

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Алтайский государственный университет

Алексеева С.В., Папин А.А., Сибин А.Н.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
СНЕЖНО-ЛЕДОВОГО ПОКРОВА**

Учебное пособие

Барнаул, 2019

© Алексеева С.В., Папин А.А., Сибин А.Н., 2019

© Алтайского государственного университета, 2019

Об издании – 1, 2

сведения об издании

**УДК 517.95+536.421+551.578**

**A417**

**Авторы:**

Алексеева Светлана Владимировна, Папин Александр Алексеевич,  
Сибин Антон Николаевич

**Рецензент:**

д-р физ.-мат. наук, проф. *О.Н.Гончарова*

**A417 Алексеева С.В.**

Математическое моделирование снежно-ледового покрова: учебное пособие / С.В. Алексеева, А.А. Папин, А.Н. Сибин; Алтайский государственный университет. – Барнаул: АлтГУ, 2019. – 1 DVD+R (1 Мб). – Систем. требования: Intel Pentium 1,6 GHz и более; 512 Мб (RAM); Microsoft Windows 7 и выше; Adobe Reader. – Загл. с титул. экрана. – Текст : электронный.

Учебное электронное издание

В учебном пособии изложены математические модели, используемые при изучении процесса тепломассопереноса в тающем деформируемом снежно-ледовом покрове с учетом фазовых переходов. В качестве примеров рассматриваются балансовые модели, излагаются данные натуральных исследований, модели таяния и промерзания грунта с точки зрения механики сплошных сред, а так же упрощенные модели типа Стефана.

© Алексеева С.В., Папин А.А., Сибин А.Н., 2019

© Алтайского государственного университета, 2019

производственно-технические сведения

Публикуется в авторской редакции

Верстка: Котова О.В.

Дата подписания к использованию: 08.07.2019

Объем издания: 1 Мб

Комплектация издания: 1 электрон. опт. диск (DVD+R)

Тираж 15 дисков

ФГБОУ ВО "Алтайский государственный университет" 656049,  
Барнаул, пр. Ленина, 61

## Содержание

1. Введение
2. Постановка задачи
3. Балансовые модели
4. Наблюдения
5. Математические модели
  - Оценка количества талых вод на основе модели вязкого сжимаемого снега
  - Описание фазовых переходов в Community Land Model (CLM)
  - Исследование динамики тающего снега изотопным методом. Одномерная физическая модель
  - Модель антарктического ледяного покрова
  - О корректном описании процесса тепломассопереноса в процессе промерзания грунта
  - Задача Стефана о промерзании (протаивании)
  - Экспериментальное исследование процессов фильтрации в тающем снеге
  - Скорость химической реакции
6. Заключение
7. Библиографический список

## Введение

Актуальность исследования задач тепломассопереноса в многофазных средах обусловлена тем, что многочисленные проблемы, возникающие, наряду с технологическими процессами также в экологии и природопользовании приводят к необходимости моделирования процессов взаимопроникающего движения сплошных сред. Строящиеся при этом математические модели, как правило, являются неклассическими, и требуют разработки новых подходов к их обоснованию и численному моделированию.

Большой класс задач фильтрации в деформируемой пористой среде с фазовыми переходами составляют задачи тепломассопереноса в тающем снежно-ледовом покрове [1]. Преобладающая часть стока северных рек формируется за счет таяния сезонного снежного покрова. Условия снеготаяния оказывают решающее влияние не только на количество поступающих в водоемы-приемники талых вод, но и на их качество. Кроме того, величина снежного покрова (снегозапас) влияет на промерзание поверхностного слоя почв и, следовательно, его впитывающую способность и определяет соотношение между склоновым и грунтовым стоками. Поэтому моделирование состояния снежного покрова и солепереноса в период снеготаяния имеет важное значение при разработке методов расчетов и прогнозов гидрографов весеннего половодья и качества воды в водоемах-приемниках.

Систематическое изучение фазовых превращений в системах жидкость - твердая фаза берет начало с конца XIX века с классических работ Стефана [2]. В своих исследованиях Стефан использовал модель процесса, учитывающую перенос тепла и движение плоской границы раздела фаз - фронта кристаллизации. Предположение о существовании в системе четко выраженной границы фазового перехода выполняется далеко не всегда.

Имеется большое число работ посвященных фильтрации воды и воздуха в тающем снеге, в которых используются данные наблюдений и эмпирические зависимости [5–12]. В большинстве своем эмпирические модели являются одномерными и не позволяют вычислить скорость фильтрации жидкости, а модели, вычисляющие скорость фильтрации жидкости, обычно не учитывают фазовые переходы или пригодны только для

специфичных режимов движения воды в снежном покрове, они также не дают нужной информации о поле скоростей и насыщенности водной фазы, необходимой для оценки стока.

Существуют различные подходы при моделировании фильтрации в тающем снеге. Для оценки высоты снежного покрова используются балансовые модели [12, 13], позволяющие оценить интенсивность снеготаяния и объем общего стока. Данные модели не позволяют оценить величину поверхностного и подземного стока, так как процессы фильтрации в этих моделях не рассматриваются.

Принципиально иные подходы к моделированию фильтрации в тающем снеге в работах [7, 11]. В этих работах вводится неизвестные границы раздела между талым снегом который содержит воду и снегом без воды со стандартной реологией. Для определения неизвестных границ используются кинематическое и динамическое условия в задачах со свободными границами (аналог классической задачи Стефана). Однако, в данном подходе пористость считается постоянной в области движения воды. Ясно, что такая модель существенно упрощена, т. к. при таянии снега пористость должна зависеть от температуры (почему изменяется концентрация воды если пористость постоянна?).

В работах рассматривается процесс замерзания морской воды [14, 18]. Согласно экспериментальным данным при замерзании в морском льду выделяется область фазового перехода, в которой образуется целая сеть каналов, отстоящих друг от друга на расстоянии порядка 1 см. Образование указанных каналов (см., например, фотографии в работах [14, 18]) при наличии конвективного течения жидкости является весьма распространенным явлением. Так, при затвердевании сплавов присутствие каналов приводит к неоднородному распределению примесей [17]; при замерзании льда они замедляют скорость его прироста [15]; при кристаллизации магмы они влияют на отложения минералов [16]. В работе [18] течение жидкости в пористой зоне фазового перехода описывается с помощью уравнения Дарси для пористой среды. Пористость предполагается переменной заданной функцией.

Следует также отметить, что не существует единого подхода к описанию процесса обмена массой между пористым скелетом и водой. На наш взгляд, корректное описание фазового перехода должно гарантировать выполнение физических принципов максимума для пористости и

концентрации фаз.

При химическом превращении происходит разрыв молекулярных связей, удерживающих атомы в одних молекулах, и образование новых связей в молекулах других, возникающих в ходе реакции веществ. Число молекул не изменяется, происходит лишь их перегруппировка, которая связана с определенными энергетическими затратами или выделением энергии.

Переход из начального состояния в конечное характеризуется скоростью химической реакции. Чтобы прошла реакция, сталкивающиеся молекулы должны обладать достаточно большим запасом энергии, необходимым для того, чтобы преодолеть определенный потенциальный барьер разрушить или изменить устойчивые химические связи и электронную структуру реагирующих веществ. Этот потенциальный барьер характеризуется энергией активации, а температурная зависимость, обусловленная существованием энергии активации, описывается соотношением Аррениуса. Данный подход широко используется при моделировании фазовых переходов в процессах горения [58].

## 1. Постановка задачи

Снег представляет собой пористую среду, твердый каркас которой составляют частицы льда. В процессе таяния в пористой среде происходит совместное движение воды ( $i = 1$ ), воздуха ( $i = 2$ ) и льда ( $i = 3$ ). В снеге происходят постоянные фазовые превращения, ведущие к перераспределению масс фаз. Для описания процесса используются уравнения сохранения массы для каждой фазы, уравнения двухфазной фильтрации для воды и воздуха, уравнение сохранения энергии для тающего снега и уравнение движения льда [1, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_i^0 \alpha_i) + \operatorname{div}(\rho_i^0 \alpha_i \vec{u}_i) &= \sum_{j=1}^3 I_{ji}, \quad i = 1, 2, 3, \\ I_{ji} &= -I_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} m s_i (\vec{u}_i - \vec{u}_3) &= -K_0 \frac{k_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2, \\ p_2 - p_1 &= p_c(s_1, \theta), \quad \sum_{i=1}^2 s_i = 1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\left( \sum_{i=1}^3 \rho_i^0 c_i \alpha_i \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left( \sum_{i=1}^3 \rho_i^0 c_i \vec{u}_i \right) \nabla \theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) - L I_{23} - \nu I_{13}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 \rho_3^0 \left( \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) &= -g \rho_3^0 \alpha_3 - \frac{\partial p_3}{\partial z} + \\ + \mu_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - \frac{2}{k} \sum_j \frac{\mu_3 \mu_j \beta_{j3}}{\mu_3 \frac{\alpha_j}{\beta_j} + \mu_j \frac{\alpha_3}{\beta_3}} (u_3 - u_j), \\ -\frac{\partial u_3}{\partial z} &= \lambda^* \frac{1 - \alpha_3}{\alpha_3} p_3, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\alpha_i$  – концентрация  $i$ -ой фазы,  $\rho_i^0$  – плотность  $i$ -ой фазы,  $\vec{u}_i$  – скорость  $i$ -ой фазы,  $I_{ij}$  – интенсивность перехода массы из  $j$ -ой в  $i$ -ую составляющую в единице объема в единицу времени,  $\rho_i$  – приведенная плотность, связанная с  $\rho_i^0$  и  $\alpha_i$  соотношением  $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ ,  $\vec{v}_i = m s_i \vec{u}_i$  – скорости фильтрации воды и воздуха,  $s_1, s_2$  – насыщенности воды и воздуха,  $m$  – пористость снега ( $\alpha_1 = m s_1, \alpha_2 = m s_2, \alpha_3 = 1 - m$ ),  $K_0$  – тензор фильтрации,  $k_{01}, k_{02}$  – относительные фазовые проницаемости воды и воздуха



( $k_{0i} = k_{0i}(s_i) \geq 0$ ,  $k_{0i}|_{s_i=0} = 0$ ),  $\mu_i$  – динамическая вязкость,  $p_i$  – давление  $i$ -ой фазы;  $p_c$  – капиллярное давление,  $\vec{g}$  – вектор ускорения силы тяжести,  $\theta$  – температура среды ( $\theta_i = \theta$ ,  $i = 1, 2, 3$ ),  $c_i = \text{const} > 0$  – теплоемкость  $i$ -ой фазы при постоянном объеме,  $\nu = \text{const} > 0$  – удельная теплота плавления льда,  $L$  – удельная теплота сублимации льда,  $\lambda_c$  – теплопроводность снега ( $\lambda_c = a_c + b_c \rho_c^2$ ,  $\rho_c = \sum_{i=1}^3 \rho_i^0 \alpha_i$ ,  $a_c = \text{const} > 0$ ,  $b_c = \text{const} > 0$ ),  $\lambda^*$  – коэффициент пропорциональности,  $k$  – безразмерный коэффициент, характеризующий геометрическую форму фазы и меняющийся от 2 до 3.

В общем случае величины  $I_{ij}$ ,  $\rho_i^0$ ,  $\beta_{ij}$  должны быть заданы (истинные плотности, как правило, функции температуры и давления фаз). В частности, в работе [1], для замыкания системы (1) – (4) использовались гипотезы:  $I_{12} = 0$ ,  $I_{23} = 0$ ,  $\rho_i^0 = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $I_{31} = I_{31}(\theta)$ .

Близкие к приведенной выше постановке задачи рассматривались в [3, 4]. В данной постановке ключевыми являются две проблемы: правильный учет интенсивности фазовых переходов  $I_{ij}$  и учет сжимаемости льда. Цель настоящей работы – анализ имеющейся информации по этим вопросам.

Описанию фазовых переходов посвящены работы [3-8].

В работе [3] рассматривается одномерная трехфазная модель (лед, вода, воздух) снега с учетом движения льда на основе системы уравнений, полученных Ю.М. Денисовым [4] для неподвижной пористой среды. Баланс массы каждой фазы и пара описывается с помощью неоднородных уравнений неразрывности вида (1) и уравнением неразрывности для пара

$$\frac{\partial \rho_{\text{п}} \alpha_3}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \alpha_3 \left( \rho_3 u_3 - D \frac{\partial \rho_{\text{п}}}{\partial z} \right) \right] = \sum_{j=1}^3 I_{j\text{п}}, \quad (5)$$

где индекс «п» означает пар,  $D$  – коэффициент диффузии. Фазовые переходы  $I_{ij}$  связаны с удельной поверхностью  $i$ -ой фазы следующим уравнением:

$$\beta_i = \beta_1 \left( \frac{1 - \sum_{n=1}^{-m} \alpha_n}{1 - \alpha_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\beta_1 = \frac{\beta_{10}}{\alpha_{10}} \exp \left( \frac{1}{k\rho_1} \int_0^t \frac{1}{\alpha_1} I_{j1} d\tau \right). \quad (6)$$

Здесь  $\beta_i = \sum_j \beta_{ij}$  – полная удельная поверхность  $i$ -ой фазы,  $\beta_{ij} = \frac{\Delta S_{ij}}{\Delta V}$  – удельная поверхность взаимного раздела  $i$ -ой и  $j$ -ой фаз,  $\Delta S_{ij}$  – поверхность взаимного раздела  $i$ -той фазы с  $j$ -той в объеме  $\Delta V$ ,  $\alpha_{10}, \beta_{10}$  – начальные значения концентрации и удельной поверхности льда. Для  $I_{ij}$  принята дополнительная гипотеза:

$$I_{j\text{II}} = \frac{2D}{k} \frac{\beta_3^2}{\alpha_3} (\rho_{\text{II}}^* - \rho_{\text{II}}), \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

