Библиографический список

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. Т. I. Механика. – 4–е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 216 с.
2. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Т. I. Механика и электродинамика. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 416 с.
3. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения. – М.: Физматлит, 1993. – 464 с.
4. Denman H.H, Buch L.H: Solution of the Hamilton-Jacobi equation for certain dissipative classical mechanical systems // J. Math. Phys. – 1973. – V.14, no 3. – p. 326–329.

УДК 517.95 + 534.12 + 532.5

Математическая модель нестационарных колебаний битого льда в канале

К.Н. Завьялова, К.А. Шишмарев
АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается нестационарная задача об определении прогибов битого льда в прямоугольном канале бесконечной длины под действием движущейся нагрузки. H − глубина канала, $2L$ − ширина канала. Ледовый покров моделируется тонкой упругой пластиной с нулевой жесткостью в рамках линейной теории гидроупругости. Нагрузка движется с постоянной скоростью U, вызывает прогиб битого льда и может создавать нестационарные гидроупругие волны, распространяющиеся от нагрузки. Жидкость в канале невязкая и несжимаемая. Течение, вызванное прогибом битого льда, считается потенциальным. Система уравнений имеет вид

$$Mw_{tt} = p(x, y, 0, t) - P(x - Ut) \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0), \tag{1}$$

$$p(x, y, 0, t) = -\rho_l \varphi_t(x, y, 0, t) - \rho_l g w(x, y, t) \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0), \tag{2}$$

$$\nabla^2 \varphi(x, y, z, t) = 0 \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0) \tag{3}$$

$$\varphi_z = w_t \quad (z = 0), \qquad \varphi_z = 0 \quad (y = \pm L), \qquad \varphi_z = 0 \quad (z = -H), \tag{4}$$

здесь M − единица массы льда на единицу площади, ρ_l − плотность льда. Потенциал скорости течения жидкости затухает в отдалении от нагрузки при конечных временах

$$\varphi \to 0 \quad (|x| \to \infty, t < \infty), \tag{5}$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$\varphi = 0, \varphi_t = 0 \ \ (t = 0). \qquad (6)$$

Внешняя нагрузка моделируется гладким локализованным распределением давления в форме

$$P(x - Ut, y) = P_0 P_1\left(\frac{X}{L}\right) P_2\left(\frac{y}{L}\right) \qquad (-\infty < x < \infty, -L < y < L) \qquad (7)$$

$$P_1\left(\frac{X}{L}\right) = \begin{cases} (\cos\left(\frac{\pi c_1 X}{L}\right) + 1)/2 & (c_1|X|/L < 1), \\ 0 & (c_1|X|/L \geq 1), \end{cases}$$

$$P_2\left(\frac{y}{L}\right) = \begin{cases} (\cos\left(\frac{\pi c_2 y}{L}\right) + 1)/2 & (c_2|y|/L < 1), \\ 0 & (c_2|y|/L \geq 1). \end{cases}$$

Функция внешней нагрузки является симметричной

$$P(x - Ut, -y) = P(x - Ut, y).$$

В движущейся совместно с нагрузкой системе координат (X, y, z), где $X = x - Ut$, внешняя нагрузка $P(X, y)$ не зависит от времени.

Прогиб битого льда удовлетворяет условию затухания в отдалении от нагрузки при конечных временах

$$w \to 0 \qquad (|x| \to \infty, t < \infty), \qquad (8)$$

и начальным условиям при $\boldsymbol{t = 0}$

$$w = w_0(x, y), \qquad w_t = 0, \qquad (9)$$

где $w_0(x, y)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$0 = -\rho_l g w_0(x, y) - P(x, y) \qquad (10)$$

и условию (8).

