Библиографический список

1. Anderson D.F., Livingston P.S. The zero-divizor graph of a commutative ring // J. Algebra. – 1999. – V. 217. – P. 434–447.
2. Bloomfield N., Wickham C. Local rings with genus two zero divisor graph // Communication in Algebra. – 2010. – V. 38. – P. 2965–2980.
3. Bloomfield N. The zero divisor graphs of commutative local rings of order p^4 and p^3 // Communication in Algebra. – 2013. – V. 41. – P. 765–775.

УДК 512.55

О графах делителей нуля конечных коммутативных локальных колец с 4-нильпотентным радикалом

Е.В. Журавлев, О.А. Филина
АлтГУ, г. Барнаул

Пусть S – коммутативная полугруппа с нулем, $x \in S$,

$$\mathrm{Ann}(x) = \{y \in S \mid xy = 0\}.$$

Введем на S отношение эквивалентности:

$$\forall x, y \in S \quad x \sim y \Leftrightarrow \mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(y).$$

Класс эквивалентности элемента $x \in S$ будем обозначать $[x]$, а соответствующее фактормножество $S/\sim$.

Отношение $\sim$ является конгруэнцией на S: для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ если $x_1 \sim x_2$ и $y_1 \sim y_2$, то $x_1 x_2 \sim y_1 y_2$. Следовательно, мы можем рассматривать фактормножество $S/\sim$ как полугруппу относительно операции $[x][y] = [xy]$. Графом делителей нуля $\Gamma(S/\sim)$ полугруппы $S/\sim$ будем называть граф, вершинами которого являются элементы $S/\sim$ и две вершины $[x]$, $[y]$ (не обязательно различные) соединяются ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда $[x][y] = [0]$ (равносильно $xy = 0$).

Пусть R – конечное коммутативное локальное кольцо с единицей, $J(R)$ и R^* – радикал Джекобсона и группа обратимых элементов кольца R соответственно, $F = R/J(R) = GF(p^r)$ – конечное поле, $F^* = F \setminus \{0\}$. Существуют элементы $m_1, \ldots, m_h \in J(R)$ такие, что кольцо R раскладывается в прямую сумму F-модулей (см. [1]):

$$R = F \oplus Fm_1 \oplus \ldots \oplus Fm_h,$$

причем

$$J(R) = Fm_1 \oplus \ldots \oplus Fm_h.$$

Рассмотрим случай, когда $\operatorname{char} R = 3$ и $\dim_F J/J^2 = 2,$ $\dim_F J^2/J^3 = 2,$ $\dim_F J^3 = 1,$ $J^4 = 0,$

$$R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_1 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw,$$

где $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w\}$ – базис идеала $J(R)$ над полем F, $u_1, u_2 \in J/J^2$, $v_1, v_2 \in J^2/J^3$, $w \in J^3$.

В работе [2] классифицированы с точностью до изоморфизма все кольца R указанного типа. Наша цель – построить графы делителей нуля $\Gamma(S/\sim)$ одного из таких колец. А именно, рассмотрим кольцо со следующим умножением базисных элементов:

$$u_1^2 = v_1,\ u_1u_2 = v_2,\ u_2^2 = 0,\ u_1v_1 = u_2v_1 = u_1v_2 = w,\ \ u_2v_2 = 0$$

(см. [2], теорема 1, пункт 3). Непосредственным вычислением получаем, что

$$R = [1] \bigcup_{n_i \in F} [u_1 + n_i u_2] \bigcup_{k_i \in F} [u_2 + k_i v_1] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0],$$

где

$$[u_1 + n_i u_2] = F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw,$$

$$[u_2 + k_i v_1] = F^*(u_2 + k_i v_1) + Fv_2 + Fw,$$

$$[v_1 + m_i v_2] = F^*(v_1 + m_i v_2) + Fw,$$

$$[v_2] = F^* v_2 + Fw,$$

$$[w] = F^* w,\ \ [0] = \{0\},\ \ [1] = R^*,$$

и для любых $n_i, k_i, m_j \in F,\ \ i, j \in \{1, \ldots, p^r\},$

$$\operatorname{Ann}(u_1 + n_i u_2) = \left[v_1 - (1 + n_i) v_2\right] \cup [w] \cup [0],$$

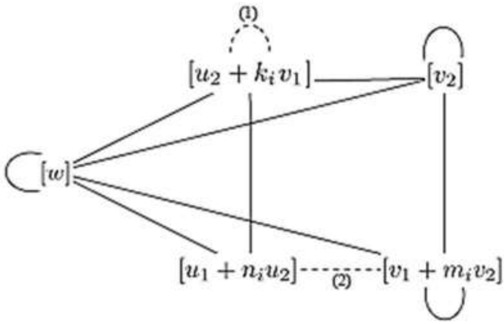
$$\operatorname{Ann}(u_2 + k_i v_1) = [u_2 - k_i v_1] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0],$$

$$\operatorname{Ann}(v_1 + m_j v_2) = [u_1 - (1 + m_j) u_2] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_j v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0],$$

$$\operatorname{Ann}(v_2) = \bigcup_{k_i \in F} [u_2 + k_i v_1] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0],$$

$$\operatorname{Ann}(w) = J.$$

На рисунке 1 представлено геометрическое изображение графа $\Gamma(S/\sim)$, за исключением вершин $[0]$ и $[1]$, так как $[0]$ смежна со всеми вершинами, а $[1]$ смежна только $[0]$.



1) если $k_i = -k_j$;

2) если $m_i = -(1 + n_i)$.

Рисунок 1 – Геометрическое изображение графа $\Gamma(S/\sim)$

В данном изображении вершины $[u_1 + n_i u_2]$, $[u_2 + k_i v_1]$, $[v_1 + m_i v_2]$ это группы вершин графа $\Gamma(S/\sim)$, причем пунктирные ребра означают смежность вершин графа при выполнение некоторых условий, указанных внизу рисунка.

Данная работа продолжает исследования, начатые в [3]. Цель исследований – построить графы делителей нуля коммутативных колец порядка p^{6r} (для колец порядка p^{5r} задача решена в [4]). Этот результат, как пример, важен для актуальной в настоящее время тематике по классификации конечных колец, удовлетворяющих некоторому условию на их графы делителей нуля.

Библиографический список

1. Raghavendran R. Finite associative rings // Compositio Math. – 1969. – V. 21. – P. 195–229.

2. Zhuravlev E.V. On the classification of finite commutative local rings // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2006. – № 3. – C. 15–29.

3. Журавлев Е.В., Монастырева А.С. О графах делителей нуля коммутативных локальных колец // Математики – Алтайскому краю: сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2018. – С. 11–13.

4. Bloomfield N. The zero divisor graphs of commutative local rings of order p^4 and p^5, Communication in Algebra. – 2013. – V. 41. – 765–775.