В [3] полученная система уравнений (1), (5)–(7) замыкается уравнением притока тепла и уравнениями движения для каждой из фаз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i \alpha_i T_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \alpha_i \left( c_i \rho_i T_i u_i - \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z} + N_z \right) \right] + \sum_j L_{ij} I_{ij} + \\ + \frac{2}{k} \sum_j \frac{\lambda_i \lambda_j \beta_{ij}}{\lambda_i \frac{\alpha_j}{\beta_j} + \lambda_j \frac{\alpha_i}{\beta_i}} (T_i - T_j) = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = g - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{\mu_1}{\rho_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{2}{k\rho_1\alpha_1} \sum_j^3 \frac{\mu_1 \mu_j \beta_{j1}}{\mu_1 \frac{\alpha_j}{\beta_j} + \mu_j \frac{\alpha_1}{\beta_1}} (u_1 - u_j),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = g - \frac{\Omega}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{1}{\rho_2 \alpha_2} \mathbf{M}_2 - \frac{2}{k\rho_2\alpha_2} \sum_j^3 \frac{\mu_2 \mu_j \beta_{j2}}{\mu_2 \frac{\alpha_j}{\beta_j} + \mu_j \frac{\alpha_2}{\beta_2}} (u_2 - u_j),$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = g - \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial P_3}{\partial z} - \frac{2}{k\rho_3\alpha_3} \sum_j^3 \frac{\mu_3 \mu_j \beta_{j3}}{\mu_3 \frac{\alpha_j}{\beta_j} + \mu_j \frac{\alpha_3}{\beta_3}} (u_3 - u_j),$$

здесь  $T_i$  – температура  $i$ -ой фазы,  $\Omega = 1$  при  $\alpha_3 = 0$ , и  $\Omega = 0$  при  $\alpha_3 > 0$ ,  $\lambda_i$  – коэффициенты удельной теплопроводности,  $L_{ij}$  – удельная теплота перехода  $i$ -той фазы в  $j$ -тую,  $N_z$  – проекция на ось  $z$  вектора потока тепла за счет солнечной радиации, проникшей на глубину  $z$ ,

$$N_z = (1 - A)S \exp \left\{ -k_c \frac{H - z}{N_z^0} \left[ \rho_c + \frac{3}{2}(H - z) \frac{\partial \rho_c}{\partial z} \right] \right\},$$

где  $A$  – альbedo поверхности снега (характеристика отражательной способности),  $H$  – высота снега,  $S$  – суммарная радиация,  $N_z^0$  – единичный вектор в направлении падения солнечных лучей,  $k_c$  – поглощающая способность снега,  $P_i$  – давление  $i$ -той фазы,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\mu_i$  – коэффициент динамической вязкости. Кроме того, принято, что температура льда  $T_1 \leq 0^\circ$ , температура воды  $T_2 \geq 0^\circ$ . Проекция вектора молекулярных сил на ось  $z$  определяется равенством [3]:

$$M_2 = \eta\sigma_2 \frac{\beta_1\beta_2}{k\alpha_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right),$$

Следует отметить, что работа Е.Б. Трофимовой основана на результатах работы [4], в которой рассматривается задача тепло-, массо- и солепереноса в почвогрунтах. Почвогрунт представляется многофазной пористой средой с неподвижным каркасом. В основе математической модели лежат уравнения неразрывности (1) и уравнения переноса тепла для каждой фазы

$$\begin{aligned} c_i\rho_i\alpha_i \left( \frac{\partial T_i}{\partial t} + \vec{u}_i \nabla T_i \right) + \sum_i^3 L_{ij}I_{ij} = \\ = \operatorname{div} \alpha_i \lambda_i \nabla T_i + \sum_j^3 \frac{\chi_\tau \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i \delta_j + \lambda_j \delta_i} \beta_{ij} (T_j - T_i), \end{aligned}$$

где  $c_i$  – удельная теплоемкость  $i$ -ой фазы,  $\lambda_i$  – теплопроводность  $i$ -ой фазы,  $L_{ij}$  – удельная теплота перехода  $i$ -ой фазы в  $j$ -ую,  $T_i$  – температура  $i$ -ой фазы,  $\chi_\tau$  – безразмерный коэффициент пропорциональности, приблизительно равный 6 (данное значение взято из работы [4]), а фазовые переходы  $I_{ij}$  имеют следующий вид

$$\begin{aligned} I_{45} = I_{4\Pi} = \frac{4D_\Pi}{\delta_5} \beta_{45} (\rho_{H4} - \rho_\Pi), \\ I_{35} = I_{3\Pi} = \frac{4D_\Pi}{\delta_5} \beta_{35} (\rho_{H3} - \rho_\Pi), \end{aligned}$$

где  $D_\Pi$  – коэффициент диффузии пара,  $\rho_{H4}$  и  $\rho_{H3}$  – соответственно плотность насыщающего пара над водой и над льдом,  $\delta_i = k\alpha_i/\beta_i$  – характерный линейный размер фазы, аналог толщины или гидравлического радиуса.

Другой подход к задачам с фазовыми переходами описывается в работе [5], где рассматривается модель сферических частиц чистого льда,

особенностью которой является учет теплопередачи на внешней поверхности частиц льда. Тепло поступает от горячего воздуха при температуре  $T_g$  к частицам льда при температуре  $T_0$  (для внутреннего обледенения  $-T_0$  считается равным  $0^\circ\text{C}$  [5]). Считается, что все тепло поглощается и используется для перехода льда в воду. Уравнение баланса энергии имеет вид

$$Q_1 = \dot{m}_{\text{melt}} \times L_m,$$

где  $\dot{m}_{\text{melt}}$  – скорость таяния льда,  $L_m$  – скрытая теплота плавления для перехода льда в воду. Конвективный поток тепла  $Q_1$ , передающийся от воздуха к частицам льда, может быть выражен следующим образом

$$Q_1 = hA(T_g - T_0). \quad (8)$$

Скорость плавления (изменение массы в единицу времени) задается соотношением

$$\dot{m}_{\text{melt}} = -\frac{\rho_{\text{ice}}dV}{dt} = -\frac{4\pi r^2 dr}{dt}. \quad (9)$$

В последних уравнениях  $h$  – коэффициент конвективной теплопередачи,  $A$  – площадь поверхности частиц льда,  $\rho_{\text{ice}}$  и  $r$  – плотность льда и радиус частицы льда соответственно. Используя уравнения (8) и (9), получим уравнение для изменения размера частиц льда

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{h(T_g - T_0)}{L_m\rho_{\text{ice}}}. \quad (10)$$

Соотношение (10) определяет интенсивность фазового перехода.

В последующем анализе, Penner S.S. предположил, что для размера капли вплоть до  $10^{-2}$  см коэффициент теплопередачи обратно пропорционален радиусу [5]. В то же время, температура окружающей среды и давление увеличиваются в направлении потока. Как правило, температуру воздуха можно считать линейно возрастающей вдоль канала компрессора

$$h = \frac{k}{r}.$$

Интересный подход к учету сжимаемости среды предложен в работе [6]. В качестве уравнения для пористости  $m$  многофазной вязко-упругой среды используется уравнение вида

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm^{eq}}{dt} + \frac{p_1 - \bar{p}}{(1 - m)\eta_3},$$

где  $\bar{p} = \sum_{l, \text{ all fluid phases}} m_l^f p_l^f + \sum_{l, \text{ all solid phases}} m_l^s p_l^s$ ,  $\eta_3$  – экспериментальный параметр,  $m^{eq}$  – пороупругость.

Для определения пороупругости  $m^{eq}$  рассмотрим следующую замкнутую систему уравнений, полученную в [6]

$$\frac{dp_f}{dt} = K_f \frac{1}{\rho_f} + \frac{d\rho_f}{dt}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_s \cdot \nabla, \quad (11)$$

$$\frac{dp_{eff}}{dt} = (1 - m^{eq}) \left( K_s \frac{1}{\rho_s} \frac{d\rho_s}{dt} - \frac{1}{\rho_f} \frac{d\rho_f}{dt} \right), \quad (12)$$

$$-\frac{dp_{eff}}{dt} = \frac{dm^{eq}}{dt}, \quad (13)$$

$$p_{eff} = (1 - m^{eq})(p_s - p_f), \quad (14)$$

$$\frac{1}{K_m} = \frac{1 - m^{eq}}{K_{dry}} - \frac{1}{K_s}, \quad (15)$$

где  $p_{eff}$  – эффективное давление,  $p_f$  – давление жидкой фазы,  $p_s$  – давление твердой фазы,  $\vec{V}_s$  – скорость твердой фазы,  $\rho_f$  – плотность жидкой фазы,  $\rho_s$  – плотность твердой фазы,  $K_f$ ,  $K_s$ ,  $K_{dry}$ ,  $K_m$  – объемные модули жидкой фазы, твердой фазы, сухого твердого скелета и пороупругости. В системе (11) – (15) содержится 5 уравнений, а искомыми считаются  $p_{eff}$ ,  $m^{eq}$ ,  $\rho_f$ ,  $\rho_s$ ,  $p_f$ .

Следует отметить, что в работе [7] задача о движении воды в тающем снеге рассматривалась при постоянной температуре, без фазовых переходов и учета движения льда. В серии работ Gray [8], [9], [10] снег рассматривается как 4-х фазная среда ( $i$  – лед,  $w$  – подвижная вода,  $b$  – связанная вода,  $a$  – воздух). В работе [9] объемная доля льда постоянна во времени. В [8] лед предполагался неподвижным ( $\vec{u}_3 = 0$ ), а температура была специальным образом связана с насыщенностью воды (отдельное уравнение для температуры не вводилось).

В работе Gray (1996)[8] тающий снег рассматривается как сплошная среда состоящая из подвижной воды  $w$ , связанной воды  $b$ , льда  $i$  и воздуха  $a$ . Подвижная вода фильтруется в снеге, связанная вода неподвижна относительно порового скелета, движением водяного пара пренебрегают.

Каждая компонента  $\nu$  ( $\nu = w, b, i, a$ ) смеси занимает объемную долю  $\phi^\nu$  (в единице объема смеси). По определению имеем

$$0 \leq \phi^\nu \leq 1, \quad \phi^i + \phi^w + \phi^b + \phi^a = 1.$$

Пористость (доля пор в единице объема) может быть выражена из равенства

$$\phi^p = \phi^w + \phi^b + \phi^a = 1 - \phi^i.$$

Объемные доли подвижной воды, связанной воды и воздуха (на единицу объема пор) вводятся следующим образом

$$\theta^w = \phi^w / \phi^p, \quad \theta^b = \phi^b / \phi^p, \quad \theta^a = \phi^a / \phi^p.$$

Также вводятся: общая насыщенность воды  $S_w = \theta^w + \theta^b$ , остаточная насыщенность воды  $S_{wi} = \theta^b$  и эффективная насыщенность воды

$$S_e = \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi}} = \frac{\theta^w}{1 - \theta^b}.$$

По определению приведенные ( $\rho^i, \rho^w, \rho^b, \rho^a$ ) и истинные плотности ( $\rho^I, \rho^W, \rho^A$ ) для каждой компоненты связаны равенствами:

$$\rho^i = \phi^i \rho^I, \quad \rho^w = \phi^w \rho^W, \quad \rho^b = \phi^b \rho^W, \quad \rho^a = \phi^a \rho^A.$$

Уравнение баланса масс для компоненты  $\nu$ :

$$\frac{\partial \rho^\nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^\nu) = m^\nu,$$

где  $m^\nu = \sum_j m^{\nu j}$ ,  $m^{\nu j}$  - интенсивность перехода массы из  $j$ -й в  $\nu$ -ю составляющую в единице объема в единицу времени;  $v^\nu$  - скорость фазы.

В медленном потоке, который преобладает в тающем снеге, ускорения пренебрегают. Уравнения сохранения импульса для каждой компоненты  $\nu$  представляют в виде:

$$-\frac{\partial p^\nu}{\partial z} + \rho^\nu g + \rho B^\nu = \frac{1}{2} \sum_w m^{\nu w} (v^\nu - v^w),$$

где  $g$  - ускорение силы тяжести,  $\rho = \sum_j \rho^j$  - плотность смеси,  $p^\nu$  - давление,  $B^\nu$  - тормозящая сила, возникающая из-за межфазного взаимодействия.

Предполагается, что температура  $T$  является общей для всех фаз и уравнение сохранения энергии имеет вид

$$\Sigma_\nu \left[ \rho^\nu C_p^N \frac{D_\nu T}{Dt} - \rho^\nu r^\nu - \frac{p^\nu}{\phi^\nu} \frac{D_\nu \phi^\nu}{Dt} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_\nu \phi^\nu K^N \frac{\partial T}{\partial z} \right) = (m^{iw} + m^{ib}) L_{iw}.$$

Здесь  $\frac{D_z}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^\nu \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $C_p^N$  - теплоемкость при постоянном давлении смеси,  $r^\nu$  - внешний поток тепла,  $K^N$  - теплопроводность смеси,  $L_{iw}$  - удельная теплота плавления льда.

Движение воды и воздуха трактуется как движение двух несмешивающихся жидкостей, подчиняющихся закону Дарси:

$$\rho B^w = p^W \frac{\partial \phi^w}{\partial z} - \frac{\mu^w}{k^w} (\phi^w)^2 (v^w - v^i),$$

$$\rho B^a = p^A \frac{\partial \phi^a}{\partial z} - \frac{\mu^a}{k^a} (\phi^a)^2 (v^a - v^i),$$

где  $\mu^w$ ,  $\mu^a$  - вязкости воды и воздуха,  $k^w$ ,  $k^a$  - проницаемости, связанные с эффективными проницаемостями  $k^{rw}$ ,  $k^{ar}$  равенствами  $k^{rw} = k^w/k$ ,  $k^{ar} k^a/k$ ,  $k$  - внутренняя проницаемость ( $k = a \exp(b\phi^p)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $p$  - параметры). Предполагается, что  $k^{rw} = k^{rw}(S_e)$  (в частности  $k^{rw} = k^{rw}(S_e)^n$ ).

Согласно формуле Лапласа разность давлений воды и воздуха связана с капиллярным давлением  $p^C$ :

$$p^C = p^A - p^W > 0.$$

Капиллярное давление также зависит от  $S_e$ , т.е.  $p^C = p^C(S_e)$ . Таким образом, приходим к следующей системе уравнений сохранения массы для каждой фазы и уравнений сохранения импульса

$$\rho^I \left[ \frac{\partial \phi^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\phi^i v^i) \right] = m^i,$$

$$\rho^W \left[ \frac{\partial \phi^w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\phi^w v^w) \right] = m^{wb} - \eta m^i,$$

$$\rho^W \left[ \frac{\partial \phi^b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\phi^b v^i) \right] = -m^{wb} - (1 - \eta) m^i,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi^a \rho^A) + \frac{\partial}{\partial z} (\phi^a \rho^A v^a) = 0,$$

$$-\frac{\partial p^W}{\partial z} + \rho^W g - \frac{\mu^W}{k^w} \phi^w (v^w - v^i) = \frac{1}{2\phi^w} (\eta m^i - m^{wb}) (v^i - v^w),$$

$$-\frac{\partial p^A}{\partial z} + \rho^A g - \frac{\mu^A}{k^a} \phi^a (v^a - v^i) = 0.$$

После некоторых преобразований полученной системы и привлечения соотношения

$$T = T_M + 8 \times 10^{-7} p^C - 5 \times 10^{-7} d^{-1},$$

приходим к следующему уравнению для эффективной насыщенности

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi^e S_e) + \frac{\rho^W g}{\mu^W / k} \frac{\partial}{\partial z}(k^{rw}) + \frac{1}{\mu^W / k} \frac{\partial}{\partial z}(k^{rw} \frac{\partial p^C}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi^e S_e v^i) = m^{wb} - \eta m^i,$$

где эффективная пористость  $\phi^e = \phi^p(1 - S_{wi})$ ,  $S_{wi} = \theta^b$ .

