УДК 517.9

Сингулярные пределы решений квазилинейных уравнений колмогоровского типа

С.А. Саженков
ИГиЛ СО РАН, НГУ, г. Новосибирск; Хэйлунцзянский университет, г. Харбин

Аннотация. Доклад посвящён изучению задачи Коши – Дирихле для квазилинейного ультра-параболического уравнения, включающего в себя две время-подобные переменные и нелинейный источник. Устанавливается однозначная разрешимость этой задачи в подходящих классах кинетических и энтропийных решений. Рассматривается случай, когда функция источника зависит от малого параметра и сходится при стремлении этого параметра к нулю к дельта-функции Дирака, описывающей импульсный источник. В этом случае проводится предельный переход от исходного уравнения к предельному импульсному уравнению.

1. Формулировка задачи. Пусть Ω – ограниченная область пространственных переменных $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ ($\partial\Omega \in C^2$). Пусть $t \in [0,T]$ и $s \in [0,S]$ – две переменные, подобные переменной времени. Здесь T и S – заданные положительные постоянные. Введём следующие обозначения множеств: $G_{T,S} \coloneqq \Omega \times (0,T) \times (0,S)$, $\Xi^1 \coloneqq \bar{\Omega} \times [0,S]$, $\Xi^2 \coloneqq \bar{\Omega} \times [0,T]$, $\Gamma_0 \coloneqq \bar{\Omega} \times [0,T] \times \{s=0\}$, $\Gamma_S \coloneqq \bar{\Omega} \times [0,T] \times \{s=S\}$ и $\Gamma_l \coloneqq \partial\Omega \times [0,T] \times [0,S]$.

Рассматривается следующая задача Коши-Дирихле.

Задача Π_γ. Требуется найти функцию $u: G_{T,S} \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющую квазилинейному ультра-параболическому уравнению колмогоровского типа

$$\partial_t u + \partial_s a(u) + \mathrm{div}_x \boldsymbol{\varphi}(u) = \Delta_x u + h_\gamma(\boldsymbol{x}, t, s, u), \ (\boldsymbol{x}, t, s) \in G_{T,S}, \tag{1a}$$

начальным данным по t

$$u|_{t=0} = u_0^{(1)}(\boldsymbol{x}, s), \ (\boldsymbol{x}, s) \in \Xi^1, \tag{1b}$$

начальным и финальным данным по s:

$$u|_{s=0} \approx u_0^{(2)}(\boldsymbol{x}, t), \ u|_{s=S} \approx u_S^{(2)}(\boldsymbol{x}, t), \ (\boldsymbol{x}, t) \in \Xi^2, \tag{1c}$$

и однородному краевому условию

$$u|_{\Gamma_l} = 0. \tag{1d}$$

В этой формулировке начальные и финальные данные $u_0^{(1)} \in \mathrm{C}^{2+\alpha}(\Xi^1)$, $u_0^2, u_S^2 \in \mathrm{C}^{2+\alpha}(\Xi^2)$ $(\alpha \in (0,1))$, функции нелинейной конвекции $a = a(u)$, $\varphi_1 = \varphi_1(u), \dots, \varphi_d = \varphi_d(u)$ и функция источника $h_\gamma = h_\gamma(\boldsymbol{x}, t, s, u)$ являются заданными и достаточно гладкими. Функция h_γ удовлетворяет дополнительному условию на рост по u, гарантирующему выполнение стандартного принципа максимума для решения u (если таковое существует). Относительно функции a допускается, что она может быть немонотонной, то есть процесс эволюции в направлении время-подобной координаты s может быть обратим. Функция a удовлетворяет специальному *условию истинной нелинейности*:

$$\text{множество } \{\lambda \in \mathbb{R}\colon\ \xi_1 + a'(\lambda)\xi_2 = 0\} \quad \text{при каждом фиксированном } (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{S}^1 \text{ имеет пустую внутренность.}$$

(Через $\mathbb{S}^1$ обозначается единичная окружность в $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат.)

