$ , выводим

$$\phi^- \left( 1 - \frac{\rho^-}{\rho_s} \right) \geq 1 - \frac{\rho_n}{\rho_s},$$

откуда получаем что

$$\phi^- \geq \frac{\rho_s - \rho_n}{\rho_s - \rho^-} = b.$$

Используя лемму 2 в этом случае имеем, что минимум достигается внутри области.

б) Рассмотрим условие  $F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n}$ . Используя вид  $F_1(\phi^-)$ , имеем

$$F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n} \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} \phi^- + (1 - \phi^-) \right) = \frac{\rho_s}{\rho_n},$$

разделив это равенство на  $\frac{\rho_s}{\rho_n}$  получим

$$\phi^- \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} - 1 \right) = 0.$$

Значит  $\phi^- = 0$ . Используя условие леммы 2 получаем, что минимум достигается внутри области и равен нулю.

в) Рассмотрим условие  $1 < F_1(\phi^-) < \frac{\rho_s}{\rho_n}$ :

1)

$$F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n} \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} \phi^- + (1 - \phi^-) \right) > 1.$$

Из этого неравенства получаем

$$\phi^- \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} - 1 \right) > \frac{\rho_n}{\rho_s} - 1.$$

Заметим, что  $\frac{\rho_n}{\rho_s} < 1$  и  $\frac{\rho^-}{\rho_s} < 1$ , выводим неравенство

$$\phi^- \left( 1 - \frac{\rho^-}{\rho_s} \right) < 1 - \frac{\rho_n}{\rho_s}.$$

Следовательно

$$\phi^- < \frac{\rho_s - \rho_n}{\rho_s - \rho^-} = b.$$

2)

$$F_1(\phi^-) = \frac{\rho_s}{\rho_n} \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} \phi^- + (1 - \phi^-) \right) > \frac{\rho_s}{\rho_n},$$

разделив равенство на  $\frac{\rho_s}{\rho_n} \neq 0$  получим  $\phi^- \left( \frac{\rho^-}{\rho_s} - 1 \right) < 0$ , и, следовательно,  $\phi^- > 0$ .

Получили условие для  $\phi^-$  в виде  $0 < \phi^- < b$ . Пользуясь результатом леммы 2 получаем, что минимум  $\phi$  достигается внутри области и лежит на интервале  $[0, \tilde{\phi}]$ , где  $\tilde{\phi}$ - решение уравнения  $F(\tilde{\phi}) = F_1(\phi^-)$  и имеет вид

$$\tilde{\phi} = \frac{\frac{\rho_s}{\rho_n} - F_1(\phi^-)}{\frac{\rho_s}{\rho_n} - 1}.$$

Учитывая вид  $F_1(\phi^-)$ , получим  $\tilde{\phi}$  в виде  $\tilde{\phi} = \frac{\phi^-}{b}$ .

Рассмотрим теперь задачу (78)

$$kR\theta \frac{dv}{d\xi} = |c| \left( \phi + \frac{\rho_s}{\rho_f}(1 - \phi) \right) - \frac{A_1\rho_s}{\rho_f} \quad (87)$$

*Лемма 3 (принцип максимума для плотности).* Пусть начальные данные задачи I удовлетворяют условиям

$$0 \leq \phi^-, \phi^+ \leq 1, 0 < \rho_s < \rho_n < \infty, \rho^+, \rho^- > 0.$$

Тогда для решения  $\rho_f(\xi)$  задачи I для любого  $\xi \in (-\infty, 0)$  справедливо неравенство  $0 \leq \rho_f(\xi) \leq \rho_n$ .

*Доказательство.* Рассмотрим уравнение (87). Обозначим  $B = \frac{kR\theta}{|c|}$ , следовательно получим

$$B \frac{dv}{d\xi} = \phi + \frac{\rho_s}{\rho_f}(1 - \phi) - \frac{A_1\rho_s}{\rho_f}.$$

Учитывая вид  $v = \rho_f - \rho_n$  и домножая на  $\rho_f$ , получим

$$B\rho_f \frac{d\rho_f}{d\xi} = \phi\rho_f + \rho_s(1 - \phi) - A_1\rho_s.$$

Внесём  $\rho_f$  под знак дифференциала

$$\frac{B}{2} \frac{d\rho_f^2}{d\xi} = \phi\rho_f + \rho_s(1 - \phi) - A_1\rho_s. \quad (88)$$

Продифференцируем (88) по  $\xi$

$$\frac{B}{2} \frac{d^2}{d\xi^2}(\rho_f^2) = \frac{d}{d\xi}(\phi\rho_f + \rho_s(1 - \phi)).$$

В итоге получаем

$$\frac{B}{2} \frac{d^2}{d\xi^2}(\rho_f^2) = \frac{d\phi}{d\xi}(\rho_f - \rho_s) + \phi \frac{d\rho_f}{d\xi}. \quad (89)$$

Вернёмся к представлению для  $v = \rho_f - \rho_n$  и перепишем уравнение (89)

$$\frac{B}{2} \frac{d^2(v + \rho_n)^2}{d\xi^2} = \frac{d\phi}{d\xi}(v + \rho_n - \rho_s) + \phi \frac{dv}{d\xi}. \quad (90)$$