Данное уравнение является параболическим и вырождается на решении (при  $S_e = 0$ ). После нахождения  $S_e$  можно определить и другие параметры задачи. Рассматривается упрощенная модель, которая подразумевает, что лед неподвижен и отсутствуют фазовые переходы из льда в лед:  $v^i \equiv 0$ ,  $m^i \equiv 0$ . При этих предположениях численные расчеты задач изотермической фильтрации воды в снеге проводились в работе Sellers (2000)[7].

## 2. Балансовые модели

На основе исследований гидрологических процессов в России и Канаде, была построена всеобъемлющая физически обоснованная модель накопления, перераспределения, сублимации, таяния снега для открытых и лесных водосборов. Данная модель использовалась для оценки долгосрочной динамики снега в лесных и сельскохозяйственных водосборах на северо-западе России.

*Баланс массы и энергии.* Для расчета характеристик снежного покрова была применена система вертикально осредненных уравнений снежных процессов [12]. Данная система включает в себя описание изменения высоты снежного покрова в зависимости от времени, содержание льда, воды, плотность снега, учитывает таяние снега, сублимацию, замораживание талых вод и метаморфизм снежного покрова, и записывается следующим образом:

$$\frac{dH}{dt} = \rho_w [X_s \rho_0^{-1} - (S + E_s)(\rho_i i)^{-1}] - V, \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_i i H) = \rho_w (X_s - S - E_s) + S_i, \quad (17)$$



$$\frac{d}{dt}(\rho_w w H) = \rho_w (X_l + S - E_l - R) - S_i, \quad (18)$$

где  $H$  – глубина снежного покрова,  $i$  и  $w$  – объемное содержание льда и жидкой воды соответственно,  $X_s$  и  $X_l$  – интенсивность снегопада и дождя соответственно. Предполагается, что если температура воздуха  $T_a \geq 0^\circ\text{C}$ , то имеет место только дождь, и если  $T_a < 0^\circ\text{C}$ , тогда имеет место только снегопад,  $S$  – интенсивность снеготаяния,  $\rho_w$ ,  $\rho_i$ ,  $\rho_s$  и  $\rho_0$  – плотность воды ( $1000 \text{ кг м}^{-3}$ ), льда ( $917 \text{ кг м}^{-3}$ ), снежного покрова и свежеснегавшего снега (принимается равным  $70 \text{ кг м}^{-3}$ ) соответственно, плотность снежного покрова вычисляется как  $\rho_s = \rho_i i + \rho_w w$ ,  $E_l$  – коэффициент испарения жидкой воды из снега,  $E_s$  – коэффициент сублимации снега,  $S_i$  – коэффициент повторного замораживания талых вод в снежном покрове,  $R$  – отток талой воды из снежного покрова, степень сжатия снежного покрова записывается в виде

$$V = \frac{v_1 \rho_s}{\exp(v_2 T_s + v_3 \rho_s)} \frac{H^2}{2},$$

где  $T_s = 0^\circ$  – температура снега; коэффициенты  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$  равны  $2.8 \times 10^{-6} \text{ см}^2 \text{ с}^2 \text{ г}^{-1}$ ;  $-0.08^\circ\text{C}^{-1}$ ;  $21 \text{ см}^3 \text{ г}^{-1}$ , соответственно [13], .

Уравнения (16)–(18) были численно решены с использованием явной разностной схемы с временным шагом 30 минут. Интенсивность снеготаяния  $S$  находится из уравнения баланса энергии в виде

$$S = (Q_{sw} + Q_{lw} - Q_{ls} + Q_T + Q_E + Q_P + Q_G)(\rho_w \chi)^{-1}. \quad (19)$$

Здесь  $Q_{sw}$  – чистое коротковолновое излучение,  $Q_{lw}$  – входящее длинноволновое излучение,  $Q_{ls}$  – исходящее длинноволновое излучение,  $Q_T$  – видимый теплообмен,  $Q_E$  – скрытый теплообмен,  $Q_P$  – теплосодержание жидких осадков,  $Q_G$  – теплообмен на поверхности земли,  $\chi$  – скрытая теплота плавления ( $333.5 \text{ кДж кг}^{-1}$ ).

Для вычисления слагаемых в уравнении (19) были применены следующие формулы, полученные в [12]:

$$Q_{sw} = Q_0(1.00 - r)(1.00 - 0.20N - 0.47N_0),$$

где  $Q_0 = 1000\beta$  – поток коротковолнового излучения в условиях ясного неба,  $\beta$  – угол между направлением коротковолнового излучения и

горизонталью, измеренный в радианах;

$$Q_{1W} = \sigma T_a^4 (0.61 + 0.05e_a^{0.5}) \times (1.00 + 0.12N + 0.12N_0) - \varepsilon_s \sigma T_s^4,$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана ( $5.67 \times 10^{-8}$  Вт м<sup>-2</sup> К<sup>-4</sup>),  $e_a$  – давление пара в миллибарах,  $\varepsilon_s$  – эффективный коэффициент излучения снежного покрова (в работе [12],  $\varepsilon_s = 0,99$ ),  $T_s$  – температура поверхности снега,  $T_a$  – температура воздуха;

$$Q_E = -\chi_s \rho_w E_s = 32.8(e_a - e_s)(0.18 + 0.098u),$$

где  $\chi_s$  – скрытая теплота сублимации (2834 кДж кг<sup>-1</sup>),  $E_s$  – интенсивность сублимации снежной поверхности, вычисляемая по следующей формуле:

$$E_s = (0.18 + 0.098u)(e_s - e_a),$$

где  $u$  – скорость ветра на 10-метровой высоте,  $e_s$  – давление насыщенного пара над льдом,  $e_a$  – давление пара на 2-метровой высоте;

$$Q_T = 18.7(T_a - T_s)(0.18 + 0.098u),$$

$$Q_P = \rho_w C_w T_a X_l,$$

где  $C_w$  – удельная теплоемкость воды.

Теплообмен  $Q_G$  между тающим снежным покровом и землей считается пренебрежимо малым.

Использование уравнения (17) требует измерения радиации и компонент теплообмена, которые часто недоступны для измерения. При отсутствии прямой метеорологической модели оценки или наблюдений, компоненты энергетического баланса могут быть оценены из эмпирических отношений с обычно наблюдаемыми изменяющимися метеорологическими параметрами, такими как температура, влажность воздуха, скорость ветра, облачность. Стоит отметить, что точность оценок таких отношений значительно возрастает при увеличении числа учитываемых физико-географических и климатических факторов.

*Влияние лесного полога.* Метеорологические условия для накопления снега и таяния на поверхности лесной почвы отличаются от метеорологических условий для открытой земли из-за влияния лесного полога. Осадки, температура воздуха, влажность, скорость ветра, потоки излучения и т.д. нечасто могут быть измерены под лесными навесами, следовательно создаются значительные проблемы для оценки динамики снежного покрова в зависимости от метеорологических факторов. Обычно

используются два подхода к оценке метеорологии зоны сублесного полога. Первый подход основан на моделировании физических механизмов, посредством которых лесные пологи переносят радиацию, турбулентный обмен, массовые потоки. Второй подход заключается в использовании эмпирических зависимостей между метеорологическими переменными, полученными из одновременных измерений в открытой и лесной зонах.

Сочетанием физически обоснованных и эмпирических подходов предложено выделить входные данные модели накопления и таяния снега на поверхности лесной почвы. Подход отражает отсутствие в настоящее время понимания некоторых процессов снеготаяния и необходимость свести к минимуму неопределенность и чрезмерную сложность в модели.

Модель «запускалась» со стандартными метеорологическими переменными для двух водосборов. Результаты сравнивались с регулярными наблюдениями за поверхностью накопления снега в течение всей зимы и весеннего периода в течение 17 сезонов. При оценке эквивалентной воды в снежном покрове в течение зимы и сезонов таяния погрешность вычислений по сравнению с наблюдениями оказалась не более 3% [12].

### 3. Наблюдения

Для мониторинга снежного покрова и льда в период весеннего таяния снега часто используются наблюдения с помощью космических радаров SAR (Synthetic Aperture Radar). Проблемой подобных исследований является нарушение сигнала, проходящего сквозь лесной покров, и соответственно, искажение отображения снежного покрова. В работе [19] представлен анализ свойств обратного рассеяния при отражении от снега в восьми тестовых районах, расположенных вокруг метеостанций. Тестовые зоны представляют собой открытые и лесные ландшафты Северной Финляндии. Анализ осуществляется с использованием обширных разновременных наборов данных, полученных с использованием радаров в период таяния снега.

В работе [20] представлена физическая модель теплопереноса между различными элементами окружающей среды, которая используется для реализации различных зимних сценариев. Объектами моделирования являются выпадающий на землю снег, а также кондуктивный (передача тепла, полученного при помощи молекулярной активности или

внутреннего вибрационного движения молекул), конвективный (вид теплопередачи, подразумевающий наличие промежуточной среды которая транспортирует тепло из одного тела в другое) и радиационный (тепло передается всем окружающим телам без всякого соединения с тепловым источником, чрез пространство) теплоперенос. В работе рассматриваемая область разбивается на элементарные объемы из которых выделяют пять фаз: снег, вода, лед, воздух, горная порода и фазовые переходы вода – лед, воздух – снег. Процессы теплообмена между этими элементарными фазами предполагаются зависящими от изменения температур воздуха и точки росы (значение температуры газа, при котором водяной пар, содержащийся в газе, охлаждаемом изобарически, становится насыщенным), количества снега, облачного покрова и суточных циклов.

Пространственное и временное распределение накопления снега является сложным процессом и оказывает значительное воздействие на гидрологические характеристики горных водосборов. Многие процессы перераспределения снега: сухие снежные лавины, насыщенные водой снежные лавины, ветровые воздействия наблюдаются на основе съёмочных работ (наземных, с воздуха или из космоса), но при этом их моделирование и прогнозирование остается очень сложной задачей. Натурные измерения накопления снега являются трудоемкими и, как правило, имеют грубую пространственную или временную разрешающую способность. В этом отношении, покадровая съёмка хорошо показывает себя в качестве мощного инструмента для сбора информации при относительно низких затратах и без необходимости непосредственного доступа к исследуемой зоне. В работе [21] распределение накопления снега в альпийском водосборе моделируется путем объединения простой модели накопления снега с температурной моделью снеготаяния. Калибровка модели осуществлялась посредством наземной фотосъёмки. Сравнение полученного в конце зимы распределения снежной воды с результатами прямых измерений показывает, что была достигнута достаточная точность: модель может быть правильно воспроизведена на 93% [21] площади зоны, полученной с фиксированной камеры.

В работе [22] для исследования водосбора были установлены самопишущие датчики температуры вдоль металлического стержня в пяти точках. Для каждого датчика присутствие или отсутствие снежного покрова определяется на основе его термоизоляции снежным покровом и вытека-

ющего из этого уменьшения суточных колебаний температуры. Показания датчиков затем были преобразованы в временные ряды изменения высоты снежного покрова. Дополнительно к этому, было рассчитано количество полученной талой воды от снежного покрова. Высота снега и количество талой воды предоставляют ценную информацию для прогнозирования весенних наводнений. Было достигнуто хорошее соответствие между расчетной высотой снежного покрова и контрольными измерениями. Результаты предлагаемой методики оценки снежного покрова и состояния снега позволяют улучшить прогноз о возможных наводнениях, собрать более полные данные о состоянии снега и уточнить модели процессов снеготаяния.

В работе [23] предложена модель динамики сезонного снежного покрова на основе простой модели для температуры снега. Три безразмерные переменные описывают моделируемую систему: высота снежного покрова, интенсивность осадков и интенсивность таяния. Модель может быть использована для широкомасштабных прогнозов сезонных запасов «снежной воды». Особый интерес в этом подходе представляет определение максимальных сезонных запасов снега, начало и конец периода накопления снега и период времени когда снежный покров полностью растаял. Модель использовалась для прогнозов в шести удаленных друг от друга участках на западе США, которые имеют непрерывный сезонный снежный покров. Было проведено сравнение данной модели с широко используемой моделью снега Sturm [24].

Интересной является проблема выпадения дождевых осадков на снег ROS (Rain On Snow). Дождевые осадки являются основной причиной пиковых событий в природных явлениях в горных прибрежных районах Северной Америки. Сохраняется неопределенность относительно роли лесного полога в преддверии и во время ROS событий. Большая часть этой неопределенности можно объяснить отсутствием подходящих методов для сбора данных во время ROS событий, отчасти из-за динамического характера климатических условий, в частности, связанных с накоплением снега и талых вод. В работе [25] метеорологическая сеть была дополнена с помощью лизиметров (лизиметр – прибор для измерения водообмена грунтовых вод с зоной аэрации и измерения испарения с поверхности суши), подвешенных на пружинных весах для измерения падающего на них снега, и сетью автоматизированной интервальной съемки для мони-

торинга состояния осадков (дождь или снег). Полученная метеорологическая сеть использовалась для оценки накопления или абляции снега, оценки выпавшего снега на полог леса, и его дальнейшей динамики. Для обработки данных было использовано программное обеспечение по анализу изображений. Также постоянно проводились наблюдения водного эквивалента снега с использованием простых пружинных весов. Эта экспериментальная конструкция позволила захватить ранее недоступную информацию без прямого наблюдения.

