2. Варенина Л.П. Геймификация в образовании // Историческая и социально-образовательная мысль. – 2014. – Том 6. – № 6. – Часть 2. – С. 314–317.

2. Саженкова Е.В. Интерактивные формы обучения высшей математике как средство активизации учебно-познавательной деятельности студентов // Сборник научных статей международной школы-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае». – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2015.

УДК 372.851

О конструктивных вопросах подготовки студентов к математическим соревнованиям

А.Н. Саженков, Т.В. Саженкова
АлтГУ, г. Барнаул

Задания студенческих математических олимпиад и конкурсов ориентировано на знание стандартных объёмов математических курсов, но сами задачи оригинальны и разнообразны по сложности. На соревнованиях особенно успешны студенты, способные осуществлять поиск идеи решения задачи, имеющие опыт применения различных подходов к анализу условий задачи и математических инструментов (методов) решения поставленных вопросов.

Одним из отправных пунктов при подготовке студентов к математическим соревнованиям становится, как правило, решение задач прошлых олимпиад и конкурсов [1-5].

В этом направлении происходит обращение к олимпиадным задачам, наработанный банк которых уже достаточно велик, и они, конечно, интересны и содержательны. Однако простое знакомство с отдельно взятыми задачами недостаточно эффективно. Поэтому в основу подготовки ложится работа над решением и обсуждением задач, в процессе которой происходит обращение к важным математическим идеям и теориям, то есть происходит фундаментальная подготовка участников олимпиадного движения. Объединение задач в тематические комплексы позволяет продуктивно закрепить идеи и алгоритмы, приводящие к успеху в их исследовании.

Приведём несколько задач с решениями [2] по следующей тематике.

Функциональные уравнения и соображения непрерывности:

1. Найдите функцию, отображающую действительные числа в себя, такую, что выполняется соответствующее тождество для любых чисел x и y: $f(x)\cdot f(y)=f(x-y)$.

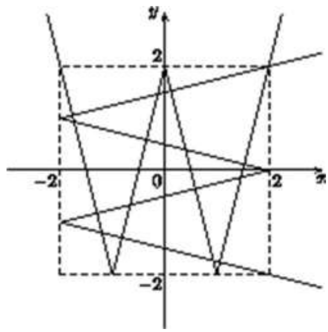
Подставим в уравнение $x = y = 0$. Получим соотношение $f(0)^2 = f(0)$. Из него следует, что $f(0) = 0$ или $f(0) = 1$.

Рассмотрим случай $f(0) = 0$. Подставим в уравнение $x = y$. Получим соотношение $f(x)^2 = 0$ и $f \equiv 0$.

Рассмотрим случай $f(0) = 1$. Подставим в уравнение $x = y$. Получим соотношение $f(x)^2 = 1$. Из него следует, что $f(x) = \pm 1$. Подставим в уравнение $y = \frac{x}{2}$ и получим соотношение $f(x) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$. После сокращения на $f\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ получаем $f \equiv 1$. Ответ: $f \equiv 0$ и $f \equiv 1$.

2. Дана функция $f(x) = |4 - 4|x|| - 2$. Сколько решений имеет уравнение $f(f(x)) = x$?

Уравнение равносильно системе $y = f(x)$, $x = f(y)$. Систему решаем графически.



Ответ: 16.

3. Функция $f : R \to R$ непрерывна и такова, что $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$ для любых x и $f(1000) = 999$. Найдите $f(500)$.

Решение. $1 = f(1000) \cdot f(f(1000)) = 999 \cdot f(999)$. Следовательно, функция принимает значения $\frac{1}{999}$ и 999, а поскольку, $f(999) = \frac{1}{999} < 500 < 999$ она принимает и значение 500. Пусть

$f(a)=500$. Тогда получаем, что $1=f(a)\cdot f(f(a))=500\cdot f(500)$ и $f(500)=\frac{1}{500}$.

Ответ: $f(500)=\frac{1}{500}$.

4. Найдите все комплексные корни многочлена:

$$P(x)=\sum_{n=1}^{n=2010}(1005-|1005-n|)x^n .$$

Решение основывается на следующем соображении:

$$1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}+(n+1)x^n+nx^{n+1}+...+2x^{2n-1}+x^{2n}=\left(1+x+x^2+...+x^n\right)^2$$

Итак, $P(x)=\sum_{n=1}^{n=2010}(1005-|1005-n|)x^n=x\left(\sum_{n=1}^{1004}x^n\right)^2=x\left(\frac{x^{1005}-1}{x-1}\right)^2$ и комплексные корни многочлена это первообразные корни 1005 степени из 1. Ответ: 0 и $e^{\frac{2\pi ik}{1005}}$ $k=1, 2, \ldots, 1004$ (кратности 2).

Библиографический список

1. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. О некоторых аспектах подготовки к студенческим математическим соревнованиям // Сборник трудов тринадцатой региональной конференции по математике МАК 2010. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2010.
2. Саженков А.Н., Саженкова Т.В., Плотникова Е.А. Математический анализ в задачах студенческих олимпиад. Практикум. Часть 1. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2011.
3. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. О математическом содержании студенческого олимпиадного факультатива // Сборник трудов тринадцатой региональной конференции по математике МАК 2011
4. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Последовательности в задачах студенческих математических олимпиад. // Сборник научных статей международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае». – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2018.
5. Саженков А.Н., Оскорбин Д.Н., Саженкова Т.В. Классические олимпиадные темы и математические задачи высокого уровня сложности: учебное пособие. – Барнаул: Изд-во АлтГУ. – 2019.