Введём функцию

$$v^+ = \max\{v, 0\},$$

которая на границе области равно нулю, т.е.  $v^+|_{\xi=0} = v^+|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0$ . Домножим уравнение (90) на  $v^+$ , получим

$$\frac{B}{2} v^+ \frac{d^2(v + \rho_n)^2}{d\xi^2} = v^+ \frac{d\phi}{d\xi} (v + \rho_n - \rho_s) + v^+ \phi \frac{dv}{d\xi}. \quad (91)$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{d\xi} \left[ v^+ \frac{d(v + \rho_n)^2}{d\xi} \right] = v^+ \frac{d^2(v + \rho_n)^2}{d\xi^2} + \frac{dv^+}{d\xi} \frac{d(v + \rho_n)^2}{d\xi},$$

и

$$\frac{1}{2} \phi \frac{d(v^+)^2}{d\xi} = \frac{1}{2} \left( \frac{d[\phi(v^+)^2]}{d\xi} - (v^+)^2 \frac{d\phi}{d\xi} \right).$$

Перепишем уравнение (91) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{B}{2} \left( \frac{d}{d\xi} \left[ v^+ \frac{d(v + \rho_n)^2}{d\xi} \right] - \frac{dv^+}{d\xi} \frac{d^2(v + \rho_n)^2}{d\xi^2} \right) = \\ & = \frac{d\phi}{d\xi} v^+ (v + \rho_n - \rho_s) + \frac{1}{2} \left( \frac{d[\phi(v^+)^2]}{d\xi} - (v^+)^2 \frac{d\phi}{d\xi} \right). \end{aligned} \quad (92)$$

Проинтегрируем равенство (92) по  $\xi$  от  $-R$  до 0

$$\begin{aligned} & \frac{B}{2} \int_{-R}^0 \frac{d}{d\xi} \left[ v^+ \frac{d(v + \rho_n)^2}{d\xi} \right] d\xi - \frac{B}{2} \int_{-R}^0 \frac{dv^+}{d\xi} \frac{d^2(v + \rho_n)^2}{d\xi^2} d\xi = \\ & = \int_{-R}^0 \frac{d\phi}{d\xi} v^+ (v + \rho_n - \rho_s) d\xi + \int_{-R}^0 \frac{1}{2} \left( \frac{d[\phi(v^+)^2]}{d\xi} - (v^+)^2 \frac{d\phi}{d\xi} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Устремим  $R$  к  $\infty$  и учитывая, что  $v^+|_{\xi=0} = v^+|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0$ , получим

$$\frac{B}{2} \int_{-R}^0 2(v + \rho_n) \frac{dv^+}{d\xi} \frac{dv}{d\xi} d\xi + \int_{-R}^0 \frac{d\phi}{d\xi} v^+ (v + \rho_n - \rho_s) d\xi = 0. \quad (93)$$

Поскольку

$$|c| \rho_s \frac{d}{d\xi} (1 - \phi) = \begin{cases} G\phi(1 - \phi)(\rho_f - \rho_n) & v < 0 \\ 0 & v \geq 0 \end{cases}, \quad (94)$$

на множестве  $\{\xi \mid v(\xi) > 0\}$ , имеем  $\frac{d\phi}{d\xi} = 0$ . Поэтому из (93) следует

$$\int_{-R}^0 2(v + \rho_n) \frac{dv^+}{d\xi} \frac{dv}{d\xi} d\xi = 0,$$

так как  $v + \rho_n > 0$ ,  $\frac{dv^+}{d\xi} = 0$ , т.е.  $v^+ = const$ . Из условий  $v^+|_{\xi=0} = v^+|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0$  следует, что  $v^+ = 0$ . Это означает, что  $v \leq 0$ , следовательно,  $\rho_f \leq \rho_n$ .

Рассмотрим теперь функцию  $z = -\rho_f$ , и представим уравнение (90) в виде

$$\frac{B}{2} \frac{d^2 z^2}{d\xi^2} = \frac{d\phi}{d\xi} (-z - \rho_s) - \phi \frac{dz}{d\xi}. \quad (95)$$

Введём функцию  $z^+ = \max\{z, 0\}$  и  $z^+|_{\xi=0} = z^+|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0$ . Умножая уравнение (95) на  $z^+$ , получим

$$-\frac{B}{2} z^+ \frac{d^2 z^2}{d\xi^2} = \frac{d\phi}{d\xi} z^+ (z + \rho_s) + z^+ \phi \frac{dz}{d\xi}. \quad (96)$$

Учитывая равенства

$$z^+ \frac{d^2 z^2}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left( z^+ \frac{dz^2}{d\xi} \right) - \frac{dz^+}{d\xi} \frac{dz^2}{d\xi},$$

$$\frac{1}{2} \phi \frac{d(z^+)^2}{d\xi} = \frac{1}{2} \left( \frac{d[\phi(z^+)^2]}{d\xi} - (z^+)^2 \frac{d\phi}{d\xi} \right),$$