2. Кинетические и энтропийные решения задачи Π_γ. Технически, условие истинной нелинейности гарантирует, что семейство приближённых решений $\{u_{\gamma\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ задачи Π_γ относительно компактно в $L^1(G_{T,S})$ и что существуют сильные в пространстве $L^1(\Xi^2)$ следы (скажем, $u_0^{tr,(2)}$ и $u_S^{tr,(2)}$) энтропийного или кинетического решения u уравнения (1a) на Γ_0 и Γ_S, соответственно. Это условие является краеугольным камнем для формулировки корректных понятий кинетического и энтропийного решений задачи Π_γ. Обоснование существования и единственности энтропийных и кинетических решений является первым основным результатом в настоящем докладе.

Кинетическое уравнение, ассоциированное с (1a), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\partial_t\chi(\lambda;u) + a'(\lambda)\partial_s\chi(\lambda;u) + \boldsymbol{\varphi}'(\lambda)\cdot\nabla_x\chi(\lambda;u)&\\ +h_\gamma(\boldsymbol{x},t,s,\lambda)\partial_\lambda\chi(\lambda;u) - \Delta_x\chi(\lambda;u) &=\\ = \delta_{(\lambda=0)}h_\gamma(\boldsymbol{x},t,s,\lambda) + \partial_\lambda\big(m + \delta_{(\lambda=u)}|\nabla_x u|^2\big),\ (\boldsymbol{x},t,s,\lambda) &\in G_{T,S}\times\mathbb{R}_\lambda,\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\chi(\lambda;u) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 < \lambda < u, \\ -1 \text{ при } u < \lambda < 0, \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$m \in \mathcal{M}^+(G_{T,S} \times \mathbb{R}_\lambda)$, $\operatorname{supp} m \subset G_{T,S} \times [-M, M]$, $M = \|u\|_{L^\infty(G_{T,S})} < +\infty$ и $\delta_{(\lambda=0)}$ и $\delta_{(\lambda=u)}$ – меры Дирака, сосредоточенные в точках $\lambda = 0$ и $\lambda = u(\boldsymbol{x}, t, s)$, соответственно. В уравнении (2) и далее, $\lambda \in \mathbb{R}$ – это дополнительная независимая кинетическая переменная.

Легко проверить, что в смысле распределений уравнение (2) эквивалентно семейству *энтропийных неравенств*

$$\partial_t \eta(u) + \partial_s q_a(u) + \operatorname{div}_x \left(\boldsymbol{q_\varphi} - \nabla_x \eta(u) \right) - h_\gamma(\boldsymbol{x}, t, s, u)\eta'(u) \leq \\ \leq -\eta''(u)|\nabla_x u|^2, \qquad (3)$$

в которых $(\eta, q_a, \boldsymbol{q_\varphi})$ – это всевозможные *выпуклые энтропийные тройки*: $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ – произвольная выпуклая функция, $q_a'(z) = a'(z)\eta'(z)$, $\boldsymbol{q}'_{\boldsymbol{\varphi}}(z) = \boldsymbol{\varphi}'(z)\eta'(z)$. В свою очередь, неравенство (4) сводится к уравнению (1a), если положить $\eta(u) = \pm u$.

В кинетической и энтропийной формулировках задачи Π_γ уравнение (2) и неравенства (3) снабжаются соответствующими наборами кинетических и энтропийных краевых условий. Заметим, что знак отношения $\approx$ в (1c) означает, что предписанные значения $u_0^{(2)}$ и $u_S^{(2)}$ могут не совпадать с существующими следами $u_0^{tr,(2)}$ и $u_S^{tr,(2)}$ на некоторых частях множеств Γ_0 и Γ_S, соответственно. То обстоятельство, становится ли $\approx$ знаком равенства (=), или нет, определяется *апостериори*, то есть после того, как решение u уравнения (2) (или, эквивалентно, семейства неравенств (3)) каким-либо способом сконструировано. Эта особенность ведёт к достаточно нестандартным краевым условиям в кинетической и энтропийной формулировках. В настоящей работе эти условия конструируются в основном следуя идее из [1].

