2. Montejano L. Orthogonal projections of convex bodies and central symmetry // Bol. Soc. Mat. Mex. II –Ser. 28. – 1993 – P. 265–279.

3. Groemer H. On the determination of convex bodies by translates of their projections // Geom. Dedicate. – V. 66 – 1997. –P. 265–279.

4. Chakerian G.D., Klamkin M.S. A three point characterization of central symmety // Amer. Matsh. Monthly. – V. 111 – 2004. – P. 903–905.

5. Boltyanski V.G., Jeronimo Castro J. Centrally symmetric convex sets // Journal of Convex Analysis. – V.14 – 2007. – № 2. – P. 345–351.

6. Menon V.V. A theorem on partitions of mass-distribution // Pacific J. Math. – V.16 – 1966. – P. 133–137.

7. Zarankiewicz K. O prostych połowiących pola wypukłe //Wiadom. Mat. – V.2 –1959. – № 2. – S. 228–234.

8. Piegat E. O srednicach wypukłych płaskich // Rozsh. Polsk. Towarz. Math. – Ser. 2, 7. – 1963. – S. 51–56.

9. Grunbaum B. Continuous families of curves // Canadian J. of Math. – V. 18. – 1966. – № 3. – P. 529–537.

10. Canete A., Segure Gomis S. Bisections of centrally symmetric planar convex bodies minimizing the maximum relative diameter. // Math. MG. – ArHive: 1803.00321v1. – 2018.

11. Miori C., Peri C., Segura Gomis S. On fencing problems // J. Math. Anal. Appl. – V. 300. –2004. – № 2. – P. 464–476.

УДК 515.123

О сильной и слабой неатомарности внешних мер

А.Н. Саженков[1], Е.А. Плотникова[2]

[1]АлтГУ, г. Барнаул, [2]НГТУ, г. Новосибирск

В работе дается сравнительный анализ понятий неатомарности и слабой неатомарности для абстрактных внешних мер, определённых на булевом кольце и принимающих значения в произвольном множестве. Для скалярных функций множеств, то есть для функций, определённых на кольце множеств и принимающих значения в числовой прямой, неатомарность множества A означает, что его можно представить в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся множеств A_1, A_2, …, A_n таких, что для любого номера k и любого подмножества $B \subset A_k$ из кольца модуль значения функции на этом множестве будет меньше заранее заданного положительного числа ε. Для слабой неатомарности достаточно выполнения условия быть меньше ε значениям функции на самих множествах A_1, A_2, …, A_n.

Пусть (P, $\vee$, $\wedge$, C) – булева алгебра, (R, $+$, $\cdot$) – булево подкольцо P, 0 – минимальный элемент P [1]. M – произвольное множество, на котором выделена точка θ, $\boldsymbol{U}$ – фильтр по убыванию его подмножеств, содержащих точку θ. φ – отображение R в M такое, что $\varphi(0) = \theta$, определим $\tilde{\varphi}(x)=\{\varphi(y):\ y\le x,\ y\in R\}$ и $\tilde{u}=\{x\in R:\ \tilde{\varphi}(x)\subset u\}$. Отображение φ: $R \to M$ будем называть *внешней мерой*, если для любого $u \in U$ существует $v \in U$ такое, что из $x, y \in R$ и $\tilde{\varphi}(x)\subset v$, $\tilde{\varphi}(y)\subset v$ следует $\tilde{\varphi}(x\vee y)\subset u$. Для каждой внешней меры φ существует единственная, согласованная со структурой кольца (R, $+$, $\cdot$) топология $I(\varphi)$, для которой $\{\tilde{u}:\ u\in U\}$ составляют базу фильтра окрестностей 0 [2-4].

Внешнюю меру φ: $R \to M$ будем называть *неатомарной*, если для любых $x \in R$, $v \in U$ существует дизъюнктный набор $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов из R такой, что $x = x_1\vee \ldots \vee x_n$ и $\tilde{\varphi}(x_k)\subset v$ для всех k [5-6]. Отметим следующее свойство окрестностей $\tilde{u}$ элемента 0 топологии $I(\varphi)$: если $x\in\tilde{u}$, $y \le x$, то $y\in\tilde{u}$. Внешняя мера φ называется *слабо неатомарной*, если для любых $x\in R$ и $u \in U$ существует такая дизъюнктивная последовательность $x_1,\ldots,x_n$ элементов из R, что $x=\mathop{\vee}\limits_{k=1}^{n} x_k$ и $\varphi(x_k)\in u$ для всех k.