выводим, что

$$-\frac{B}{2} \left( \frac{d}{d\xi} \left( z^+ \frac{dz^2}{d\xi} \right) - \frac{dz^+}{d\xi} \frac{dz^2}{d\xi} \right) = \frac{d\phi}{d\xi} z^+ (z + \rho_s) + \frac{1}{2} \frac{d(\phi(z^+)^2)}{d\xi} - \frac{1}{2} (z^+)^2 \frac{d\phi}{d\xi}. \quad (97)$$

Проинтегрируем равенство (97) по  $\xi$  от  $-R$  до 0 и устремим  $R$  к  $\infty$ . Учитывая, что  $z^+|_{\xi=0} = z^+|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0$ , получим

$$\int_{-R}^0 \left( \frac{B}{2} z^+ \left( \frac{dz^+}{d\xi} \right)^2 + \frac{d\phi}{d\xi} \left( \frac{1}{2} (z^+)^2 + z^+ \rho_s \right) \right) d\xi = 0. \quad (98)$$

Заменяя  $\frac{d\phi}{d\xi}$  из (94), тождеству (98) придадим вид

$$\int_{-R}^0 \left( \frac{B}{2} z^+ \left( \frac{dz^+}{d\xi} \right)^2 + \frac{G}{\rho_s} \phi(1-\phi)(\rho_n - \rho_f) \left( \frac{1}{2} (z^+)^2 + z^+ \rho_s \right) \right) d\xi = 0. \quad (99)$$

Каждое из подинтегральных слагаемых равенства (99) неотрицательно. Поэтому  $z^+ = 0$ , а значит  $z \leq 0, \rho_f \geq 0$ .

Лемма 3 доказана.

*Лемма 4.* Решение задачи I единственно.

*Доказательство.* Пусть  $u^1, u^2, v^1, v^2$  — два решения задачи I. Тогда

$$\frac{B}{|c|} (v^i + \rho_n) \frac{dv^i}{d\xi} = \phi^i(u) (v^i + \rho_n) + \rho_s (1 - \phi^i(u)) - \frac{A_1 \rho_s}{|c|},$$

$$\frac{du^i}{d\xi} = \frac{G}{|c|} v^i, \quad i = 1, 2,$$

$$v^i |_{\xi=0} = \rho^+ - \rho_n, \quad v^i |_{\xi \rightarrow -\infty} = \rho^- - \rho_n, \quad u^i |_{\xi=0} = u^+, \quad u^i |_{\xi \rightarrow -\infty} = u^-,$$

где  $u^- = \ln\left(\frac{\phi^-}{1-\phi^-}\right), u^+ = \ln\left(\frac{\phi^+}{1-\phi^+}\right)$ .

Полагая  $v = v^1 - v^2, u = u^1 - u^2, \phi(u) = \phi^1(u) - \phi^2(u)$  имеем

$$\frac{B}{|c|} \left[ v \frac{dv^1}{d\xi} + (v^2 + \rho_n) \frac{dv}{d\xi} \right] = \phi(u) (v^1 + \rho_n) + \phi^2(u) v + \rho_s \phi(u), \quad (100)$$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{G}{|c|} v. \quad (101)$$

$$v |_{\xi=0} = v |_{\xi \rightarrow -\infty} = u |_{\xi=0} = u^+ = u^- |_{\xi \rightarrow -\infty} = 0,$$

Из уравнения (101) выразим  $v$  и подставим в уравнение (100), тогда получим

$$\frac{B}{G} (v^2 + \rho_n) \frac{d^2 u}{d\xi^2} = \frac{|c|}{G} \frac{du}{d\xi} \left( \phi^2(u) - \frac{B}{|c|} \frac{dv^1}{d\xi} \right) + \phi(u) (v^1 + \rho_n + \rho_s). \quad (102)$$

В точке положительного максимума  $\xi_0$  функции  $u$  имеем  $\frac{d^2 u}{d\xi^2} \leq 0, \frac{du}{d\xi} = 0, \phi(u) > 0$ . Тогда приходим к противоречию  $0 < \phi(\xi_0) \leq 0$ , т.е.  $\phi(\xi_0) = 0$ .

Рассмотрим функцию  $\omega = -u \geq 0$  в точке положительного максимума  $\xi_0$ . В этой точке имеем  $\frac{d^2\omega}{d\xi^2} \leq 0$ ,  $\frac{d\omega}{d\xi} = 0$ ,  $\phi < 0$ . Из уравнения (102) следует  $0 < -\phi(\xi_0) \leq 0$ , т.е.  $\phi(\xi_0) \equiv 0$ .

Лемма 4 доказана.

*Теорема* Если  $\frac{A_1\rho_s}{|c|} = 1$ , то решение задачи I даётся в квадратурах.