3. Сингулярный переход к импульсному уравнению. Второй основной результат в настоящем докладе связан с задачей определения сингулярного предела семейства решений задачи Π_γ в случае, когда индекс γ, который был «немым» индексом в пп. 1 и 2, получает смысл малого положительного параметра, так что гладкая функция источника h_γ теперь «сжимается в точку» – обращается в дельта-функцию Дирака при $\gamma \to 0+$:

$$h_\gamma \underset{\gamma \to 0+}{\longrightarrow} \delta_{(t=\tau)}\beta \quad \text{сильно в} \quad C_{weak}(\Xi^1 \times \mathbb{R}_\lambda; \mathcal{M}[0, T]), \qquad (5)$$

где $\beta = \beta(\boldsymbol{x}, s, \lambda)$ – заданная гладкая функция, $\tau \in (0, T)$ – фиксированный момент времени и $\delta_{(t=\tau)}$ – дельта-функция Дирака на $[0, T]$, сконцентрированная в точке $t = \tau$.

Мы устанавливаем, что существует предельная функция

$$u_* \in L^\infty(G_{T,S}) \cap L^2((0,T) \times (0,S); W_2^1(\Omega))$$

семейства $\{u_\gamma\}_{\gamma>0}$ решений задачи Π_γ при $\gamma \to 0+$, такая, что u_* служит решением системы, состоящей из импульсного дифференциального уравнения вида (1a) с мгновенным источником $\delta_{(t=\tau)}\beta$ на месте h_γ и краевых условий (1b)-(1d). Отметим, что импульсное уравнение может быть эквивалентно записано в виде системы ультра-параболического уравнения

$$\partial_t u + \partial_s a(u) + \mathrm{div}_x \boldsymbol{\varphi}(u) = \Delta_x u, \ (\boldsymbol{x}, t, s) \in G_{T,S} \setminus \{t = T\}, \tag{4a}$$

и импульсного условия

$$u(\boldsymbol{x}, \tau + 0, s) = u(\boldsymbol{x}, \tau - 0, s) + \beta\big(\boldsymbol{x}, s, u(\boldsymbol{x}, \tau - 0, s)\big), \ (\boldsymbol{x}, s) \in \Xi^1. \tag{4b}$$

Импульсные уравнения вида (4a)-(4b) могут описывать, в частности, перенос тепла в сплошных средах при наличии ударных волн. При этом учитывается излучение тепла на фронте ударной волны, а сама ударная волна движется в направлении $\boldsymbol{e}_s$ – стандартного базисного вектора декартовой системы координат пространства физических позиций $\mathbb{R}^{d+1}_{x,s}$ [2].

Примечания. Настоящее исследование было выполнено совместно с Иваном Владимировичем Кузнецовым (Новосибирский государственный университет и Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН), которому я весьма признателен за сотрудничество. Некоторые частичные результаты исследования можно найти в совместных с И.В. Кузнецовым работах [3,4].

Работа поддержана Министерством науки и ВО (код проекта III.22.4.2) и РФФИ (грант № 18-01-00649).

Библиографический список

1. Otto F. Initial-boundary value problem for a scalar conservation law // C. R. Acad. Sci. Paris Ser I Math. – 1996. – Vol. 322. – P. 729–734.

2. Zel'dovich Y.B. and Raizer Y.P. Shock waves and radiation // Annual Rev. Fluid Mech. – 1969. – Vol. 1. – P. 385–412.

3. Kuznetsov I.V. and Sazhenkov S.A. Quasi-solutions of genuinely nonlinear forward-backward ultra-parabolic equations // J. Phys.: Conf. Ser. – 2017. – Vol. 894. – No. 012046. – P. 1–7.

4. Kuznetsov I.V. and Sazhenkov S.A. Genuinely nonlinear impulsive ultra-parabolic equations and convective heat transfer on a shock wave front // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. – 2018. – Vol. 193. – No. 012037. – P. 1–7.