Решение нестационарной задачи (1) – (10) зависит от плотности ρ_l, параметров льда ρ_i, h_i, параметров канала H, L и параметров нагрузки P_0, U, c_1, c_2. Задача (1) – (10) решается применением преобразования Фурье в направлении оси x

$$w^F(\xi, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, t) e^{-i\xi x}\, dx,$$

$$\varphi^F(\xi, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y, z, t) e^{-i\xi x}\, dx.$$

Для функции нагрузки $P(x - Ut, y)$ получим

$$e^{-i\xi Ut} P^F(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{-i\xi(X + Ut)}\, d(X + Ut).$$

Применение преобразования к уравнениям и условиям (1) – (10) дает уравнение пластины для образа Фурье w^F прогибов битого льда

$$Mw_{tt}^F = -\rho_l g w^F - \rho_l \varphi_t^F - e^{-i\xi Ut} P^F(\xi, y), \qquad (11)$$

и соответствующие начальные условия

$$w^F = w_0^F(\xi, y), \qquad w_t^F = 0 \ (t = 0), \qquad (12)$$

где $w_0^F(\xi, y) -$ образ Фурье начального условия для прогибов льда $w_0(x, y)$. Образ Фурье потенциала скорости течения жидкости $\varphi^F(\xi, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{yy}^F + \varphi_{zz}^F = \xi^2 \varphi^F \quad (-L < y < L, -H < z < 0), \qquad (13)$$

начальным и краевым условиям

$$\varphi_z^F = w_t^F(\xi, y, t) \ (z = 0), \ \varphi_y^F = 0 \ (y = \pm L), \ \varphi_z^F = 0 \ (z = -H),$$
$$\varphi^F = 0, \ \varphi_t^F = 0 \ (t = 0). \qquad (14)$$

Преобразование Фурье уменьшает число независимых переменных на одну переменную, но добавляет один новый параметр – параметр преобразования ξ.

Прогиб битого льда $w^F(\xi, y, t)$ определяется методом разделения переменных y и t:

$$w^F(\xi, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\xi, t)\, \psi_n(y), \quad \psi_n(y) = \cos\frac{\pi n y}{L}. \qquad (15)$$

Система функций $\psi_n(y)$ является полной и эти функции ортогональны в следующем смысле

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{\pi n y}{L} \cos\frac{\pi m y}{L}\, dy = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 2L, & m = n. \end{cases}$$

Функции $a_n(\xi, t)$ зависят от номера n, t и параметра ξ, являются неизвестными и должны быть найдены в процессе решения. Учет симметричности внешней нагрузки по y дает

$$w^F(\xi, -y, t) = w^F(\xi, y, t) \qquad (16)$$

для любых значений ξ и $|y| < L$.

С учетом кинематического условия на границе раздела лед-жидкость (первое уравнение в (14) при $z = 0$) потенциал скорости φ^F ищется в виде

$$\varphi^F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n,t}(\xi,t) \cos\frac{\pi n y}{L} \cosh(\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2}(H+z))}{\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2}\, \sinh(\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} H)}. \qquad (17)$$

Подстановка представлений (15) и (17) в уравнение (11) приводит последнее к виду

$$M \sum_{n=1}^{\infty} a_{n_{tt}} \cos\frac{\pi n y}{L} = -\rho_l g \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\xi, t) \cos\frac{\pi n y}{L} - \qquad (18)$$
$$-\rho_l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_{tt}} \cos\frac{\pi n y}{L} \cosh(\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2}(H+z))}{\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2}\, \sinh\left(\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} H\right)} - P^F(\xi, y) e^{-i\xi Ut}.$$

Умножение на $\cos\frac{\pi m y}{L}$ и интегрирование результата по y от $-L$ до L приводит к системе дифференциальных уравнений для поиска a_n

$$\frac{d^2a_n}{dt^2}\left(\frac{M\sqrt{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\xi^2}+\rho_l\coth\left(\sqrt{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\xi^2}H\right)}{\sqrt{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\xi^2}}\right)+\rho_l g a_n=\frac{P_n(\xi)e^{-i\xi Ut}}{2L}. \quad (19)$$

Ранее для канала было получено счетное число дисперсионных соотношений [1] (в отличие от задачи без стенок [2])

$$\omega_n^2(\xi)=\frac{\rho_l g\sqrt{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\xi^2}}{M\sqrt{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\xi^2}+\rho_l\coth\left(\sqrt{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\xi^2}H\right)},$$

где ξ играет роль волнового числа.
Тогда уравнение (19) перепишется в виде

$$\frac{d^2a_n}{dt^2}+\omega_n^2a_n=H_n(\xi)e^{-i\xi U}\ , \quad (20)$$

где $H_n(\xi)=\dfrac{P_n(\xi)\sqrt{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\xi^2}e^{-i\xi U}}{2L\sqrt{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\xi^2}+\rho_l\coth\left(\sqrt{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\xi^2}H\right)}$.

