

Вырежем овал. Для этого в уравнении скрещенного колпака а изменим параметры. Рассмотрим поверхности K_1, K_2, K_3

$$K_1: v \in [-\pi, \arcsin(9/10)], u \in [-\pi, \arcsin(9/10)/\sin(v/2)],$$

$$K_2: v \in [2 \arcsin(9/10), 2\pi - 2 \arcsin(9/10)],$$

$$u \in [\arccos(-\sqrt{\sin^2(v/2) - (9/10)^2}), \pi],$$

$$K_3: v \in [-2 \arcsin(9/10), 2 \arcsin(9/10)], u \in [-\pi, \pi].$$

Чтобы построить скрещенный колпак с «дырой» снизу, надо поверхности K_1, K_2, K_3 отобразить симметрично относительно плоскости $z = 0$ и сдвинуть их вдоль оси z на $2p = 9/5$ единиц. Получим поверхности $K_1, K_2, K_3, K_{-1}, K_{-2}, K_{-3}$. Построим поверхности $K_1, K_2, K_3, K_{-1}, K_{-2}, K_{-3}$.

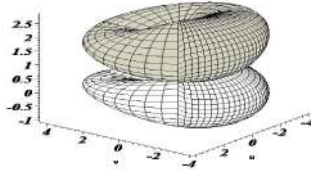


Рисунок 5 – Связная сумма двух скрещенных колпаков

Библиографический список

1. Масси У., Столлингс Дж. Алгебраическая топология. Введение. М. Изд-во Мир, 1977, 342 с.

УДК 579.64

Инверсия поверхностей вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны

М.А. Чешкова
АлтГУ, г. Барнаул

Работа посвящена построению инверсии для поверхностей вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны

1. Основные формулы. В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность вращения M , полученную вращением плоской кривой вокруг оси. Обозначим через $k = (0, 0, 1)$ – орт оси, а через

$e = (\cos(v), \sin(v), 0)$ – радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси. Тогда поверхность вращения M можно задать в виде

$$r = ue(v) + f(u)k,$$

где $f = f(u)$ – дифференцируемая функция, u, v – параметры.

Имеем уравнение для определения меридиана поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны K [1, с. 100]

$$f(u) = \pm \int_0^u \sqrt{\frac{Kt^2 - (c-1)}{c - Kt^2}} dt, K, c = const.$$

Имеем

$$f(u) = \mp \frac{-I\sqrt{c-1} \text{EllipticE}\left(\frac{u\sqrt{Kc}}{c}, \frac{\sqrt{(c-1)c}}{c-1}\right)}{\sqrt{K}} + c_1, K, c, c_1 = const$$

Рассмотрим инверсию [2, с. 482] $r^* - r_0 = \frac{m^2(r - r_0)}{\langle r - r_0, r - r_0 \rangle}$

относительно сферы радиуса m с центром $r_0 = (A, B, C)$. Будем рассматривать инверсию, когда центр инверсии расположен на оси вращения поверхности, т.е. полагаем $A = 0, B = 0$.

2. Примеры поверхностей вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Полагаем $K = -1$.

Имеется три типа поверхностей вращения отрицательной гауссовой кривизны: волчок и катушка Миндинга, псевдосфера.

1. *Волчок Миндинга.* При $0 < c < 1$ имеем волчок Миндинга [2, с. 100]. Требуя, чтобы $1 - c - u^2 > 0$, получим $u \in [-\sqrt{1-c}, \sqrt{1-c}]$.

Полагая $c = 1/4, c_1 = 0$, построим 4 секции волчка Миндинга при $u \in [-\sqrt{1-c}, 0], v \in [-\pi, \pi]$.

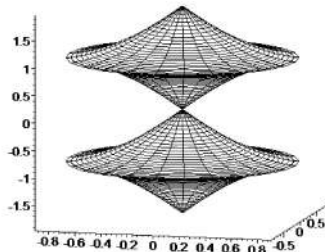


Рисунок 1 – Модель волчка Миндинга, 4 секции, $c = 1/4$

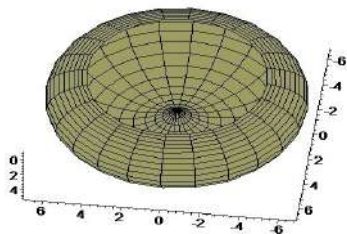


Рисунок 2 – Инверсия волчка Миндинга

$$A = 0, B = 0, C = f(-\sqrt{3}/2), m = 2$$

2. Псевдосфера (или поверхность Бельтрами). При $c = 0$ имеем псевдосферу [2, с. 100].

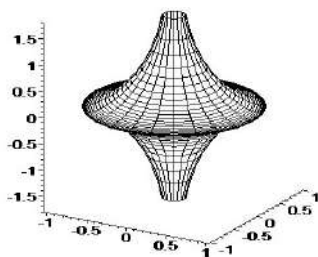


Рисунок 3 – Псевдосфера, 2 секции

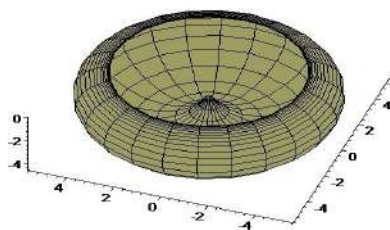


Рисунок 4 – Инверсия одной секции псевдосферы,

$$A = 0, B = 0, C = 0, m = 2$$

3. *Катушка Миндинга*. При $c < 0, \sqrt{c} < u < \sqrt{|c|-1}$ имеем катушку Миндинга [3, с. 100]. Следуя Миндингу, полагаем $c = -a^2, u = ach(t)$,

$$f(t) = \pm \int \sqrt{1 - a^2 \operatorname{sh}^2(t)} dt. \text{ Полагаем } a = 1.$$

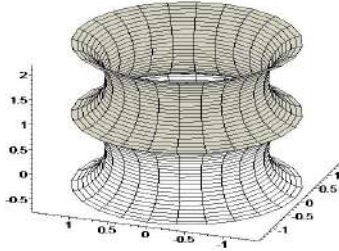


Рисунок 5 – Катушка Миндинга, 2 секции

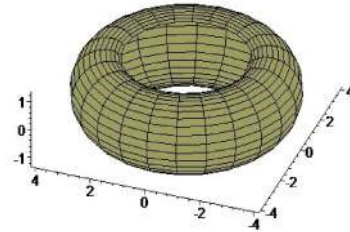


Рисунок 6 – Инверсия одной секции катушки Миндинга,
 $A = 0, B = 0, C = 0, m = 2$

Библиографический список

1. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Т. ГИИТЛ, М., 1947, с. 407.
2. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М. 1966, с. 647.
3. Миндинг Ф. О внутренней геометрии поверхностей, С. 162–179. В сборнике классических работ по геометрии Лобачевского и развитие её идей. Под ред. Нордена А.П., ГИИТЛ, М. 1956, с. 527.