*Доказательство.* Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\frac{B}{|c|} \frac{d\rho_f}{d\xi} &= \phi + \frac{\rho_s}{\rho_f}(1 - \phi) - \frac{A_1\rho_s}{|c|\rho_f}, \\ \frac{du}{d\xi} &= \frac{G}{|c|}(\rho_f - \rho_s).\end{aligned}$$

Приведём её к виду

$$\frac{B}{|c|} \rho_f \frac{d\rho_f}{d\xi} = (\rho_f - \rho_s)\phi + \rho_s \left(1 - \frac{A_1}{|c|}\right), \quad (103)$$

$$\rho_f = \frac{|c|}{G} \frac{du}{d\xi} + \rho_s. \quad (104)$$

Подставляя представление для  $\rho_f$  (104) в уравнение (103), получим

$$\frac{B}{G} \left(\frac{|c|}{G} u_\xi + \rho_s\right) u_{\xi\xi} = \frac{|c|}{G} u_\xi \phi + \rho_s \left(1 - \frac{A_1}{|c|}\right). \quad (105)$$

Приведём уравнение (105) к виду

$$u_{\xi\xi} = \frac{|c|u_\xi\phi}{B \left(\frac{|c|}{G}u_\xi + \rho_s\right)} + \frac{\rho_s G \left(1 - \frac{A_1}{|c|}\right)}{B \left(\frac{|c|}{G}u_\xi + \rho_s\right)}.$$

Сделав замену переменных  $u_\xi = p(u)$ ,  $u_{\xi\xi} = p'_u p$ , получим

$$p'_u p = \frac{|c|p\phi}{B \left(\frac{|c|}{G}p + \rho_s\right)} + \frac{\rho_s G \left(1 - \frac{A_1}{|c|}\right)}{B \left(\frac{|c|}{G}p + \rho_s\right)}. \quad (106)$$

Если  $\frac{A_1}{|c|} \neq 1$ , то  $p \neq 0$  и вместо (106) имеем

$$p'_u = \frac{|c|\phi(u)}{B \left(\frac{|c|}{G}p + \rho_s\right)} + \frac{\rho_s G \left(1 - \frac{A_1}{|c|}\right)}{B p \left(\frac{|c|}{G}p + \rho_s\right)} = g(u, p). \quad (107)$$

Рассмотрим случай  $\frac{A_1}{|c|} = 1$ . Уравнение (107) приводится к виду

$$p \left( p'_u - \frac{|c|\phi}{B \left( \frac{|c|}{G}p + \rho_s \right)} \right) = 0.$$

Возможны два варианта:

1)  $p = 0$ . Значит  $u = const$ .

2)

$$\frac{dp}{du} = \frac{|c|\phi}{B \left( \frac{|c|}{G}p + \rho_s \right)},$$

$$p|_{u=u^+} = \frac{G}{|c|}(\rho^+ - \rho_n), \quad u|_{\xi=0} = u^+, \quad p|_{u=u^-} = \frac{G}{|c|}(\rho^- - \rho_n), \quad u|_{\xi \rightarrow -\infty} = u^-.$$

Легко видеть, что решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{du}{d\xi} = p = \left( \sqrt{\frac{2|c|c_1}{G} + \frac{2|c|^2}{BG} \int_{u_0}^{u(\xi)} \phi(s) ds} - \rho_s \right) \frac{G}{|c|} = F(u), \quad (108)$$

где  $c_1$  – произвольная постоянная.

Из (108) получаем решение в квадратурах

$$-\xi = \int_{u(\xi)}^0 \frac{1}{F(s)} ds.$$

Теорема доказана.

## 6. Постановка задачи о сублимации подвижного льда

### Автомодельная постановка задачи

Автомодельная задача рассматривается в предположениях, что лёд является вязкой, несжимаемой средой (т.е.  $\rho_s = const$ ); температура постоянна.

Введём автомодельную переменную типа бегущей волны  $\xi = x - ct$ , получим систему

$$\frac{d}{d\xi} (\rho_f \phi(u_f - c)) = S, \quad (109)$$

$$\frac{d}{d\xi} ((1 - \phi)\rho_s(u_s - c)) = -S, \quad (110)$$

$$\phi(u_f - u_s) = -k \frac{dp_f}{d\xi}, \quad (111)$$

$$\frac{du_s}{d\xi} = -a_1(\phi)p_e, \quad a_1(\phi) = \alpha\phi, \quad p_e = p^0(t) - p_f. \quad (112)$$

Сложив уравнения (109) и (110), а также проинтегрировав по  $\xi$  получим первый интеграл

$$(u_f - c)\rho_f\phi + (u_s - c)\rho_s(1 - \phi) = A_1.$$

Используя уравнение Дарси с учетом постоянной  $c$ , выразим  $(u_f - c)\phi$ :

$$(u_f - c)\phi = -k \frac{dp_f}{d\xi} + (u_s - c)\phi,$$

Подставляя данное представление в первый интеграл имеем:

$$-k\rho_f \frac{dp_f}{d\xi} + (u_s - c)(\rho_f\phi + \rho_s(1 - \phi)) = A_1. \quad (113)$$

Вернёмся к уравнению (113) и представляем его в виде

$$(u_s - c) \frac{d}{d\xi} (\ln(1 - \phi)) = -\frac{du_s}{d\xi} - \frac{S}{\rho_s(1 - \phi)},$$