Прогнозирование снеготаяния стало одной из важнейших проблем в западной части Соединенных Штатов в связи с растущим спросом на водоснабжение, изменением структуры снежного покрова и последующим требованием оптимальной эксплуатации водохранилищ. Возрастающее значение гидрологических прогнозов требует, чтобы традиционные системы прогнозирования периодически пересматривались с учетом научных достижений в области гидрологии. Модель SNOW17 [26], используемая Национальной службой погоды NWS (National Weather Service) для оперативного прогнозирования таяния снега, была относительно неизменной на протяжении десятилетий. В работе [27] исследуемая модель SAST (Snow - Atmosphere - Soil Transfer) сравнивается с моделью SNOW17 в точности моделирования сезонного снежного покрова (как накопления так и таяния) и разгрузки бассейна. Была исследована работоспособность модели в течении 13-летнего периода, с использованием данных из двух бассейнов, расположенных на юго-западе штата Айдахо. Результаты показали, что SAST чаще переоценивают в весенний период из-за отсутствия средне-зимнего снеготаяния в модели. SAST также имеет более быстрые коэффициенты весеннего таяния, чем SNOW17, что приводит к большим ошибкам в прогнозах. В целом результаты работы показали, что сравнительно «простая» модель SNOW17 хорошо выполняет прогноз.

В последнее время все большее применение в гидрологических исследованиях находят видео-спектрометры. В работе [28] проводятся исследования тающего снега как трехфазной среды. Проводится анализ спектрального сдвига в коэффициенте поглощения между водяным паром, жидкой водой и льдом с помощью инфракрасного спектрометра AVIRIS (Airborne Visible/Infrared Imaging Spectrometer).

Изменения тепловых, физических и оптических свойств в снежно-



ледовых системах, а также обратная связь между разными временными и пространственными масштабами влияет на множество экологических процессов, представляющих интерес для исследования и наблюдений в прикладных задачах. В результате стали появляться многочисленные математические модели, описывающие таяние снега. Одной из основных категорий таких моделей являются модели энергетического баланса. В статье [29] представлена простая, но физически оправданная модель, которая позволяет определить величину водостока от растаявшего снега. Модель использует высоту снега и радиационные показатели.

В гидрологическом моделировании важным является учет изменчивости масштабов субэлементов при накоплении или абляции снега. Изменчивость масштаба субэлементов достигается увеличением сеточных узлов в расчетной сетке при численном расчете [30]. В [31] разработана модель имитации снеготаяния в горных районах с часовым шагом по времени на основе разбиения поверхности на малые области с учетом энергетического баланса между областями. В работе [32] проведено сравнение моделей снеготаяния и выявлены метеорологические параметры, оказавшие влияние на снеготаяние в лесах Канады в период 1985-1987 годов. В [33] описывается балансовая модель поверхности ледника Peyto, расположенного в Канаде, которая применяется для моделирования абляции. Для исследования атмосферной циркуляции и ее влияния на баланс массы льда могут быть применены мезо- $\gamma$ -масштабные модели атмосферы с учетом взаимодействия снега со льдом [34]. В статье [35] проведены наблюдения атмосферных условий и свойств льда и снежного покрова, включая тепловые, физические свойства снежного покрова (температура, размер зерна, ослабление света), для оценки влияния на накопление микроводорослей на морском дне. В работе [36] приводятся результаты наблюдений за различными типами зимних осадков: ледяной дождь (твёрдые атмосферные осадки, выпадающие при отрицательной температуре воздуха в виде твёрдых прозрачных шариков льда), ледяная крупа, снег, слякоть, мокрый снег при разных условиях окружающей среды. Физически обоснованные гидрологические модели описывают природные процессы более точно, чем теоретические модели, но требуют широкого набора данных для получения точных результатов. Определение ценности значений различных наборов данных для повышения производительности гидрологических моделей возможно с ис-

пользованием метода моделирования Монте Карло [37]. В [38] предложен алгоритм оценки наступления сезонного таяния снега с использованием данных микроволнового радиометра.

## 4. Математические модели

### Оценка количества талых вод на основе модели вязкого сжимаемого снега.

В статье [39] рассматривается задача оценки объема талых вод с помощью модели вязкого сжимаемого снега. Полученные результаты сравниваются с результатами, полученными методом теплового баланса с использованием показаний лизиметра. Для оценки объема талых вод посредством измерения высоты снежного покрова необходимо, во-первых, измерить плотность снежного покрова в сухом состоянии (процедура является сложной для автоматического измерения), во-вторых, необходимо учитывать уплотнения снега во время снегопада.

В 1998 году, на основе теории вязкого сжимаемого сухого снега [39], Kominami и Endo предложили модель для оценки изменения толщины снежного покрова, плотности и содержания воды в зависимости от автоматических измерений осадков и высоты снежного покрова. Для оценки объема талых вод теория вязкого сжимаемого снега использует эмпирическое соотношение между вязкостью и плотностью снега, и почасовые данные. Ожидаемые результаты сравнивались с посуточной и почасовой оценками объема талых вод, рассчитанными методом теплового баланса, и показаниями снежного лизиметра [39]. Эти результаты оказались хорошо согласованы с ожидаемыми результатами, которые были вычислены с помощью модели теплового баланса и показаний снежного лизиметра экспериментальной станции Tohka-machi в 1994, 1995 гг.

Модель вязкого сжимаемого снега предполагает рассмотрение тонкого слоя снега, называемого  $i$ -ым слоем в интервале времени  $[t_{i-1}, t_i]$ . Вводятся следующие параметры:  $h_i(t)$  – толщина  $i$ -го слоя в момент времени  $t$  ( $> t_i$ ),  $w_i(t)$  – масса мокрого снега  $i$ -го слоя на единицу горизонтальной поверхности и  $q_i(t)$  – масса свободной воды, содержащейся в  $i$ -ом слое в момент времени  $t$ . Плотность сухого снега  $i$ -го слоя  $\{\rho_i(t)\}_{dry}$  в момент времени  $t$  вычисляется по формуле

$$\{\rho_i(t)\}_{dry} = \frac{\{1 - \alpha_i(t)\}w_i(t)}{h_i(t)}, \quad (20)$$



где  $\alpha_i(t) = q_i(t)/w_i(t)$  - концентрация свободной воды  $i$ -го слоя в момент времени  $t$ .

Постулируется, что вязкость  $i$ -го слоя  $\eta_i(t)$  определяется формулой

$$\eta_i(t) = \sigma_i(t) \left( -\frac{1}{h_i(t)} \frac{dh_i(t)}{dt} \right)^{-1}, \quad (21)$$

где  $\sigma_i(t)$  - нормальное напряжение сжатия, приложенное к  $i$ -му слою.

Также постулируется, что вязкость  $\eta_i$  и плотность сухого снега  $\rho_{dry}$  связаны соотношением вида [39]

$$\eta_i = C(\rho_{dry})^a, \quad (22)$$

где  $C$  и  $a$  - экспериментально определяемые постоянные.

Из (20)–(22) получим

$$-\frac{1}{h_i(t)} \frac{dh_i(t)}{dt} = \frac{\sigma_i}{C} \frac{h_i(t)}{(w_i(t) - q_i(t))^a}.$$

Разделяя переменные и интегрируя полученное равенство по времени от  $t_{n-1}$  до  $t_n$ , получим представление для изменения толщины  $i$ -го слоя в момент времени  $t$  за счет вязкого сжатия

$$h'_i(t_n) = \left\{ 1 + \left( \frac{a}{C} \right) \frac{h_i(t_{n-1})^a}{[\{1 - \alpha_i(t_{n-1})\}w_i(t_{n-1})]^a} Q_i(t_{n-1}, t_n) \right\}^{-1/a}, \quad (23)$$

здесь  $h'_i(t_n) = h_i(t_n)/h_i(t_{n-1})$ , а  $h_i(t_{n-1})$ ,  $w_i(t_{n-1})$  и  $\alpha_i(t_{n-1})$  - толщина, общая масса и концентрация свободной воды  $i$ -слоя в момент времени  $t_{n-1}$  соответственно,  $Q_i(t_{n-1}, t_n) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma_i(t)$ . Формула (23) является приближенной, так как  $(1 - \alpha_i(t))w_i(t)$  берется в точке  $t_{n-1}$ . Изменение глубины снега представлено на рисунке 1. График  $Q_i$  представлен на рисунке 2.

Общая глубина снежного покрова определяется накоплением, абляцией и сжатием. Влияние поземки предполагается незначительным, так как средняя скорость ветра из работы [39] равна  $1, 1 \text{ мс}^{-1}$ . Согласно рисунку 2, при аккумуляции высота снежного покрова  $H(t_n)$  главным образом определяется высотой выпавшего снега  $D(t_n) > 0$  и величиной сжатия снега  $\sum_{i=1}^{n-1} h'_i(t_n)$ . При абляции коэффициент  $D(t_n) < 0$ . Таким образом

$$D(t_n) = H(t_n) + g(t_n) - \sum_{i=1}^{n-1} h'_i(t_n) \approx H(t_n) - \sum_{i=1}^{n-1} h'_i(t_n),$$

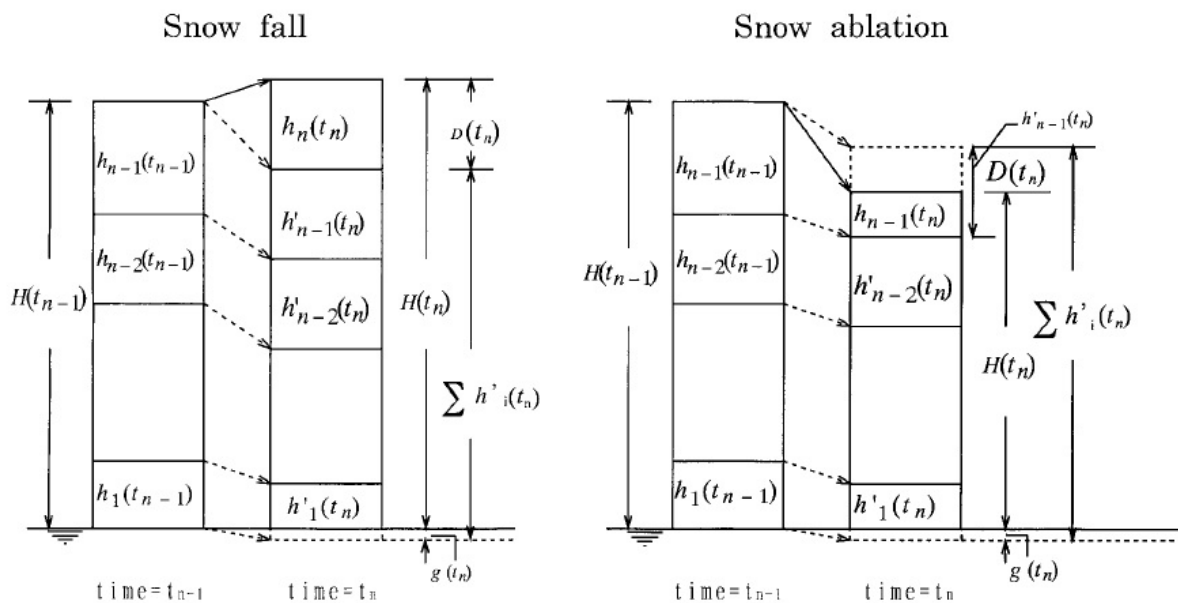


Рисунок 1 – Зависимость высоты снежного покрова  $H(t_n)$  от выпавшего и «уже унесенного» снега. Предполагается, что  $D(t_n) > 0$  при накоплении снега и  $D(t_n) < 0$  при абляции снега.

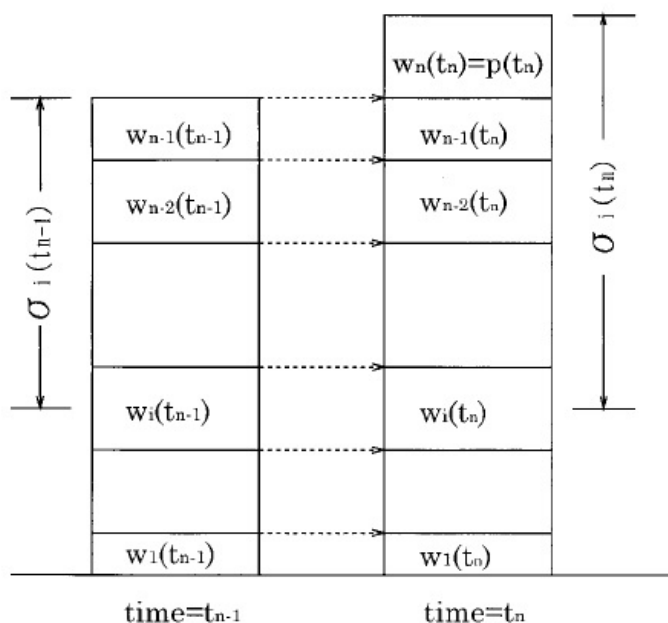


Рисунок 2 – Зависимость массы каждого слоя снега в моменты времени  $t_{n-1}$  и  $t_n$  и напряжение действующее на  $i$ -ый слой.

где  $g(t_n)$  – толщина растаявшего снега на поверхности земли за интервал времени  $[t_{n-1}, t_n]$ .

Если новый снег выпадает в течении временного интервала  $[t_{n-1}, t_n]$

без таяния на момент времени  $t_{n-1}$ , то величина  $D(t_n)$  положительна и равна толщине  $h_n(t_n)$  нового появившегося  $n$ -слоя (см. рисунок 2). Если снегопада нет и имеет место таяние на поверхности, то величина  $D(t_n)$  отрицательна и равна толщине снега, растаявшего на поверхности. Модель не учитывает случай одновременного снегопада и таяния. Вероятность таких сложных событий очень мала при рассмотрении достаточно коротких интервалов времени.