Начальные условия для уравнений (20) следуют из (12)

$$\frac{da_n}{dt}(\xi,0)=0,\quad a_n(\xi,0)=\frac{H_n(\xi)}{\omega_n^2(\xi)}. \quad (21)$$

Решение однородного дифференциального уравнения (20) имеет следующий вид $a_{n_0}=C_1e^{-i\omega_n t}+C_2e^{i\omega_n t}$, с соответствующим частным решением $a_{n_ч}=C_3e^{-i\xi Ut}$ для неоднородного уравнения. Подставляя частное решение в уравнение (20) определяем $C_3=\frac{H_n(\xi)}{\omega_n^2(\xi)-\xi^2U^2}$. Отсюда общее решение для (20) получаем в виде суммы решения однородного уравнения и частного решения, и с учетом начальных условий (21), получим

$$a_n=\frac{-H_nU\xi}{2\omega_n^2(\xi)(\omega_n-\xi U)}e^{-i\omega_n t}+\frac{H_nU\xi}{2\omega_n^2(\xi)(\omega_n+\xi U)}e^{i\omega_n t}+\frac{H_n}{\omega_n^2(\xi)-\xi^2U^2}e^{-i\xi Ut}.$$

Таким образом, решение уравнения (11) имеет следующий вид

$$w^F=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-H_nU\xi}{2\omega_n^2(\xi)(\omega_n-\xi U)}e^{-i\omega_n t}+\frac{H_nU\xi}{2\omega_n^2(\xi)(\omega_n+\xi U)}e^{i\omega_n t}+\frac{H_n}{\omega_n^2(\xi)-\xi^2U^2}e^{-i\xi Ut}\right]\cos\frac{\pi n y}{L}.$$

Решение получено в виде обратного преобразования Фурье

$$w(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}w^F(\xi,y,t)e^{i\xi x}d\xi. \quad (22)$$

В зависимости от скорости U слагаемые в (22) будут иметь особенность при $\omega_n=\xi U$. Данные интегралы необходимо аккуратно вычислять по методу, описанному в [3].

Библиографический список

1. Завьялова К.Н., Шишмарев К.А., Хабахпашева Т.И. Движение внешней нагрузки по битому льду в канале // Известия Алтайского Государственного Университета. – Барнаул, 2018. – 4 (102). – С.73–78.

2. Squire V., Hosking R., Kerr A., Langhorne P. Moving loads on ice // Kluwer Academic Publishers. – 1996.

3. Khabakhpasheva T. Shishmarev K., Korobkin A. Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Applied Ocean Research. – 2019. – 86. – p. 154–165.

УДК 519.6

О применении программного комплекса Abaqus к задачам о напряженном состоянии вокруг отверстий

Н.С. Поморов, А.В. Устюжанова
АлтГУ, г. Барнаул

В настоящее время существует большое количество программных продуктов, применяемых для численного моделирования задач механики деформируемого тела. В основе работы многих пакетов лежит метод конечных элементов. Одним из таких пакетов является программный комплекс SIMULIA Abaqus, предназначенный для многоцелевого междисциплинарного анализа [1–2]. Данный комплекс широко используется в самых различных сферах производства и в научно-исследовательской деятельности.

Abaqus имеет свободно распространяемую версию Abaqus Student Edition, которая включает в себя модули Abaqus/CAE, Abaqus/Standart, Abaqus/Explicit, полную документацию к программе и архив тестовых задач. Это позволяет использовать данный программный пакет в учебных целях и дает возможность студентам знакомиться с новыми достижениями в разработке комплекса. Ограничением версии Abaqus Student Edition является использование не более 1000 элементов и узлов для построения конечно-элементной модели.

Графическая оболочка Abaqus/CAE, служащая для моделирования, управления и мониторинга проводимых расчетов, анализа и визуализации полученных результатов, состоит из ряда модулей, каждый из которых содержит в себе ряд близких по значению действий.

Перечислим модули в той последовательности, в которой они были использованы в представленных ниже вычислительных расчетах.

Вначале с помощью модуля PART происходит создание геометрии деталей, задание опорных точек и систем координат.

В модуле PROPERTY определяются материалы и их свойства, задаются геометрические характеристики сечений стержневых элементов