Учитывая все переменные и представления для некоторых величин получим окончательную систему:

$$\begin{aligned} -k\rho_f \frac{dp_f}{d\xi} + (u_s - c)\rho_{tot} &= A_1 \\ \frac{(u_s - c)}{\phi(1 - \phi)} \frac{d\phi}{d\xi} &= -\frac{du_s}{d\xi} - \frac{G\phi(\rho_f - \rho_n)}{\rho_s}, \\ \frac{du_s}{d\xi} &= -\alpha\phi(p^0 - p_f). \end{aligned}$$

Можно продолжить преобразование системы, и свести ее к двум уравнениям:

$$(A_1 + k\rho_f \frac{dp_f}{d\xi}) \frac{1}{\rho_{tot}} \frac{1}{\phi(1 - \phi)} \frac{d\phi}{d\xi} = \alpha\phi(p^0 - p_f) - \frac{G\phi(\rho_f - \rho_n)}{\rho_s}, \quad (114)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{A_1}{\rho_{tot}} + \frac{k\rho_f}{\rho_{tot}} \frac{dp_f}{d\xi} \right) = -\alpha\phi(p^0 - p_f). \quad (115)$$

В дальнейшем систему (114), (115) и условия (66), (67) будем называть задачей II.

*Лемма 1 (принцип максимума для плотности).* Пусть начальные данные задачи II удовлетворяют условиям  $0 \leq \phi^-, \phi^+ \leq 1$ ,  $0 < \rho_s < \rho_n < \infty$ ,  $\rho^+, \rho^- > 0$ ,  $\rho^0 < \rho_n$ .

Тогда для решения  $\rho_f(\xi)$  задачи II для любого  $\xi \in (-\infty, 0)$  справедливо неравенство  $\rho_f(\xi) \leq \rho_n$ .

*Доказательство.*

Рассмотрим уравнение (115) и введем переменную  $v = \rho_f - \rho_n$ . Уравнение примет вид

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{A_1}{\rho_{tot}(v)} + \frac{k(v - \rho_n)}{\rho_{tot}(v)} \frac{dp_f(v)}{d\xi} \right) = -\alpha\phi(p^0 - p_f(v)). \quad (116)$$

Положим  $v^+ = \max(v, 0)$ ,  $v^+|_{\xi \rightarrow -\infty} = v^+|_{\xi=0} = 0$ . Перенесём правую часть уравнения (116) налево и проинтегрируем по  $\xi$  от 0 до  $-\infty$ . Получим

$$\left( \frac{A_1}{\rho_{tot}(v)} + \frac{k(v - \rho_n)}{\rho_{tot}(v)} \frac{dp_f(v)}{d\xi} \right) \Big|_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \alpha\phi(p^0 - p_f(v)) d\xi = 0.$$

На множестве  $v \geq 0$ , т.е.  $\rho_f - \rho_n \geq 0$ , имеем  $S = 0$ . Систему (109)-(112) можно переписать

$$\frac{d}{d\xi} (\rho_f \phi(u_f - c)) = 0, \quad (117)$$

$$\frac{d}{d\xi} ((1 - \phi)\rho_s(u_s - c)) = 0, \quad (118)$$

$$\phi(u_f - u_s) = -k \frac{dp_f}{d\xi}, \quad (119)$$

$$\frac{du_s}{d\xi} = -a_1(\phi)p_e, \quad a_1(\phi) = \alpha\phi, \quad p_e = p^0(t) - p_f. \quad (120)$$

Продифференцируем уравнение (118) по  $\xi$

$$-\frac{d\phi}{d\xi}(u_s - c) + (1 - \phi)\frac{du_s}{d\xi} = 0,$$

и учитывая уравнение для скорости льда, получим

$$-\frac{d\phi}{d\xi}(u_s - c) - (1 - \phi)a_1(\phi)p_e = 0. \quad (121)$$

Поскольку

$$u_s - c = \frac{A_1}{\rho_{tot}} + \frac{k\rho_f}{\rho_{tot}}\frac{dp_f}{d\xi},$$

то вместо (121) получим

$$-\frac{d\phi}{d\xi}\left(\frac{A_1}{\rho_{tot}} + \frac{k\rho_f}{\rho_{tot}}\frac{dp_f}{d\xi}\right) - (1 - \phi)a_1(\phi)p_e = 0. \quad (122)$$

В точке положительного максимума функции  $\rho_f$  имеем  $\frac{d\rho_f}{d\xi} = 0$ ,  $\frac{d^2\rho_f}{d\xi^2} \leq 0$ , следовательно, из (122) получим

$$-\frac{d\phi}{d\xi}\frac{A_1}{\rho_{tot}} - (1 - \phi)a_1(\phi)p_e \leq 0.$$

Откуда следует выражение

$$\frac{A_1}{\rho_{tot}}\frac{d\phi}{d\xi} \geq -a_1(\phi)p_e(1 - \phi). \quad (123)$$

Рассмотрим уравнение для скорости льда, заменив производную скорости через первый интеграл, и проведём дифференцирование

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{A_1}{\rho_{tot}}\right) + k\frac{\rho_f}{\rho_{tot}}\frac{d^2p_f}{d\xi^2} + \frac{dp_f}{d\xi}\frac{d}{d\xi}\left(k\frac{\rho_f}{\rho_{tot}}\right) + a_1(\phi)p_e = 0. \quad (124)$$