Таким образом, принимая временной интервал достаточно малым при выпадении снежных осадков массы  $p(t_n)$  и пренебрегая концентрацией свободной воды в новом снеге, приходим к следующим соотношениям:

$$h_n(t_n) = D(t_n), \quad w_n(t_n) = p(t_n), \quad \alpha_n(t_n) = 0 \text{ при } D(t_n) > 0.$$

В другом случае при  $D(t_n) < 0$  предполагается, что  $p(t_n)$  – это значение массы выпавших осадков, так и растаявшего снега на поверхности. В этом случае  $k$ -ый – слой, расположенный на глубине  $D(t_n)$  снега, растаявшего с поверхности, удовлетворяет следующим уравнениям

$$\sum_{i=k}^{n-1} h'_i(t_n) < -D(t_n) < \sum_{i=k-1}^{n-1} h'_i(t_n).$$

Как результат снеготаяния, толщина  $h_i(t_n)$  каждого слоя в момент времени  $t_n$  имеет вид

$$h_i(t_n) = 0 \text{ при } i = k, k + 1, \dots, n,$$

$$h_{k-1}(t_n) = \sum_{i=k-1}^{n-1} h'_i(t_n) + D(t_n),$$

$$h_i(t_n) = h'_i(t_n) \text{ при } i = 1, 2, \dots, k - 2.$$

К тому же массу  $m(t_n)$ , содержащую свободную воду из растаявшего мокрого снега на поверхности, можно представить в виде

$$m(t_n) = \sum_{i=k}^{n-1} w_i(t_{n-1}) + \left\{ 1 - \frac{h_{k-1}(t_n)}{h'_{k-1}(t_n)} \right\} w_{k-1}(t_{n-1}).$$

Количество талой воды  $m_w(t_n)$  вычисляется следующим образом

$$m_w(t_n) = \sum_{i=k}^{n-1} (1 - \alpha_i(t_{n-1})) w_i(t_{n-1}) + \left\{ 1 - \frac{h_{k-1}(t_n)}{h'_{k-1}(t_n)} \right\} (1 - \alpha_{k-1}(t_{n-1})) w_{k-1}(t_{n-1}).$$

Предполагается, что количество талой воды, содержащей свободную воду  $m(t_n)$  и осадки  $p(t_n)$ , распределено в низших слоях снежного покрова, и предполагается, что вода, содержащаяся в снежном слое может просачиваться в нижний слой только в случае, если содержание свободной воды  $\alpha_i(t_n)$  превышает максимальное значение  $\alpha_{max}$ . После этого можно определить массу  $w_i(t_n)$  и концентрацию свободной воды  $\alpha_i(t_n)$  каждого снежного слоя в момент времени  $t_n$ . Если таким методом вычислить новую глубину снежного покрова на интервале времени с  $t_1$  по  $t_n$ , можно получить толщину, массу и содержание свободной воды каждого снежного слоя в текущий момент времени  $t_n$ , при этом используются значения общей глубины снежного покрова и осадков, измеренных на каждом интервале времени с  $t_1$  по  $t_n$ , а также возможно вычислить массу и толщину снежного покрова на протяжении всего зимнего сезона. В статье [39] приведен пример: если за  $\Delta t$  взять один час, среднее почасовое количество растаявшего снега в момент времени  $t_n$  равно величине  $hw(t_n)$ . Для расчета объема талых вод использовались следующие значения [39]

$$C = 0.392 \text{ Pa s (kg m}^{-3}\text{)}^{-a}, \quad a = 3.6, \quad \alpha_{max} = 0.15.$$

*Модель теплового баланса.* В работе [39] использовалась одномерная модель теплового баланса для оценки объема талых вод. Эта модель предполагает линейный профиль температуры поперек снежного слоя и оценку объема талых вод и температуры снежного покрова, используя балансирование теплового потока поперек поверхности снега с потоком сквозь снежный покров с помощью массовых формул. Коэффициенты передачи массы для оптимального теплового потока [CH] и скрытого теплового потока [SE] предполагаются одинаковыми и не изменяются в период снеготаяния. Данные коэффициенты можно оптимизировать, сравнив их с измеренным изменением веса снега. Оптимизированный коэффициент передачи массы равен 0.0026 (значение взято из [39]).

*Метод лизиметра.* Лизиметр устанавливается на почву и измеряет сток талых вод. Размер лизиметра составляет 200 квадратных сантиметров. Предполагается, что можно пренебречь временной задержкой стока талых вод, когда сток был интегрирован ежедневно [39]. Ежедневное количество стока талых вод принимается равным ежедневному количеству растаявшего снега.

Для расчета количества талых вод использовались модель вязкого снега и почасовые измерения общей глубины снежного покрова и осадков. Высота снежного покрова измерялась с использованием ультразвукового измерителя снега SL-340 (минимальная цифра 0.1 см), разработанный компанией Kaijo Co., а осадки измерялись с помощью дождевой и снежной колеи (максимальное разрешение 0.5 мм воды) от Yokogawa Weathac Corporation. Измерения высоты снежного покрова и осадков проводились на смотровой площадке экспериментальной станции в Tohkamachi в течении зимы 1994–1995 г. Это место находится примерно в 190 км к северо-западу от Токио и расположено по координатам  $37^{\circ}80'80''$  северной широты,  $138^{\circ}84'60''$  восточной долготы и высотой около 200 м. Ежемесячная средняя температура воздуха зимой составляет  $3.2^{\circ}C$  в декабре,  $0.5^{\circ}C$  в январе,  $0.9^{\circ}C$  в феврале и  $2.8^{\circ}C$  в марте. Снежные слои были влажными большую часть зимы. Средняя скорость ветра составляла  $1.1 \text{ м с}^{-1}$  и поземка происходила редко. Максимальная глубина снега была 226 см.

*Сравнение модели вязкого потока с моделью теплового баланса и методом лизиметра.* На рисунке 3 показаны результаты ежедневной оценки количества талых вод при использовании модели вязкого сжатия, модели теплового баланса и лизиметра с 3 января по 4 октября 1995 года.

На рисунке 4 показаны результаты почасовых оценок талых вод с использованием каждого метода. Для почасовой оценки талых вод при уменьшении глубины снежного покрова с помощью модели вязкого сжатия использовалась средняя высота снежного покрова за три часа.

Полученная ежедневная оценка количества талых вод, которая рассчитывалась с использованием модели вязкого сжатия, хорошо соотносится с результатами, полученными для модели теплового баланса и методом лизиметра (рисунок 5).

В предположении, что временной задержкой стока талых вод можно пренебречь в ежедневном снеготаянии, сравниваются оценки талых вод с использованием модели вязкого сжатия и модели теплового баланса с снеготаянием по оценкам лизиметра. Таблица 1 показывает стандартное отклонение  $\delta$  расчетных величин модели вязкого сжатия и значения величин других методов. Как показано в таблице 1, имеются небольшие различия между ошибками вязкого сжатия и метода теплового баланса. Используя метод теплового баланса, коэффициент переноса массы обыч-

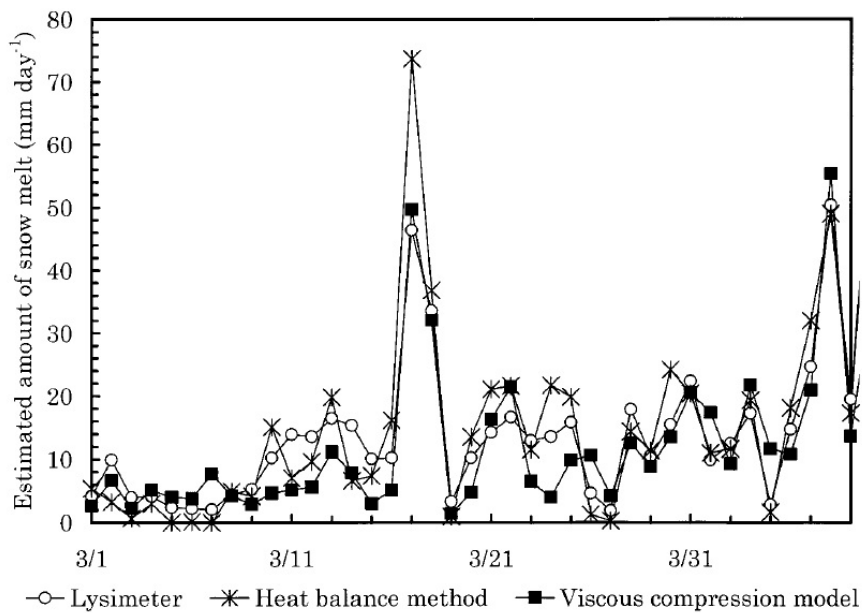


Рисунок 3 – Изменение ежедневных оценок количества талых вод в модели вязкого сжатия, модели теплового баланса и методе лизиметра.

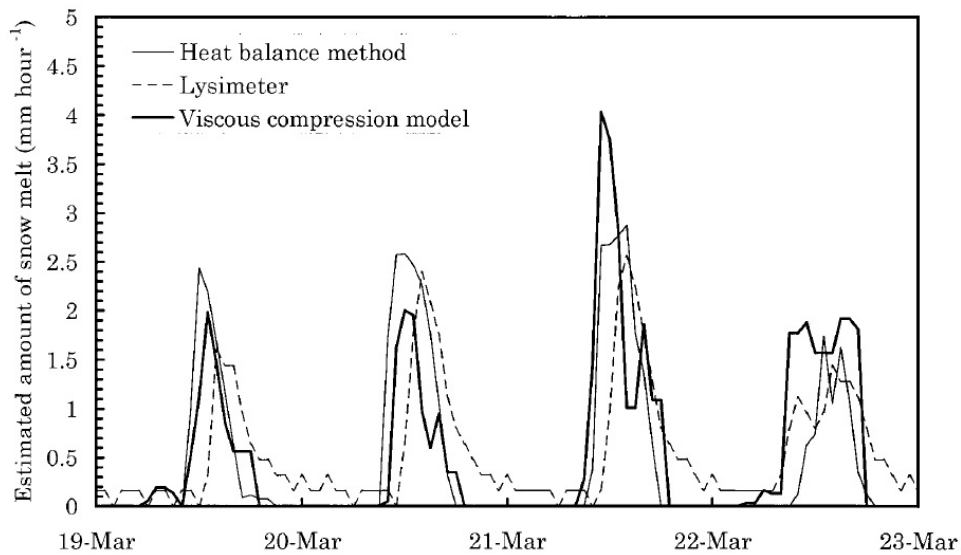


Рисунок 4 – Ежедневные изменения оценки количества талых вод в модели вязкого сжатия, модели теплового баланса и методе лизиметра.

но задается пропорционально сокращению количества снежной воды. Но в регионах с сильным снегопадом в Японии снег часто выпадает даже в период снеготаяния и данный коэффициент сложно зафиксировать из-за

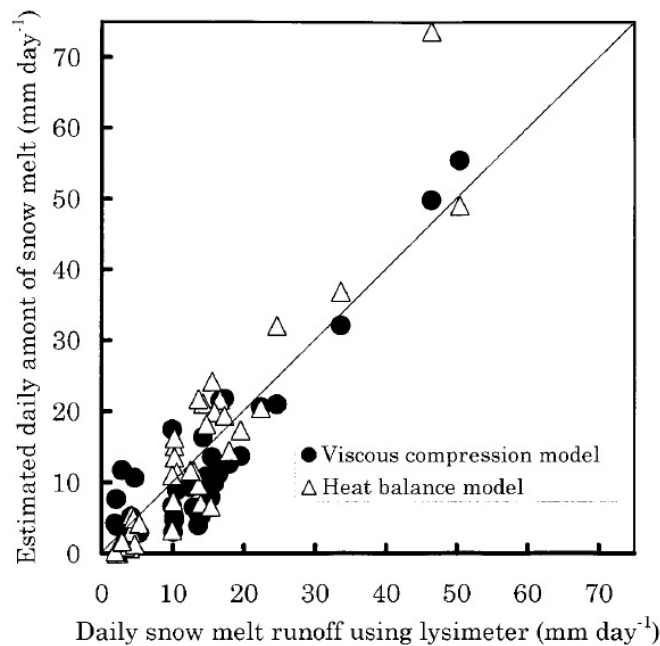


Рисунок 5 – Сравнение модели вязкого потока с моделью теплового баланса и методом лизиметра.

изменения в поверхности снежного покрова. Поэтому в таких тяжелых погодных условиях, метод независимый от состояния поверхности снежного покрова, такой как модель вязкого сжатия, является полезным для оценки количества талых вод. Максимальное содержание свободной воды  $\alpha_{max}$  по массе считается равным от 0.1 до 0.2 в зависимости от размера зерна и формы зерна [39]. Здесь имеется небольшая разница между количеством талой воды рассчитанной для максимального содержания свободной воды от  $\alpha_{max} = 0.10$  до  $\alpha_{max} = 0.20$ .

Таблица 1 – Стандартное отклонение ежедневной оценки талых вод с использованием модели теплового баланса и модели вязкой сжимаемости с лизиметром

	Стандартное распределение (мм) $\delta$	
	тепловой баланс	вязкое сжатие
1 марта - 10 апреля	7.13	6.88
10 марта - 10 апреля	8.03	9.76

## Описание фазовых переходов в Community Land Model (CLM).

В работе [45] приводится техническое описание модели Community Land Model разработанной сообществом Community Climate System Model (CCSM) и предложенной на собрании CCSM Land Model Working Group (LMWG) в феврале 1996.

В основе модели лежит закон Фика:

$$F = -\lambda \nabla T,$$

где  $F$  – это количество тепла, проводимого через единицу площади поперечного сечения в единицу времени ( $\text{В м}^{-2}$ ),  $\lambda$  – теплопроводность ( $\text{В м}^{-1} \text{К}^{-1}$ ) и  $\nabla T$  – пространственный градиент температуры ( $\text{К м}^{-1}$ ). В одномерной форме закон теплопроводности записывается в виде:

$$F_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (24)$$

где ось  $z$  направлена в вертикальном направлении (м) положительно вниз и  $F_z$  направлена положительно вверх. Для учета нестационарных или переходных режимов, принцип сохранения энергии записывается в виде уравнения неразрывности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (25)$$

Объединяя уравнения (24) и (25) получим второй закон теплопроводности в одномерном виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right].$$

Численное решение этого уравнения позволяет вычислить температуру почвы разбитой на десять слоев и температуру пяти слоев снега расположенных над слоями почвы, с граничными условиями:  $h$  – приток тепла на поверхности слоя снега из атмосферы, приток тепла на нижней границе считается равным нулю.

*Описание фазовых переходов.* Наличие или отсутствие фазовых переходов определяется из значения температуры снега или грунта следующим образом [45]:

$$\begin{aligned} T_i^{n+1} > T_f, w_{ice,i} > 0 & \text{ таяние,} \\ T_i^{n+1} < T_f, w_{liq,i} > 0 & \text{ замерзание,} \end{aligned} \quad (26)$$



где  $T_i^{n+1}$  – температура грунтового слоя,  $W_{ice,i}$  и  $W_{liq,i}$  – соответственно масса льда и масса воды (кг м<sup>-2</sup>) на единицу площади слоя снега или грунта,  $T_f$  – температура замерзания воды (К). Для специального случая, когда снег присутствует (масса снега  $W_{sno} > 0$ ), но нет никаких явных слоев снега ( $snl = 0$ ) (т.е. присутствует недостаточное количество снега для удовлетворения минимальным требованиям модели для глубины снега в 0.01 м), процесс снеготаяния имеет место для слоя грунта  $i = 1$ , если температура этого слоя больше, чем температура замерзания воды ( $T_i^{n+1} > T_f$ ).