Из самих определений следует, что неатомарность внешней меры влечёт слабую неатомарность. Будем далее называть неатомарность сильной неатомарностью. Функция φ: $R \to M$ называется *исчерпывающей*, если для любого $v \in U$ и любой дизъюнктной последовательности $\{x_n\} \subset P$ найдётся номер N такой, что для всех $n \ge N$ выполняются включения $\varphi(x_n) \subset v$.

Теорема. Пусть H – топологическая абелева группа, $\varphi\colon R\to H$ – конечно аддитивная исчерпывающая мера. Тогда сильная и слабая неатомарность эквивалентны.

Доказательство. Достаточно заметить, что слабая неатомарность влечёт сильную. Пусть v – окрестность нуля в H. Рассмотрим семейство $u_v\subset R$: $a\in u_v$ тогда и только тогда, когда существуют $a_1, \ldots, a_n \in R$ такие, что $a=\mathop{\vee}\limits_{k=1}^{n} a_k$ и для любого $b\le a_k$, $b\in R$, $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнено включение $\varphi(b)\in v$.

Выделим следующие свойства системы u_v:

1) если $a,b\in u_v$, то $a\vee b\in u_v$;

2) если $a \notin u_v$, w – окрестность нуля такая, что $w = -w$, $w + w \subset v$, то существуют $p, s \in R$ такие, что $p \le a$, $s \le a$, $p \wedge s = \theta$, $p \notin u_v$, $\varphi(s) \notin w$.

Первое свойство очевидно. Докажем второе. Так как $a \notin u_v$, найдётся $b \le a$ такое, что $\varphi(b) \notin v$. Обозначим $c = b + a$. По первому свойству либо $c \notin u_v$, либо $b \in u_v$. Рассмотрим каждый случай отдельно. Пусть $c \notin u_v$, тогда положим $p = c$, $s = b$ и получим $p \in u_v$ и, так как $w \subset u, \varphi(s) \notin w$. Пусть теперь $b \notin u_v$. Воспользуемся слабой неатомарностью φ и разобьём b на дизъюнктивные элементы $b_1, ..., b_n \in R$ так, что $b = \vee_{k=1}^{n} b_k$ и $\varphi(b_k) \in w$, $k = 1,2,...,n$. По свойству 1 существует номер k_0 такой, что $b_{k_0} \notin u_v$. Обозначим $s = b + b_{k_0}$, $p = b_{k_0}$. Тогда $p \notin u_v$ и, так как $\varphi(b) = \varphi(s) + \varphi(p)$, $\varphi(p) \in w$, $\varphi(b) \in v$, получим $\varphi(s) \notin w$. Свойство 2 доказано.

Очевидно, что сильная неатомарность означает $u_v = R$ для любого v.

Пусть $a \in u_v$. Тогда по свойству 2 существуют $p_1, s_1 \in R$ такие, что $p_1 \wedge s_1 = \theta$, $p_1 \in u_v$, $\varphi(s_1) \notin w$. Из p_1 аналогично выделим p_2, s_2 и так далее. Получим дизъюнктивную последовательность $\{s_n\} \subset R$ такую, что $\varphi(s_k) \notin w$. Это противоречит исчерпываемости φ. Теорема доказана.

Библиографический список

1. Владимиров Д. А. Булевы алгебры. – М.: «Наука», 1969.

2. Савельев Л. Я. Внешние меры и внешние топологии // Сиб. матем. журнал, 1983. 24(2), 133–149.

3. Савельев Л.Я. Продолжение внешних мер // Докл. АН СССР. 1981. Т.267. №4. 830–833.

4. Савельев Л. Я. Непрерывные меры // Сиб. электрон. матем. изв. 5 (2008). 499–508.

5. Pap E., Gavrilut A., Agop M. Atomicity via regularity for non-additive set multifunctions // Soft computing. 2016. Volume 20, 4761–4766.

6. Cavaliere P., Ventriglia F. On nonatomicity for non-additive functions // J. Math. Anal. Appl. 415 (2014). 358–372.