В точке положительного максимума  $\rho_f$  из (124) выводим неравенство

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{A_1}{\rho_{tot}}\right) + a_1(\phi)p_e \geq 0. \quad (125)$$

Поскольку

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{A_1}{\rho_{tot}}\right) = -\frac{A_1}{\rho_{tot}^2}\frac{d\rho_{tot}}{d\xi} = -\frac{A_1}{\rho_{tot}^2}\left((\rho_f - \rho_s) + \phi\frac{d\rho_f}{d\xi}\right) = \frac{a_1(\phi)p_e}{\rho_{tot}}(\rho_f - \rho_s)(1 - \phi),$$

то неравенство (125) примет вид

$$\frac{a_1(\phi)p_e}{\rho_{tot}}\rho_f \geq 0, \quad p_e = R\theta(-v - (\rho_n - \rho^0)) \geq 0.$$

Так как по условию леммы  $\rho_n - \rho^0 > 0$ , то получаем противоречие

$$p_e = -R\theta(v + (\rho_n - \rho^0)) \geq 0.$$

Значит, внутреннего положительного максимума нет и  $\rho_f \leq \rho_n$ .

Лемма 1 доказана.

*Лемма 2 (принцип минимума для плотности).* Пусть начальные данные задачи II удовлетворяют условиям  $0 \leq \phi^-, \phi^+ \leq 1$ ,  $0 < \rho_s < \rho_n < \infty$ ,  $\rho^+, \rho^- > 0$ ,  $\rho^0 < \rho_n$ .

Тогда для решения  $\rho_f(\xi)$  задачи II для любого  $\xi \in (-\infty, 0)$  справедливо неравенство  $\rho_f(\xi) \geq 0$ .

*Доказательство.*

Пусть  $z = -\rho_f$  и существуют точки положительного максимума  $z$ . В этом случае  $\rho_{tot} = \rho_s(1 - \phi) - \phi z$  может менять знак, но  $\rho_{tot} \neq 0$  в точке экстремума, так как если  $\rho_{tot} = 0$  получим

$$0 < A_1 = -k\rho_f \frac{d\rho_f}{d\xi}$$

Во внутренней точке положительного максимума  $z$  имеем  $\frac{d\rho_f}{d\xi} = 0$ , что приводит к противоречию  $0 < A_1 = 0$ .

Заметим также, что  $\rho_f(\xi) \geq \rho_n$ . Тогда  $p_e = p^0 - p_f = R\theta(\rho^0 - \rho_f)$ . В частности, при  $\rho^0 = \rho_n$  имеем  $p_e = R\theta(\rho^n - \rho_f) > 0$ .

Можно найти начальные условия, когда  $u_s - c > 0$ , т.е. в точке экстремума  $\rho_{tot} > 0$ .

Проведем анализ уравнения для  $z = -\rho_f$

$$\frac{d\phi}{d\xi} \left( \frac{A_1}{\rho_{tot}} + \frac{k\rho_f}{\rho_{tot}} \frac{d\rho_f}{d\xi} \right) = -a_1(\phi)p_e.$$

Продифференцируем это уравнение:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{A_1}{\rho_{tot}} \right) + k \frac{\rho_f}{\rho_{tot}} \frac{d^2\rho_f}{d\xi^2} + \frac{d\rho_f}{d\xi} \frac{d}{d\xi} \left( k \frac{\rho_f}{\rho_{tot}} \right) + a_1(\phi)p_e = 0. \quad (126)$$

Во внутренней точке положительного максимума с учётом  $\frac{d\rho_f}{d\xi} = 0$ ,  $\frac{d^2\rho_f}{d\xi^2} \leq 0$  уравнение (126) примет вид

$$\frac{A_1}{\rho_{tot}^2}(\rho_f - \rho_s) \frac{d\phi}{d\xi} - a_1(\phi)p_e \leq 0.$$

Аналогично Лемме 1, справедливо равенство

$$\frac{A_1}{\rho_{tot}} \frac{d\phi}{d\xi} = -a_1(\phi)p_e(1 - \phi).$$

Учитывая данное равенство имеем

$$\frac{1}{\rho_{tot}}(\rho_f - \rho_s)a_1(\phi)p_e(1 - \phi) + a_1(\phi)p_e \geq 0. \quad (127)$$

Приведём неравенство (127) к виду

$$\frac{a_1(\phi)p_e}{\rho_{tot}} (\rho_{tot} - (z + \rho_s)(1 - \phi)) \geq 0. \quad (128)$$

Поскольку  $a_1(\phi) > 0, p_e > 0, \rho_{tot} > 0$ , то (128) примет вид

$$(-z\phi + (1 - \phi)\rho_s - (z + \rho_s)(1 - \phi)) \geq 0. \quad (129)$$

Приводя подобные в неравенстве (129) получим  $z \leq 0$ , т.е.  $\rho_f \geq 0$ . Лемма 2 доказана.