Значение коэффициента фазового перехода оценивается из избытка (или дефицита) энергии, необходимой для изменения температуры  $T_i$  до температуры замерзания  $T_f$ . Избыток или дефицит энергии  $H_i$  (Вт м<sup>-2</sup>) определяется следующим образом

$$H_i = h + \frac{\partial h}{\partial t}(T_f - T_i^n) + \alpha F_i^n + (1 - \alpha)F_i^{n+1} - \frac{c_i \Delta z_i}{\Delta t}(T_f - T_i^n),$$

$$i = snl + 1,$$

$$H_i = \alpha(F_i^n - F_{i-1}^n) + (1 - \alpha)(F_i^{n+1} - F_{i-1}^{n+1}) - \frac{c_i \Delta z_i}{\Delta t}(T_f - T_i^n),$$

$$i = snl + 2, \dots, N,$$

где  $F_i^{n+1}$  и  $F_{i-1}^{n+1}$  вычисляются по формуле

$$F_i = -\lambda [z_{h,i} \left( \frac{T_i^n - T_{i+1}^n}{z_{i+1} - z_1} \right)].$$

Здесь  $h$  – тепловой поток направленный на поверхность снега или грунта из вышележащей атмосферы

$$h = S_g - L_g - H_g - \lambda E_g,$$

где  $S_g$  – солнечная радиация поглощаемая почвой,  $L_g$  – длинноволновое излучение поглощаемое почвой (положительное к атмосфере),  $H_g$  – поток физического тепла исходящего от земли,  $\lambda E_g$  – поток скрытого тепла от исходящего от земли.

Если условие таяния или замерзания (26) выполнено, а  $|H_i| > 0$ , то

масса льда пересчитывается как

$$w_{ice,i}^{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} w_{ice,i}^n - \frac{H_i \Delta t}{L_f} \geq 0 \quad \frac{H_i \Delta t}{L_f} > 0 \\ \min \left( w_{liq,i}^n + w_{ice,i}^n, w_{ice,i}^n - \frac{H_i \Delta t}{L_f} \right) \quad \frac{H_i \Delta t}{L_f} < 0 \end{array} \right\} \quad (27)$$

где  $L_f$  – скрытая теплота плавления (Дж кг<sup>-1</sup>). Масса жидкой воды равна

$$w_{liq,i}^{n+1} = w_{liq,i}^n + w_{ice,i}^n - w_{ice,i}^{n+1} \geq 0. \quad (28)$$

Поскольку часть энергии  $H_i$  может не расходоваться в процессе таяния или выделяться в процессе заморозки, то энергия пересчитывается следующим образом

$$H_{i*} = H_i - \frac{L_f (w_{ice,i}^n - w_{ice,i}^{n+1})}{\Delta t}.$$

Полученная энергия используется для охлаждения или нагревания слоя снега или грунта (если  $|H_{i*}| > 0$ )

$$T_i^{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} T_f + \frac{\Delta t}{c_i \Delta z_i} H_{i*} / \left( 1 - \frac{\Delta t}{c_i \Delta z_i} \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad i = snl + 1 \\ T_f + \frac{\Delta t}{c_i \Delta z_i} H_{i*} \quad i = snl + 2, \dots, N \end{array} \right\}. \quad (29)$$

Для специального случая, когда снег присутствует ( $W_{sno} > 0$ ), но нет явных снежных слоев ( $snl = 0$ ), и  $\frac{H_1 \Delta t}{L_f} > 0$  (таяние), масса снега  $W_{sno}$  (кг м<sup>-2</sup>) на единицу площади слоя сокращается в соответствии с

$$W_{sno}^{n+1} = W_{sno}^n - \frac{H_1 \Delta t}{L_f} \geq 0.$$

Глубина снега сокращается пропорционально

$$z_{sno}^{n+1} = \frac{W_{sno}^{n+1}}{W_{sno}^n} z_{sno}^n.$$

Аналогично рассуждениям выше, энергию для  $i = 1$  слоя грунта можно представить в виде:

$$H_{1*} = H_1 - \frac{L_f W_{sno}^n - W_{sno}^{n+1}}{\Delta t}.$$

Если имеются избытки энергии ( $H_{1*} > 0$ ), то эта энергия становится доступной для верхнего слоя грунта

$$H_1 = H_{1*}. \quad (30)$$

Масса льда, масса жидкой воды, и температура верхнего слоя грунта определяются из уравнений (27), (28), и из (29) с использованием пересчитанной энергии из уравнения (30). Растаявший снег  $M_{1S}$  ( $\text{кг м}^{-2} \text{с}^{-1}$ ) и энергия фазового перехода  $E_{p,1S}$  ( $\text{Вт м}^{-2}$ ) для данных условий имеют вид

$$M_{1S} = \frac{W_{sno}^n - W_{sno}^{n+1}}{\Delta t} \geq 0$$

$$E_{p,1S} = L_f M_{1S}.$$

Полная энергия фазового перехода  $E_p$  ( $\text{Вт м}^{-2}$ ) для снега или грунта

$$E_p = E_{p,1S} + \sum_{i=snl+1}^N E_{p,i},$$

где

$$E_{p,i} = L_f \frac{(w_{ice,i}^n - w_{ice,i}^{n+1})}{\Delta t}.$$

Общее количество растаявшего снега (для всех слоев)

$$M = M_{1S} + \sum_{i=snl+1}^N M_i,$$

где

$$M_i = \frac{(w_{ice,i}^n - w_{ice,i}^{n+1})}{\Delta t} \geq 0.$$

Уравнение баланса энергии для снега и грунта имеет вид:

$$G - E_p - \sum_{i=snl+1}^N \frac{c_i \Delta z_i}{\Delta t} (T_i^{n+1} - T_i^n) = 0,$$

где  $G$  – геотермальный тепловой поток.

## Исследование динамики тающего снега изотопным методом. Одномерная физическая модель.

Подземные воды влияют на многие процессы в водоразделе, включая наводнения, перенос загрязнений, распространение потоков почвенных газов, и коэффициенты химического выветривания (химическое выветривание – это совокупность различных химических процессов, в результате которых происходит дальнейшее разрушение горных пород и качественного изменения их химического состава с образованием новых минералов и соединений)[40]. Подземные протоки и сроки пребывания воды в почве при изучении внутригодового распределения стока выводятся из расчленения гидрографа (график изменения во времени расходов воды в реке или другом водостоке за год, несколько лет или часть года) на отдельные атмосферные осадки и снеготаяние. Этот метод предполагает, что расход во время и вскоре после дождя или снеготаяния может быть разделен на несколько (как правило, два или три) способствующих источников, например, грунтовая вода (старая вода) и временная вода (или новая вода). Идентификация вод различного происхождения происходит с помощью изучения изотопного состава воды. Под термином «изотопный состав воды» обычно понимают содержания дейтерия ( $^2H$ ) и кислорода-18 ( $^{18}O$ ). Изотопный состав водорода и кислорода определяется масс-спектрометрически и выражается в относительных величинах  $\delta^2H$  и  $\delta^{18}O$ :

$$\delta = [R_{\text{пр}}/R_{\text{станд}} - 1] \times 1000\%,$$

где  $R_{\text{пр}}$  и  $R_{\text{станд}}$  – отношения  $^2H/^1H$  и  $^{18}O/^{16}O$  в измеряемой пробе и в стандарте, в качестве которого принята средняя океаническая вода (Standard of Mean Ocean Water, SMOW, Vienna, IAEA).

В случае расчленения гидрографа весенним половодьем, элемент «новая вода» часто рассматривается при условии постоянного значения  $\delta^{18}O$  равному среднему  $\delta^{18}O$  снежного покрова [40]. Однако, как лабораторные, так и полевые исследования показали, что значение  $\delta^{18}O$  тающего снега не равно значению  $\delta^{18}O$  рыхлого снега. Вместо этого, тающий снег обычно является  $\delta^{18}O$  – истощенным в начале периода снеготаяния, и постепенно становится наполненным  $\delta^{18}O$  в процессе таяния. Эта изотопная эволюция следует из изотопного обмена между водой и льдом в процессе просачивания воды вглубь снежного покрова. В равновесии,  $\delta^{18}O$  воды на 3,1‰ ниже, чем у льда [40], поэтому изначальный растаявший

снег, отделившийся от снежного покрова, имеет меньшее значение  $\delta^{18}\text{O}$ , чем у рыхлого снега. Когда процесс таяния прогрессирует, оставшийся снежный покров становится все более обогащенным  $\delta^{18}\text{O}$  и, таким образом, таким же становится соответствующий растаявший снег. Поэтому изотопный состав растаявшего снега обычно не совпадает с изотопным составом рыхлого снега, и следовательно, расчленения гидрографа, основанное на  $\delta^{18}\text{O}$  рыхлого снега, будет являться ошибочным [40]. Это взаимодействие между водой и льдом может также повлиять на изотопные составы ледников, что будет в некоторой степени напоминать плавление ледников в летний период. Понимание и квантификация (квантификация – процесс измерения качественных признаков и характеристик, с последующим их сведением в количественные категории) изотопного изменения во льду через обмен вода-лед являются важными компонентами климатических исследований с использованием ледяных кернов.

Для предсказания изотопных составов растаявшего снега или ледников требуется количественное описание процесса. Такое количественное описание должно включать эффекты физических свойств снежного покрова, включая его глубину, пористость, и проницаемость. В [41] представлена первая модель, описывающая изотопную изменчивость снеготаяния. Данная модель учитывает скорость просачивания воды и динамику обмена лед-вода, но предполагается, что реакция изотопного обмена происходит между водой и рыхлым льдом, а не между водой и поверхностью льда. В [42] описана альтернативная модель, в которой возможно количественно измерить площадь поверхности, используя параметр, позволяющий только части льда взаимодействовать с водой. В работе [43], используя контролируемые эксперименты, были измерены важные физические константы для динамического обмена лед-вода. В статье [40] рассматривается усовершенствованная модель и обсуждаются параметры, от которых зависит  $\delta^{18}\text{O}$  снега в процессе снеготаяния, в особенности те параметры, которые влияют на изотопный обмен между жидкой и твердой фазой. Основное внимание получила проблема моделирования сезонного снеготаяния снежного покрова, но физическая модель может быть расширена для описания эффекта таяния на изотопные разновидности ледников.

Предположим, что снежный покров является однородным. Просачивание воды в снеге обычно описывается приведенной формой уравнения

Ричардса [40]

$$\frac{\partial S}{\partial t^*} = - \frac{K}{\phi(1 - S_i)} \frac{\partial S^n}{\partial z^*}.$$

Здесь  $\phi$  – пористость снега,  $t^*$  и  $z^*$  – время и глубина снежного покрова,  $K$  – коэффициент гидравлической проводимости снежного покрова,  $n$  – заданный параметр (в частности,  $n = 3$  [40]),  $S$  – эффективная насыщенность воды:

$$S = \frac{S_w - S_i}{1 - S_i}.$$

где  $S_w$  – общая насыщенность воды (отношение объема, занимаемого водой, к объему пор),  $S_i$  – минимальная насыщенность воды (отношение минимального объема, занимаемого водой, к объему пор).

Коэффициент  $K$  определяется плотностью воды  $\rho$ , коэффициентом фазовой проницаемости  $k$ , ускорением свободного падения  $g$ , и вязкостью воды  $\mu$ :

$$K = \frac{\rho k g}{\mu}.$$

Параметр  $n$  соотносит скорость протекания  $u^*$  с гидравлической проводимостью и эффективной насыщенностью через составное отношение [40]:

$$u^* = \frac{K}{(1 - S_i)} \frac{S^n}{(S + \beta)}, \quad (31)$$

где  $\beta = S_i/(1 - S_i)$ .

Решения уравнения (31) имеет, как правило, разрыв, который распространяется со скоростью [40]:

$$\eta^* = \frac{K}{\phi(1 - S_i)} \frac{(S_+^n - S_-^n)}{S_+ - S_-},$$

где  $S_+$  и  $S_-$  – значения насыщенности непосредственно в последующем и в предыдущем волновом фронте для зрелого снега (снег называется зрелым, если он больше не может удержать в себе жидкую воду).

Коэффициент  $\delta^{18}\text{O}/\delta^{16}\text{O}$  жидкой фазы ( $= R_{liq}$  зависит от адвекции (перемещение воздуха в горизонтальном направлении и перенос вместе с ним его свойств, таких как, температура, влажность воздуха), дисперсии и изотопного обмена лед-вода. В отличие от жидкой фазы, коэффициент

$\delta^{18}O/\delta^{16}O$  для льда  $R_{liq}$  зависит только от изотопного обмена с жидкостью. Стандартные определяющие уравнения для  $R_{liq}$  и  $R_{ice}$

$$\begin{aligned} (S + \beta) \frac{\partial R_{liq}}{\partial t^*} &= - \frac{\partial [u^* (S + \beta) R_{liq}]}{\partial z^*} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z^*} \left[ (S + \beta) D^* \frac{\partial R_{liq}}{\partial z^*} \right] + k_r \gamma (S + \beta) (R_{ice} - \alpha R_{liq}), \\ \frac{\partial R_{ice}}{\partial t^*} &= k_r (1 - \gamma) (\alpha R_{liq} - R_{ice}), \end{aligned} \quad (32)$$

где  $D^*$  – коэффициент дисперсии,  $k_r$  – постоянный коэффициент изотопного обмена лед-вода,  $\alpha$  – фракционированный (разделенный) фактор равновесия для изотопного обмена кислорода между льдом и водой при  $0^\circ C$ . Скорость изотопного обмена пропорциональна расстоянию  $(R_{ice} - \alpha R_{liq})$  системы от равновесия лед-жидкость ( $R_{ice} - \alpha R_{liq} = 0$ ). Параметр  $\gamma$  используется для количественной оценки части льда в системе изотопного обмена лед-вода

$$\gamma = \frac{bf}{a + bf}.$$

Здесь  $a$  и  $b$  – массы воды и льда на единицу объема снега,

$$a = \phi(1 - S_i)(S + \beta)\rho_{liq}, \quad b = (1 - \phi)\rho_{ice},$$

где  $\rho_{ice}$  и  $\rho_{liq}$  – соответственно плотности льда и жидкой воды. Параметр  $f$  обозначает часть льда, участвующую в изотопном обмене;  $f$  зависит от распределения размеров и шероховатости поверхности ледовых зерен, доступности поверхности льда от инфильтрационных (просачивающихся) вод, степени твердой диффузии внутри льда, и степени плавления и промерзания ледяной поверхности. На практике, эти микроскопические переменные не могут быть непосредственно измерены, а  $f$  рассматривается как параметр настройки модели.

