УДК 512.552.4

О полилинейных тождествах в конечномерной нильпотентной алгебре R над полем с ограничениями на dim R^n/ dim R^{n+1}

Е.П. Петров
АлтГУ, г. Барнаул

Задача описания тождеств конечномерной алгебры над полем возникла довольно давно. Так, в 80-е годы в Днестровской тетради [1] Л.А. Бокутем была предложена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех n-мерных ассоциативных алгебрах над полем (n – фиксированное число).

В 1980 году С.А. Пихтильковым в работе [2] эта задача была решена для алгебр с единицей при $n < 18$. В 1986 году Ю.Н. Мальцевым в статье [3] изучалось многообразие алгебр M_n, порожденное всеми n-мерными нильпотентными алгебрами. Такие многообразия там были описаны для $n < 7$, а также поставлен вопрос:

(*) *Какова степень минимального тождества в многообразии* M_n?

В 1989 г. И.Л. Гусевой в статье [4] было доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени $k = \left[\frac{\mathrm{n}}{3}\right] + 2$.

В 1991 г. автором в работе [5] была сформулирована гипотеза о том, что произвольная n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$, и в качестве подтверждения этой гипотезы был приведен пример n-мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени, и доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра R с условием $\dim \mathrm{R}^2 / \dim \mathrm{R}^3 < 3$ удовлетворяет данной гипотезе. Из этого результата, в частности, следовало, что стандартное тождество степени $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$ является минимальным тождеством в M_n для $n < 13$ и $n = 15$. Таким образом, для малых размерностей был найден ответ на вопрос (*).

В поисках ответа на вопрос (*) и подтверждения обозначенной гипотезы автором в работах [6]–[8] проведены исследования нильпотентной конечномерной алгебры R, удовлетворяющей для некоторого натурального числа N > 1 условию $\dim \mathrm{R}^{\mathrm{n}} / \dim \mathrm{R}^{\mathrm{n}+1}$=2, выясняя ее строение, определяющие соотношения и тождества.

В частности, получены следующие результаты.

Теорема 1. [6]. Всякая ассоциативная нильпотентная конечномерная алгебра R над произвольным полем с условием $\dim R^2 / \dim R^3 = 2$ удовлетворяет стандартному тождеству

$$S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} = 0.$$

Причем эта оценка является точной.

Теорема 2. [8]. Произвольная конечнопорожденная нильпотентная алгебра R над полем характеристики, не равной двум, с условием $\dim R^N / \dim R^{N+1} = 2$, $N > 2$, удовлетворяет стандартному тождеству

$$S_{N+2}(x_1, \dots, x_{N+2}) = \sum_{\sigma \in S_{N+2}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1+2)} \cdots x_{\sigma(N+2)} = 0.$$

Теорема 3. [8]. Для бесконечного количества значений N найдется такая конечнопорожденная нильпотентная алгебра R над полем характеристики, не равной двум, с условием $\dim R^N / \dim R^{N+1} = 2$, которая не удовлетворяет никакому полилинейному тождеству степени (T-1).

То есть, степень стандартного тождества в алгебре R с условием $\dim R^N / \dim R^{N+1} = 2$, $n > 1$, не зависит от величины индекса нильпотентности алгебры R.

В случае, когда $\dim R^2 / \dim R^3 = 3$, такой независимости уже нет. Действительно, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Для любого натурального числа *k* найдется конечномерная нильпотентная алгебра R над произвольным полем с условием $\dim R^2 / \dim R^3 = 3$, не удовлетворяющая никакому полилинейному тождеству степени *k*.

Библиографический список

1. Днестровская тетрадь: нерешенные проблемы теории колец и модулей: (оперативно-информационный материал). – Новосибирск, Ин-т математики СО АН СССР, 1982.

2. Пихтильков С.А. О многообразиях, порожденных n-мерными алгебрами. – Тульский политехнический институт, Тула (1980), Деп. в ВИНИТИ, № 121380.

3. Мальцев Ю.Н. О тождествах нильпотентных алгебр // Известия вузов, Мат. – 1986. – № 9. – С. 68–72.

4. Гусева И.Л. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр // Международная конференция по алгебре памяти А.И. Мальцева: сборник трудов, Новосибирск, август 1989. – С. 43.

5. Петров Е.П. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр // Алгебра и логика. – 1991. – Т. 30, выпуск 5. – С. 540–556.

6. Петров Е.П. Определяющие соотношения и тождества нильпотентной конечномерной алгебры R с условием $\dim \mathrm{R}^2 \,/\, \dim \mathrm{R}^3 = 2$ // Сибирские электронные математические известия. – 2016. – № 13. – С. 1052–1066.

7. Петров Е.П. Строение, определяющие соотношения и тождества конечномерной нильпотентной алгебры R с условием $\dim \mathrm{R}^{\mathrm{N}} \,/\, \dim \mathrm{R}^{\mathrm{N}+1} = 2$ // Сибирские электронные математические известия. – 2017. – № 14. – С. 1153–1187.

8. Петров Е.П. Определяющие соотношения и тождества конечнопорожденной нильпотентной алгебры R с условием $\dim \mathrm{R}^{\mathrm{N}} \,/\, \dim \mathrm{R}^{\mathrm{N}+1} = 2$ // Сибирские электронные математические известия. – 2018. – № 15. – С. 1048–1064.

УДК 512.54.01

Аксиоматический ранг класса Леви, порождённого квазимногообразием qH_p

С.А. Шахова

АлтГУ, г. Барнаул

Обозначим через $L(M)$ – класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(a)^G$ каждого элемента a из G принадлежит классу групп M. Класс $L(M)$ называется классом Леви, порождённым классом групп M. А.И. Будкин доказал в [1], что если M – квазимногообразие групп, то $L(M)$ – также квазимногообразие групп.

Рассмотрим группы, имеющие следующие представления в многообразии нильпотентных ступени не выше 2 групп:

$$H_p = gr(x, y \mid [x, y]^p = 1),$$

$$H_{p^s} = gr(x, y \mid x^{p^s} = y^{p^s} = [x, y]^p = 1),$$

где p – простое нечётное число, $s \geq 2$.

В работе [2] были изучены классы Леви $L(qH_p)$, а в работе [3] – классы Леви $L(qH_{p^s})$. Эти классы оказались заданными системами квазитождеств от бесконечного числа переменных.

В [4] доказано, что класс Леви $L(qH_{p^s})$ конечно аксиоматизируем, т.е. может быть задан конечной системой квазитождеств.

В настоящей работе получен следующий результат.