## 7. Заключение

Проведён анализ работ посвященных математическому моделированию процесса сублимации льда. Рассматриваются классическая теория сублимации льда, модели выдувания снега и модель сублимации сферических кристаллов льда. Приведена постановка автомодельной задачи сублимации льда, в предположении что лёд вязкая несжимаемая среда. Доказан принцип максимума для плотности воздуха и пористости при постоянной скорости скелета, а так же показан принцип максимума для плотности воздуха с учётом подвижного льда.

## Библиографический список

1. Law J., van Dijk D. Sublimation as a geomorphic process: A review //Permafrost and Periglacial Processes. 1994. Vol. 5, p. 237–249.
2. Mellor, J. D. (1978). Fundamentals of Freeze Drying. Academic Press, London (386 pp.).
3. Thorpe, A. D. and Mason, B. J. (1966). The evaporation of ice spheres and ice crystals. British Journal of Applied Physics, 17, 541-548.
4. Lee, Lang Wah, 1975. Sublimation of snow in turbulent atmosphere. Unpublished Ph.D. Dissertation, Department of Mechanical Engineering, University of Wyoming, Laramie, WY,162 pp.
5. Schmidt, R. A., 1991, Sublimation of snow intercepted by an artificial conifer, Agricultural and Forest Meteorology, 54, 1–27.
6. List, R.J., 1968. Smithsonian Meteorological Tables. Smithsonian Institution, Washington, DC, 527 pp.
7. Schmidt, R.A., 1972. Sublimation of wind-transported snow – a model. Research Paper RM-90, USDA Forest Service, Rocky Mountain Forest and Range Experiment Station, Fort Collins, CO, 24 pp.
8. Schmidt, R.A., 1982. Vertical profiles of wind speed, snow concentration, and humidity in blowing snow. Boundary-Layer Meteorol., 23: 223-246.
9. Chung, Y.-C., Blair, S., and Mailhot, J.: Blowing Snow on Arctic Sea Ice: Results from an Improved Sea Ice-Snow-Blowing Snow Coupled System, J. Hydrometeor., 12, 678–689, 2011.
10. Xiao, J., R. Bintanja, S. J. Drery, G. W. Mann, and P. A. Taylor, 2000: An intercomparison among four models of blowing snow. Bound.-Layer Meteor., 97, 109–135.

11. M. K. MacDonald, J. W. Pomeroy, and A. Pietroniro, "Parameterizing redistribution and sublimation of blowing snow for hydrological models: tests in a mountainous subarctic catchment," *Hydrological Processes*, vol. 23, no. 18, pp. 2570–2583, 2009.
12. Pomeroy JW, Gray DM. 1990. Saltation of snow. *Water Resources Research* 26: 1583–1594.
13. Li L, Pomeroy JW. 1997. Estimates of threshold wind speeds for snow transport using meteorological data. *Journal of Applied Meteorology*
14. Raupach MR, Gillette DA, Leys JF. 1993. The effect of roughness elements on wind erosion threshold. *Journal of Geophysical Research* 98: 3023–3029
15. Wyatt VE, Nickling WG. 1997. Drag and shear stress partitioning in sparse desert creosote communities. *Canadian Journal of Earth Sciences* 34: 1486–1498.
16. Pomeroy JW, Li L. 2000. Prairie and arctic areal snow cover mass balance using a blowing snow model. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres* 105: 26619–26634.
17. Pomeroy JW, Male DH. 1992. Steady-state suspension of snow. *Journal of Hydrology* 136: 275–301.
18. Pomeroy JW, Gray DM, Landine PG. 1993. The Prairie Blowing Snow Model: characteristics, validation and operation. *Journal of Hydrology* 144: 165–192.
19. J. W. Pomeroy, J. Parviainen, and P. Storck, 2003: Sublimation of snow from coniferous forests in a climate model. *J. Climate*, 16, 1855–1864.
20. Pomeroy, J. W., and R. A. Schmidt, 1993: The use of fractal geometry in modelling intercepted snow accumulation and sublimation. *Proc. 50th Eastern Snow Conf.*, Quebec City, QC, Canada, ESC, 1–10.
21. Nelson J. T., Baker M. B. New theoretical framework for studies of vapor growth and sublimation of small ice crystals in the atmosphere. *Journal of Geophysical Research*, 1996, V.101, D3, P. 7033-7047