В статье [40] рассматривается таяние снежного покрова с постоянной скоростью. В этих условиях, насыщенность воды  $S$  и скорость потока  $u^*$  постоянны и уравнение (32) переписывается в виде

$$\frac{\partial R_{liq}}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial R_{liq}}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left[ D^* \frac{\partial R_{liq}}{\partial z^*} \right] + k_r \gamma (R_{ice} - R_{liq}), \quad (33)$$

а также предполагается, что дисперсия не оказывает существенного влияния, т.е.  $D^* = 0$ . Уравнение (33) тогда сводится к виду

$$\frac{\partial R_{liq}}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial R_{liq}}{\partial z^*} = k_r \gamma (R_{ice} - \alpha R_{liq}).$$

Общая изотопная вариация в течении сезона таяния изменяется от 1% до 4% для  $\delta^{18}O$ , в зависимости от условий таяния. Эти различия достаточны, чтобы вызвать ошибки при расчленении гидрографа, и данная модель может использоваться для улучшения точности. При правильной параметризации, модель может использоваться для непрерывного расчленения гидрографа или включения в более сложные модели снеготаяния, такие как SNTHERM (Snow Thermal Model) [40].

#### Модель антарктического ледяного покрова.

В исследованиях ледников и их свойств в последнее время все большее применение находит численное моделирование ледяного покрова. В работе [44] рассмотрена модель Антарктического ледяного покрова, основным параметром которой является вертикальная скорость льда, зависящая от времени. Данная модель использует эмпирически полученные отношения для расчета распределения толщины льда в шельфовых ледниках.

Расчет движения льда основан на законе, связывающем вертикальную составляющую скорости льда  $u$  и напряжение сдвига  $\tau_b$  приложенное к скальному основанию  $u = k\tau_b^m$ , где  $k$  и  $m$  параметры модели.

Выражение для  $u$  может быть обобщено на двумерный случай, что позволяет вычислить вектор потока массы  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = KH^{m+1}[\nabla H' \cdot \nabla H']^{(m-1)/2} \nabla H'.$$

Здесь  $K$  – заданный параметр (в частности,  $K = 0.5 \text{ м}^{-3/2} \text{ год}^{-1}$  [44]),  $H$  – толщина льда,  $\nabla$  – двумерный оператор градиента и  $H' = H + h$  – является возвышением поверхности ( $h$  – высота относительно уровня моря). Лед движется вниз по наклонной поверхности. Изменение ледяного покрова определяется уравнением сохранения массы льда

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{M} + G,$$



где  $G$  – скорость скопления льда на поверхности, выраженная в единицах толщины льда в единицу времени.

Влияние нагрузки льда на скальное основание вычисляется по формуле

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{(h + h_0 + H/3.2)}{T}, \quad (34)$$

где  $h_0$  – высота скального основания в равновесии, без учета ледяной нагрузки,  $T$  – временной интервал. Уравнение (34) хорошо «работает» для нагрузок с протяженностью ледяного покрова более нескольких сотен километров. Но для точности расчетов при меньших нагрузках необходимо учитывать изгибную жесткость земной коры. Так, в общем случае, при расчете уравнения (34) должны получаться хорошие результаты, но для очень маленьких листов льда или вблизи края ледяного покрова могут возникнуть большие ошибки (порядка 50 м).

Эксперименты, описанные в [44], следует рассматривать как первый шаг в развитии более или менее полной модели антарктического ледникового покрова. Однако, тонкая настройка модели до сих пор не выполнена и в модель не включены несколько физических процессов.

Результаты экспериментов показали, что рассматриваемая модель способна воспроизводить влияния горных хребтов на распределение толщины льда. Особенно, если учесть эксперимент, в котором фиксируется топография скального основания. В этом случае расчеты модели очень точны, и ошибки возникают только из-за плохого разложения на части некоторых нарушений скального основания. В действительности значения параметра  $K$ , используемого в данном исследовании, были обнаружены в течение настраивания модели с фиксированным скальным основанием для заданного распределения толщины льда. Даже если баланс массы и высота скального основания не зависят от влияния льда, рассматриваемая модель ледяного покрова напоминает настоящий Антарктический Ледниковый Покров.

Эксперименты, проведенные с использованием модели антарктического ледникового покрова, показали хорошие результаты [44]. Это еще раз подтверждает, что для крупномасштабного моделирования ледниковых щитов точная форма закона движения льда не важна: модели могут быть легко настроены для получения аналогичных результатов. Двадцатипятилетняя история антарктического ледникового покрова соответствует

картине, складывающейся из численных экспериментов.

Объем льда в ледниковом покрове увеличивается в случае небольшого падения уровня моря (вследствие образования ледяного покрова в Северном полушарии). Объем льда уменьшается если уровень моря и температура моря достаточно высоки (в межледниковые периоды в Северном полушарии). Однако данных изменений в повышении уровня моря и/или температуры может быть недостаточно для, например, разрушения больших айсбергов и торосов в морях Росса и Уэдделла, и необходимы дополнительные условия. Одним из таких условий может быть колебание ледяного покрова в Западной части Антарктики. Дальнейшее развитие рассматриваемой модели может включать в себя более тонкую обработку ледникового покрова, вычисление температуры льда и учет влияния скольжения приложенного к скальному основанию на расход массы льда.

### **О корректном описании процесса теплопереноса в процессе промерзания грунта**

Очень часто при математическом описании процесса промерзания грунта прибегают к значительной его схематизации. Предполагается, что на границе нулевых или близких к ним температур, которые одновременно считаются и границей промерзания, происходит скачком переход всей содержащейся в грунте воды в лед. Соответственно этому и физические свойства талого грунта на этой границе переходят скачкообразно в свойства мерзлого грунта, причем свойства и талого и мерзлого грунта считаются неизменными. Выделение теплоты кристаллизации, следовательно, происходит также целиком на границе раздела мерзлого и талого грунтов. Кроме того, считается, что сам процесс замерзания воды, содержащийся в грунте, по достижении последним температуры замерзания происходит мгновенно. Такая схема оправдывается, и то лишь до известной степени, если вода, содержащаяся в грунте, никак с ним не связана, т.е. замерзает так же, как вода в открытых сосудах (задача Стефана). Однако известно, что при нулевых температурах замерзает только содержащаяся в грунтах свободная вода, связанная же остается в незамерзшем состоянии. Она начинает переходить в лед лишь при понижении температуры грунта ниже нуля, причем выяснено, что чем сильнее связана вода с грунтом, тем при более низкой температуре она замерзает.

По данным З.А. Нерсесовой [47], величина льдистости мерзлого углин-ка и глины, понимая под льдистостью отношение веса льда к весу всей воды, содержащейся в мерзлом грунте, непрерывно растет с понижением температуры. Полученные ею кривые зависимости льдистости  $i$  от температуры  $\theta$  показывают, что никакой постоянной температуры замерзания грунта нет, в действительности существует непрерывный спектр температур замерзания. Последний можно характеризовать кривой  $i = i(\theta)$ . Кривая эта описывается экспонентой вида

$$i = i_k \frac{1 - e^{-\alpha(\theta - \theta_H)}}{1 - e^{-\alpha(\theta_K - \theta_H)}}, \quad (35)$$

где  $i_k$  - значение льдистости при температуре  $\theta_K$ , соответствующее концу экспериментальной кривой;  $\theta_H$  - температура начала перехода воды в лед и  $\alpha$  - коэффициент, характеризующий степень связанности воды с грунтом, зависящий от дисперсности, минералогического и химического состава грунтов.

Экспериментально установлено, что чем сильнее связана вода с грунтом, тем меньше  $\alpha$  и наоборот, при замерзании свободной воды  $\alpha \rightarrow \infty$ . В работе [49] на основе теории равновесного состояния воды в замерзающих и мерзлых грунтах [48] и кривые льдистости  $i = i(\theta)$ , сделана попытка установить более достоверный механизм процесса промерзания грунта. При охлаждении грунта вместе с переходом температуры поверхности к отрицательным значениям нулевая изотерма начинает углубляться внутрь грунта. Непрерывное движение нулевой изотермы приводит к тому, что в мерзлом грунте на каждом его горизонте вследствие понижения температуры происходит непрерывное замерзание воды, ведущее к увеличению льдистости. Следовательно, распределение льдистости для каждого замерзающего грунта определяется распределением в нем температур. Это говорит о том, что переход воды в лед, а следовательно, и связанное с этим процессом выделение теплоты кристаллизации происходит по всей толще мерзлого грунта. Следовательно, теплоту кристаллизации, выделяемую при замерзании воды, более правильно учитывать не в граничном условии (что соответствовало прежней схеме), а в основном дифференциальном уравнении теплопроводности в виде распределенных по объему грунта внутренних источников тепла. Так как тепловые свойства воды и льда различны, то, следовательно, с изменением их соотношения в грунте должны меняться и тепловые

свойства самого грунта, т.е. теплоемкость и теплопроводность. В частности, с ростом льдистости теплоемкость грунта будет уменьшаться, а теплопроводность возрастать. Пусть зависимость теплоемкости грунта от льдистости будет  $C = C(i)$ , а теплопроводность  $\lambda = \lambda(i)$ . Здесь  $i$  принимает значения  $i \geq 0$ .

При значениях  $i > 0$  выражения выше характеризуют тепловые свойства мерзлого грунта, при  $i = 0$  - свойства талого грунта.

При сформулированных условиях, имея так же в виду одномерный поток тепла, уравнение теплопроводности, справедливое одновременно для мерзлого и талого грунтов, можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \{C(i)\rho\theta\} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \lambda(i) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\} - K_p W_0 \frac{\partial i(\theta)}{\partial \tau}. \quad (36)$$

Легко видеть, что для области грунта, где  $i = 0$ , оно переходит в обычное уравнение теплопроводности для однородного талого грунта. С учетом сказанного, приходим к нелинейному уравнению:

$$\rho[\{\theta C_0 + K W_0\}f(\theta) + \varphi(\theta)] \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \lambda_0 f(\theta) \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \psi(\theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (37)$$

где  $K$  - теплота кристаллизации льда;  $\rho$  - объемный вес грунта;  $W_0$  - общая влажность грунта:

$$C_0 = \frac{dC(i)}{di}, \lambda_0 = \frac{d\lambda(i)}{di}, f(\theta) = \frac{di}{d\theta},$$

$$\varphi(\theta = C\{i(\theta)\}), \psi(\theta) = \lambda\{i(\theta)\}.$$

Уравнение (37) и является основным для задачи о промерзании грунта. Напомним, что по старой схеме распределение температур в мерзлом и талом грунтах описывалось отдельно, т.е. двумя различными уравнениями теплопроводности. Граничные условия с принятием новой схемы значительно упрощаются, так как два условия на границе раздела мерзлого и талого грунтов, вносящие основные осложнения в математическую сторону задачи, вовсе выпадают. Остаются лишь условия на верхней границе мерзлого грунта и нижней границе талого грунта. Они записываются, естественно, в прежней форме.

### Задача Стефана о промерзании (протаивании)[49]

Проиллюстрируем задачу Стефана на следующей постановке. Изучение кривых льдистости мерзлых грунтов показывает, что подавляющая часть воды в грунте замерзает в спектре отрицательных температур, локализованном около  $0^\circ\text{C}$  и скрытая теплота плавления выделяется только на границе твердой и жидкой фаз. В этой постановке задача о протаивании мерзлого грунта сводится к решению уравнений (для одномерного случая):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{t}} &= a_1 \frac{\partial^2 \bar{\theta}_1}{\partial x^2}; & 0 < x < \bar{S}(\bar{t}) \\ \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{t}} &= a_2 \frac{\partial^2 \bar{\theta}_2}{\partial x^2}; & \bar{S}(\bar{t}) < x < b \leq \infty\end{aligned}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_1 &= T > 0, & x &= 0; \\ \bar{\theta}_2 &= \bar{\theta}_0 \leq 0, & t &= 0; \\ \bar{\theta}_1 &= \bar{\theta}_2 = 0, & x &= \bar{S}; \\ -\bar{\lambda}_1 \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x} + \bar{\lambda}_2 \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial x} &= \rho l \omega \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{t}}, & x &= \bar{S}.\end{aligned}$$

Аналогично ставится задача о промерзании влажного грунта.

В работе [53] рассмотрен процесс кристаллизации (плавления) на основе уравнений Бусинеска для жидкой фазы и условий на границе раздела типа Стефана.

Вопросы образования соленого льда рассмотрены в работе Фадеева [54].

В работе [55] представлена упрощенная теоретическая модель для описания процесса тепломассопереноса при таянии снега на подогреваемом асфальте. В частности, рассматривается изменение тепловых свойств и капиллярного эффекта снежного слоя в процессе таяния снега.

### Экспериментальное исследование процессов фильтрации в тающем снеге

В работе [56] экспериментально исследовалось движение воды в тающем снеге. Снег с разным размером зерен был просеян и искусственно упакован в прямоугольные контейнеры, чтобы получить известные характеристики слоев снега. Процесс таяния инициировался с помощью

четырёх инфракрасных ламп (100 Вт), установленных над каждым контейнером. Лампы создавали однородное поле излучения около  $150 \text{ Вт м}^{-2}$ . Стены контейнеров были изолированы панелями из полистирола (см. рис. 6). Температуру в холодном помещении поддерживали при  $0^\circ\text{C}$ . Пути потока определялись визуально с помощью краски, а водонасыщенность с помощью рефлектметров, установленных внутри контейнеров. В работе экспериментально показано, что когда талая вода начинает движение через достаточно однородный снежный покров, последний достаточно быстро становится гетерогенным.

Два вида снега были упакованы слоями в контейнеры. Первый контейнер заполнялся сначала крупнозернистым снегом с плотностью  $540 \pm 8 \text{ кг/м}^3$  (толщина слоя 10 см), а затем мелкозернистым с плотностью  $480 \pm 8 \text{ кг/м}^3$  (толщина слоя 15 см). Второй контейнер наоборот, сначала заполняли мелкозернистым (толщина слоя 10 см) а потом крупнозернистым снегом (толщина слоя 15 см). Датчики рефлектметров располагались на высоте 17, 14.5 и 5 см от дна контейнеров соответственно (верхний, средний и нижний). Датчики температуры были только на нижнем уровне (5 см от дна контейнеров).



Рисунок 6 – Схематическая экспериментальная установка

Эксперименты показали, что в первом контейнере граница между мелкозернистым и крупнозернистым слоями снега действует как барьер для талой воды. Как и ожидалось, во втором контейнере граница не

препятствует просачивающейся воде. Экспериментально показано, что в процессе фильтрации образуются области с большей пористостью (предпочтительные пути фильтрации) и снег становится существенно неоднородным.

