3. Papin A.A., Tokareva M.A. Correctness of the initial-boundary problem of the compressible fluid filtration in a viscous porous medium // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 894. № 1. 012070 p.
4. Papin A.A., Tokareva M.A. On local solvability of the system of the equations of one dimensional motion of magma // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2017. Vol. 10. № 3. 385–395 pp.

**УДК 517.947**

## Асимптотика решения второй начально-краевой задачи для системы Соболева при большом времени

***С.И. Янов***
*АлтГПУ, г. Барнаул*

Исследуется поведение решения второй начально-краевой задачи для системы С.Л. Соболева [1]:

$$V_t - [V \times \omega] + gradP = 0$$
$$divV = 0, \tag{1}$$
$$V\big|_{t=0} = 0,\ P_z|_{z=0} = g(t, y'),\ \ y' \in R^2,\ \omega = (0,0,1).$$

Ранее асимптотика решений различных задач для системы (1) исследовалась в работах С.Л. Соболева [1], В.Н. Масленниковой [2], С.В. Успенского, Г.В. Демиденко [3], С.В. Успенского, Е.Н. Васильевой [4-5], С.И. Янова [5].

Асимптотика решения второй краевой задачи для уравнения Соболева в работах [6-7], там было доказано, что решение существует и единственно [6] § 3.2 теорема 3.3, и при условии $\int_0^t g(\tau, x')d\tau = O(t^{-2-\alpha})$, когда $t \to \infty$, $\alpha \ge 0$, что $P = O(t^{-2/5})$, [7] § 1.6 Теорема 3.1. В работе [8] была получена асимптотика решения задачи (1). Настоящая работа улучшает результаты работы [8]. Доказана следующая теорема.

**Теорема.** *Пусть $g(t, x') \in C_0^\infty(R^2)$ при каждом фиксированном t и имеет волновой характер, то есть $g(t, x') = D_t h(t, x')$, где $h(t, x')$ – некоторая финитная трижды непрерывно дифференцируемая функция по времени t с носителем в интервале ( t ‘, t’’), 0< t ‘ < t’’ . Обозначим $\ddot{x} = (x, y, z)$. Тогда имеют место следующие асимптотические выражения при фиксированном $z > 0$ и $t \to \infty$ :*

$$V_1(t,\ddot{x}) = V_2(t,\ddot{x}) = P((t,\ddot{x}) = O(t^{-2/5}), V_3(t,\ddot{x}) = O(t^{-1/3})\,.$$

**Доказательство.** С.Л. Соболевым доказано, что компонента давления Р решения задачи (1) удовлетворяет задаче

$$\Delta P_{tt} + P_{zz} = 0, P_z\,|_{z=0} = g(t,x') \tag{2}$$

Также хорошо известно, [6] § 3.2, что решение задачи (2) существует и единственно, причем имеет место представление

$$P = -\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\frac{1}{r}D_t\int_0^t J_0(\frac{\rho}{r}(t-\tau)g(\tau,u')d\tau du' -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\frac{1}{r}\int_0^t\int_0^{t-\tau} J_0(\frac{\rho}{r}\nu)d\nu g(\tau,u')d\tau du',$$

где $J_6(\nu)$ – функция Бесселя нулевого порядка, $\rho = ((x-u_1)^2 + (y-u_2)^2)^{1/2}$, $r = (z^2+\rho^2)^{1/2}$.

Поведение полученных интегралов при $t\to\infty$ устанавливается с помощью следующей леммы.

**Лемма.** *Если выполнены условия теоремы, то при* $t\to\infty$

$$I = -\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\frac{1}{r}\int_0^t J_0(\frac{\rho}{r}(t-\tau)g(\tau,x'+w')d\tau dw' = O(t^{-2/5})\,.$$

**Доказательство.** $I =$ (при больших $t > t''$) =

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\frac{1}{r}\int_{t'}^{t''} J_0(\frac{\rho}{r}(t-\tau)g(\tau,x'+w')d\tau dw' =$$

переходя в полярную систему координат, будем иметь

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{(t-t'')^{-1/5}}\frac{\rho}{r}\int_{t'}^{t''} J_0(\frac{\rho}{r}(t-\tau)g d\tau d\rho d\phi -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{(t-t'')^{-1/5}}^{R}\frac{\rho}{r}\int_{t'}^{t''} J_0(\frac{\rho}{r}(t-\tau))g d\tau d\rho d\phi = I_1 + I_2\,.$$

Имеем, $|J_1| \le C_1(t-t'')^{-2/5}$. Оценим $I_2$. При больших $t > t''$, $t' < \tau < t''$ выполняется

$$\frac{\rho}{r}(t-\tau) \ge \frac{1}{r}(t-t'')(t-t'')^{-1/5} \ge (t-t'')^{-4/5}/(x_3^2+R^2)^{1/2},$$

поэтому из асимптотического выражения для $J_0(x)$, получим $|I_2| \le C(t-t'')^{-2/5}$ при $t\to\infty$. Лемма доказана.

Асимптотические выражения для компонент скорости получаются из представлений [7] § 2. 6 (2. 37) Теорема доказана.

**Библиографический список**

1. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – Т. 18. - № 1. – С. 3–50.

2. Масленникова В.Н. Оценки в $L_p$ и асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для системы Соболева // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1968. – Т. 103. – С. 117–141.

3. Успенский С.В., Демиденко Г.В. О поведении на бесконечности решений одной задачи С.Л. Соболева // Сиб. мат. журн. – 1983. – Т. 24. – № 5. – С. 199–210.

4. Успенский С.В., Васильева Е.Н. Качественное исследование решения одной задачи С.Л. Соболева при $t \to \infty$ //Тр. МИАН. – 1995. – Т. 210. – С. 274–283.

5. Успенский С.В., Васильева Е.Н., Янов С.И. О дифференциальных свойствах решения первой смешанной краевой задачи для системы Соболева //Тр. МИАН. – 1999. – Т. 227. – С. 311–319.

6. Янов С.И. Пространства типа Соболева-Винера и асимптотические свойства их функций. – Барнаул: изд-во БГПУ. 2007. – 113 с.

7. Янов С.И. Приложения пространств типа Соболева-Винера.– Барнаул: изд-во АлтГПА. – 2012. – 91 с.

8. Янов С.И. Асимптотика решения второй начально-краевой задачи для системы Соболева // Сборник трудов Всероссийской конференции по математике «МАК–2018». – Барнаул: изд-во АлтГУ, 2018. С. 117–118.