22. Глебова Н.Ю., Папин А.А., МАК: Математики - Алтайскому краю, Сборник трудов всероссийской конференции по математике: Математическая модель абляции льда. 2017. С. 60-63.
23. Глебова Н.Ю., Папин А.А., Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования Сборник научных статей международной конференции: Автомодельное решение задачи о сублимации снега. Ответственный редактор Е. Д. Родионов. 2017. С. 404-413.
24. Mann, G. W., P. S. Anderson, and S. D. Mobbs, 2000: Problem measurements of blowing snow at Halley, Antarctica. *J. Geophys. Res.*, 105, 24 491–24 508
25. Bintanja, R.: Snowdrift sublimation in a katabatic wind region of the Antarctic ice sheet, *J. Appl. Meteorol.*, 40, 1952–1966, 2001
26. Budd, W. F., 1966: The drifting of nonuniform snow particles. *Studies in Antarctic Meteorology*, M. Rubin, Ed., Antarctic Research Series, Vol. 9, Amer. Geophys. Union, 59–70.
27. Dover, S. E., 1993: Numerical modelling of blowing snow. Ph.D. thesis, University of Leeds, Leeds, United Kingdom, 223 pp.
28. Garratt, J. R., 1992: *The Atmospheric Boundary Layer*. Cambridge University Press, 316 pp.
29. Bintanja, R.: Modelling snowdrift sublimation and its effect on the moisture budget of the atmospheric boundary layer, *Tellus A*, 53, 215–232, 2001b.
30. Lehning, M., and C. Fierz (2008), Assessment of snow transport in avalanche terrain, *Cold Reg. Sci. Technol.*, 51, 240–252, doi:10.1016/j.coldregions. 2007.05.012.
31. Zwaafink C. D. Groot, Loewe H., Mott R., Bavay M., Lehning M. Drifting snow sublimation: A high-resolution 3-D model with temperature and moisture feedbacks. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*. 2011 V. 116 D16107. P. 1-14.

32. Dai, X. and Huang, N.: Numerical simulation of drifting snow sublimation in the saltation Layer, *Sci. Rep.*, 4, 6611
33. Huang, N., Sang, J., Han, K. A numerical simulation of the effects of snow particle shapes on blowing snow development. *J. Geophys. Res.* 116, D2220 (2011)
34. Neumann, T. A., Albert, M. R., Engel, C., Courville, Z., Perron, F. Sublimation rate and the mass-transfer coefficient for snow sublimation. *Int. J. Heat mass Tran.* 52, 309–315 (2009).
35. Anderson, R. S., Haff, P. K. Simulation of eolian saltation. *Science.* 241, 820–823 (1988).
36. Anderson, R. S., Haff, P. K. Wind modification and bed response during saltation of sand in air. *Acta Mech. Suppl.* 1, 21–51 (1991).
37. Shao, Y., Li, A. Numerical modeling of saltation in the atmospheric surface layer. *Boundary-Layer Meteorol.* 91, 199–225 (1999).
38. McEwan, I. K., Willetts, B. B. Adaptation of the near-surface wind to the development of sand transport. *J. Fluid Mech.* 252, 99–115 (1993).
39. Sugiura, K., Maeno, N. Wind-tunnel measurements of restitution coefficients and ejection number of snow particles in drifting snow: determination of splash functions. *Boundary- Layer Meteorol.* 95, 123–143 (2000).
40. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С., Физико-математические основы фильтрации воды, МИР, Москва, 1971 г., 453 стр., УДК: 532.546.
41. Scempton, A.W. (1960), Effective stress in soils, concrete and ricks, in *Proceeding of the Conference on Pore Pressure and Suction in soils*, pp. 4-16, Butterworths, London.
42. Domenico P.A., and F.W. Schwartz(1990), *Phisical and Chemical Hydrogeology*, Jhon Wiley, New York.
43. Connolly, J. A. D., and Y. Y. Podladchikov (1998), Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock, *Geodin. Acta*, 11, 55– 84.

44. Fowler, A. C., and X. Yang (1999), Pressure solution and viscous compaction in sedimentary basins, *J. Geophys. Res.*, 104, 12,989–12,997.
45. Schneider, F., J. L. Potdevin, S. Wolf, and I. Faille (1996), Mechanical and chemical compaction model for sedimentary basin simulators, *Tectonophysics*, 263, 307– 317.
46. Fowler, A.C. (1990), A compaction model for melt transport in the Earth's asthenosphere, part 1, the basic model, in *Magma Transport and Storage*, edited by M.P. Ryan, pp. 3-14, Jhon Wiley, New York.
47. Connolly, J. A. D. (1997), Devolatilization-generated fluid pressure and deformation-propagated fluid flow during prograde regional metamorphism, *J. Geophys. Res.*, 102, 18,149– 18,173.
48. Connolly, J. A. D., and Y. Y. Podladchikov (2000), Temperature-dependent viscoelastic compaction and compartmentalization in sedimentary basins, *Tectonophysics*, 324, 137– 168.
49. Bear, J. (1972), *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Elsevier, New York.; Massey, B. S. (1989), *Mechanics of fluids*, 6th ed., Chapman and Hall, Boston, Mass.
50. Morency Christina , Ritske S. Huismans, Christopher Beaumont, and Philippe Fullsack . A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // *Journal of geophysical research*, Vol. 112, B10407, doi:10.1029/2006JB004701, 2007.
51. Кучмент Л.С., Демидов В.Н., Мотовилов Ю.Г. Формирование речного стока. Физико - математические модели. М.: Наука, 1983, 214 с.
52. Thorpe A.D., B.J. Mason. The evaporation of spheres and ice crystals, *Br. J. Appl. Phys.*, 17, 541-548, 1996.
53. C. D. Groot Zwaaftink, H. Löwe, R. Mott, M. Bavay, and M. Lehnin . Drifting snow sublimation : A high-resolution 3-D model with temperature and moisture feedbacks, 2011.

54. Рабинович В.А., Хавин З.Я. Краткий химический справочник, 3-е изд., перераб. и доп. - Л.: Химия, 1991. - 432с.