### Скорость химической реакции

В работе [57] пишут, что при химическом превращении происходит разрыв молекулярных связей, удерживающих атомы в одних молекулах, и образование новых связей в молекулах других, возникающих в ходе реакции веществ. Число молекул не изменяется, происходит лишь их перегруппировка, которая связана с определенными энергетическими затратами или выделением энергии.

Переход из начального состояния в конечное характеризуется скоростью химической реакции, которую можно рассчитывать по различным компонентам реагирующей смеси. Скорость химической реакции по одному из компонентов определяется следующим образом:

$$W_i = -\frac{1}{V} \frac{dN_i}{dt}, \quad W'_j = \frac{1}{V} \frac{dN'_j}{dt},$$

где  $N_i$  и  $N'_j$  - число молекул (атомов)  $i$ -го исходного вещества и  $j$ -го продукта реакции в объеме  $V$  в момент времени  $t^*$ .

Связь между скоростями реакции по различным веществам устанавливается законами сохранения элементарного состава, из которых следует, что

$$\frac{W_i}{\nu_i} = \frac{W'_j}{\nu'_j} = W,$$

где  $\nu_i, \nu'_j$  - стехиометрические коэффициенты.

Таким образом, если объем не меняется в ходе реакции, то ее скорость определяется производной объемной концентрации  $a_i = N_i/V$ ,  $a'_j = N'_j/V$  по времени:

$$W_i = -\frac{da_i}{dt}, \quad W'_j = \frac{da'_j}{dt}.$$

Если реакция происходит в результате соударения двух молекул (би-молекулярная реакция) веществ  $A_1$  и  $A_2$ , то скорость реакции равна

$$-\frac{da_1}{dt} = -\frac{da_2}{dt} = ka_1a_2.$$

Константа пропорциональности - константа реакции  $k$  является функцией температуры газа. Температурная зависимость  $k$  связана с тем, что далеко не каждое столкновение реакционноспособных молекул  $A_1$  и  $A_2$  приводит к образованию новой молекулы. Чтобы прошла реакция, сталкивающиеся молекулы должны обладать достаточно большим запасом энергии, необходимым для того, чтобы преодолеть определенный потенциальный барьер, разрушить, или изменить устойчивые химические связи и электронную структуру реагирующих веществ. Этот потенциальный барьер характеризуется энергией (иногда говорят - теплотой) активации  $E$ , а температурная зависимость  $k$ , обусловленная существованием энергии активации, описывается соотношением Аррениуса

$$k = k_0 e^{-E/RT},$$

в котором константа  $k_0$  получила название предэкспоненциального множителя или предэкспонента,  $R = 1.986$  кал/моль·град - универсальная газовая постоянная,  $T$  - температура.

Чтобы получить оценку для  $k_0$ , воспользуемся формулой для общего числа столкновений между реакционноспособными молекулами  $A_1$  и  $A_2$ , которое следует из кинетической теории газов [58]:

$$k_0 = 2\chi\sigma\sqrt{2\pi RT\frac{M_1 + M_2}{M_1M_2}} \quad (38)$$

где  $\sigma$  - квадрат суммы радиусов сталкивающихся молекул,  $M_1$  и  $M_2$  - их массы. Введенный в формулу (38) множитель  $\chi$  называемый стерическим фактором, есть вероятность того, что при столкновении молекулы обладают необходимой для протекания реакции пространственной ориентацией.



## Заключение

Балансовым моделям и наблюдениям за поведением снежного покрова посвящено огромное число работ. Типичными являются работы Л.С. Кучмента, А.Н. Гельфана, М. Sturm и других авторов. Эти работы имеют целью оценить запасы снега, риски наводнения и формирование речного стока.

Модели тающего снежного покрова на основе подходов механики многофазных сред предназначены для получения более детальной картины движения воды и воздуха в тающем снеге, а именно, определение поля скоростей, концентрации, давлений фаз и т.д. Работ этого плана очень мало. Проблемы описания фазовых переходов и движения ледового скелета остаются открытыми.

## Библиографический список

1. Папин А. А., Коробкин А. А., Гоман В. А. Движение воды и воздуха в тающем снеге // Известия Алтайского государственного университета. – 2012. – №. 1-1.
2. Stefan J. Ueber thermomagnetische Motoren // Annalen der Physik. – 1889. – Т. 274. – №. 11. – С. 427-440.
3. Трофимова Е. Б. Математическая модель снежного покрова как многофазной среды // Труды IV всесоюзн. гидролог. съезда. – 1976. – Т. 6.
4. Денисов Ю. М. Перенос тепла и влаги в почве (неподвижной пористой среде) // Тр. САНИГМИ. – 1968. – №. 39. – С. 54.
5. Lou D., Hammond D. W. Heat and mass transfer for ice particle ingestion inside aero-engine // Journal of Turbomachinery. – 2011. – Т. 133. – №. 3. – С. 031021.
6. Tantserev E., Galerne C. Y., Podladchikov Y. Y. Multiphase flow in multi-component porous visco-elastic media // The Fourth Biot Conference on Poromechanics.–2009. – 2009.
7. Sellers S. Theory of water transport in melting snow with a moving surface // Cold regions science and technology. – 2000. – Т. 31. – №. 1. – С. 47-57.
8. Gray J. Water movement in wet snow // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 1996. – Т. 354. – №. 1707. – С. 465-500.
9. Gray J., Morland L. W. A dry snow pack model // Cold regions science and technology. – 1994. – Т. 22. – №. 2. – С. 135-148.

10. Gray J., Morland L. W., Morris E. M. A phase-changing dry snowpack model //Journal of Glaciology. – 1995. – Т. 41. – №. 137. – С. 11-29.
11. Colbeck S. C. A theory of water percolation in snow //Journal of Glaciology. – 1972. – Т. 11. – №. 63. – С. 369-385.
12. Gelfan A. N., Pomeroy J. W., Kuchment L. S. Modeling forest cover influences on snow accumulation, sublimation, and melt //Journal of Hydrometeorology. – 2004. – Т. 5. – №. 5. – С. 785-803.
13. Kuchment L. S. et al. Use of satellite-derived data for characterization of snow cover and simulation of snowmelt runoff through a distributed physically based model of runoff generation //Hydrology and Earth System Sciences. – 2010. – Т. 14. – №. 2. – С. 339-350.
14. Bergman M. I. et al. Convection and channel formation in solidifying Pb-Sn alloys //Metallurgical and Materials Transactions A. – 1997. – Т. 28. – №. 13. – С. 859-866.
15. Wettlaufer J. S., Worster M. G., Huppert H. E. The phase evolution of young sea ice //Geophysical research letters. – 1997. – Т. 24. – №. 10. – С. 1251-1254.
16. Tait S., Jaupart C. Compositional convection in a reactive crystalline mush and the evolution of porosity //J. geophys. Res. – 1992. – Т. 97. – С. 6735-6756.
17. Hellawell A., Sarazin J. R., Steube R. S. Channel convection in partly solidified systems //Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences. – 1993. – Т. 345. – №. 1677. – С. 507-544.
18. Александров Д. В. и др. Динамика фазовых переходов при замерзании льда и ее влияние на теплообмен между океаном и атмосферой: этап 3. – 2011.
19. Koskinen J. T. et al. Monitoring of snow-cover properties during the spring melting period in forested areas //IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 2009. – Т. 48. – №. 1. – С. 50-58.

20. Marechal N. et al. Heat transfer simulation for modeling realistic winter sceneries //Computer Graphics Forum. – Oxford, UK : Blackwell Publishing Ltd, 2010. – T. 29. – №. 2. – C. 449-458.
21. Farinotti D. et al. Snow accumulation distribution inferred from time-lapse photography and simple modelling //Hydrological processes. – 2010. – T. 24. – №. 15. – C. 2087-2097.
22. Rupp D. E. et al. Analytical assessment and parameter estimation of a low-dimensional groundwater model //Journal of hydrology. – 2009. – T. 377. – №. 1-2. – C. 143-154.
23. Reusser D. E., Zehe E. Low-cost monitoring of snow height and thermal properties with inexpensive temperature sensors //Hydrological Processes. – 2011. – T. 25. – №. 12. – C. 1841-1852.
24. Sturm M., Holmgren J., Liston G. E. A seasonal snow cover classification system for local to global applications //Journal of Climate. – 1995. – T. 8. – №. 5. – C. 1261-1283.
25. Floyd W., Weiler M. Measuring snow accumulation and ablation dynamics during rain-on-snow events: innovative measurement techniques //Hydrological Processes: An International Journal. – 2008. – T. 22. – №. 24. – C. 4805-4812.
26. Anderson E. A. Development and testing of snow pack energy balance equations //Water Resources Research. – 1968. – T. 4. – №. 1. – C. 19-37.
27. Franz K. J., Hogue T. S., Sorooshian S. Operational snow modeling: Addressing the challenges of an energy balance model for National Weather Service forecasts //Journal of Hydrology. – 2008. – T. 360. – №. 1-4. – C. 48-66.
28. Green R. O. et al. Measuring the expressed abundance of the three phases of water with an imaging spectrometer over melting snow //Water Resources Research. – 2006. – T. 42. – №. 10.
29. Williams K. S., Tarboton D. G. The ABC's of snowmelt: a topographically factorized energy component snowmelt model //Hydrological Processes. – 1999. – T. 13. – №. 12-13. – C. 1905-1920.

30. Luce C. H., Tarboton D. G., Cooley K. R. Sub-grid parameterization of snow distribution for an energy and mass balance snow cover model //Hydrological Processes. – 1999. – T. 13. – №. 12-13. – C. 1921-1933.
31. Hock R., Holmgren B. A distributed surface energy-balance model for complex topography and its application to Storglaciaren, Sweden //Journal of Glaciology. – 2005. – T. 51. – №. 172. – C. 25-36.
32. Prevost M. et al. Snowmelt modeling in a balsam fir forest: comparison between an energy balance model and other simplified models //Canadian Journal of Forest Research. – 1991. – T. 21. – №. 1. – C. 1-10.
33. Munro D. S. A surface energy exchange model of glacier melt and net mass balance //International journal of climatology. – 1991. – T. 11. – №. 6. – C. 689-700.
34. Gallee H., Duynkerke P. G. Air-snow interactions and the surface energy and mass balance over the melting zone of west Greenland during the Greenland Ice Margin Experiment //Journal of Geophysical Research: Atmospheres. – 1997. – T. 102. – №. D12. – C. 13813-13824.
35. Mundy C. J., Barber D. G., Michel C. Variability of snow and ice thermal, physical and optical properties pertinent to sea ice algae biomass during spring //Journal of Marine Systems. – 2005. – T. 58. – №. 3-4. – C. 107-120.
36. Theriault J. M. et al. On the simulation of winter precipitation types //Journal of Geophysical Research: Atmospheres. – 2006. – T. 111. – №. D18.
37. Finger D. et al. The value of glacier mass balance, satellite snow cover images, and hourly discharge for improving the performance of a physically based distributed hydrological model //Water Resources Research. – 2011. – T. 47. – №. 7.
38. Takala M. et al. Detecting the onset of snow-melt using SSM/I data and the self-organizing map //International Journal of Remote Sensing. – 2008. – T. 29. – №. 3. – C. 755-766.

39. Kominami Y., Endo Y., Niwano S. Estimating the amount of snowmelt based on viscous compression model of snow //Hydrological Processes. – 1999. – Т. 13. – №. 12-13. – С. 1773-1780.
40. Feng X. et al. Isotopic evolution of snowmelt 1. A physically based one-dimensional model //Water Resources Research. – 2002. – Т. 38. – №. 10. – С. 35-1-35-8.
41. Buason T. Equation of isotope fractionation between ice and water in a melting snow column with continuous rain and percolation //Journal of Glaciology. – 1972. – Т. 11. – №. 63. – С. 387-405.
42. Taylor S. et al. Isotopic evolution of a seasonal snowpack and its melt //Water Resources Research. – 2001. – Т. 37. – №. 3. – С. 759-769.
43. Taylor S. et al. Isotopic evolution of snowmelt 2. Verification and parameterization of a one-dimensional model using laboratory experiments //Water Resources Research. – 2002. – Т. 38. – №. 10. – С. 36-1-36-8.
44. Oerlemans J. A model of the Antarctic ice sheet //Nature. – 1982. – Т. 297. – №. 5867. – С. 550.
45. Oleson K. et al. Technical description of the community land model (CLM). – 2004.
46. Колесников А. Г. К изменению математической формулировки задачи о промерзании грунта //Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 32. – №. 6. – С. 889-891.
47. Нерсесова З. А. Изменение льдистости грунтов в зависимости от температуры //ДАН СССР. – 1950. – Т. 75. – №. 6. – С. 845-846.
48. Цытович Н. А. О незамерзающей воде в рыхлых горных породах //Изв. АН СССР, серия геол. – 1947. – №. 3.
49. Бондарев Э. А., Красовицкий Б. А. Температурный режим нефтяных и газовых скважин. – Наука. Сиб. отд-ние, 1974.
50. Sunderland J. E. et al. Heat-conduction problems with melting or freezing //J. Heat Transfer. – 1969. – Т. 91. – С. 421-426.

51. Колесников А. Г., Мартынов Г. А. О расчете глубины промерзания и оттаивания грунтов-В КН Материалы по лабораторным исследованиям мерзлых грунтов Сб 1М //Изд-во АН СССР. – 1953. – С. 13-3.
52. Меламед В. Г. О численном интегрировании классической задачи Стефана при наличии фазовых переходов в спектре температур //Известия АН СССР. Сер. геофиз N. – 1963. – Т. 9. – С. 2.
53. Ulvrova M. et al. Numerical modelling of convection interacting with a melting and solidification front: Application to the thermal evolution of the basal magma ocean //Physics of the Earth and Planetary Interiors. – 2012. – Т. 206. – С. 51-66.
54. Fateev E. G. Ultralow elastic stability of salt ice at low temperatures //Technical Physics. – 2012. – Т. 57. – №. 6. – С. 770-778.
55. Wang H., Chen Z. Study of critical free-area ratio during the snow-melting process on pavement using low-temperature heating fluids //Energy Conversion and Management. – 2009. – Т. 50. – №. 1. – С. 157-165.
56. Waldner P. A. et al. Effect of snow structure on water flow and solute transport //Hydrological processes. – 2004. – Т. 18. – №. 7. – С. 1271-1290.
57. Зельдович Я. Б. Математическая теория горения и взрыва. – Наука, 1980.
58. Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей: пер. с англ./под ред //ЕВ Ступоченко. М.: Изд-во иностранной литературы. – 1961.