УДК 579.64

Исследование дискретных и непрерывных моделей, основанных на отображении Рикера

Л. Маденкызы[1,2], А.Г. Петрова[2]
[1]ВКГУ им. С.Аманжолова, г.Усть-Каменогорск;
[2]АГУ, г. Барнаул

В работе изучаются нелинейные динамические системы, основанные на отображении Рикера:

$$N_{t+1} = N_t \,\mathrm{e}^{r(1-N_t)}, \qquad (1)$$

где N_t – характеристика численности популяции, r – положительный параметр. Это отображение было предложено для моделирования динамики поколений популяций рыб [1]. Эта модель хорошо изучена и анализ динамики этой модели приводит к следующему результату:
При $0 < r \le 2$ популяция стремится с возрастанием времени к значению $N_t = 1$; при $2 < r \le 2{,}692$ возникает периодический цикл размера популяции, а при $r > 2{,}692$ поведение модели характеризуется как динамических хаос. Таким образом, эта модель близка к модели дискретной логистической модели, она имеет последовательность бифуркационных значений параметра, для которых справедлив предел, приводящий к константе Фейгенбаума. Отметим, что так же, как и в случае логистического уравнения, непрерывный аналог этой модели демонстрирует монотонное стремление функции к нетривиальной неподвижной точке при увеличении времени.

В работе [2] приведена библиография наиболее убедительных результатов анализа модели Рикера. Там же отмечается, что в ряде случаев модельное описание удавалось существенно улучшить, если ввести в уравнения эффект запаздывания:

$$N_{t+1} = N_t \,\mathrm{e}^{r(1-N_{t-1})}.$$

Перепишем дискретное уравнение (2) в виде эквивалентной системы

$$x_{t+1} = x_t \exp(r(1-y_t)), \quad y_{t+1} = x_t. \qquad (2)$$

Регуляция с запаздыванием возникает в природных популяциях в результате межвидового взаимодействия или же в случаях, когда высокая плотность популяции негативно сказывается на воспроизводстве следующего поколения. Анализ динамики в дискретной модели с запаздыванием приводит к выводу о возникновении бифуркации Неймарка-Сакера.

В данной работе с применением вычислительных инструментальных средств проводится сравнительный анализ динамики дискретных моделей (1) и (2).

Наряду с дискретными моделями в приложениях широкое применение находят модели с непрерывным временем [3]. Такие модели успешно работают в популяционной динамике (классические модели хищник-жертва, конкуренция-сосуществование), не говоря уже о моделях химической кинетики, как, например, непрерывной проточный процесс получения биогаза из растительного сырья [4]. Модели, выражаемые в дифференциальных уравнениях, демонстрируют сложную динамику, отличную от их дискетных аналогов и сравнение их динамики представляет определенных интерес.

В данной работе рассматривается аналог модели (2) в непрерывном времени:

$$\dot{x} = x\left(e^{r(1-y)} - 1\right), \quad \dot{y} = x - y. \tag{3}$$

Модель (3) имеет устойчивую нетривиальную неподвижную точку при любом положительном значении параметра и может найти применение при моделировании взаимоотношений взаимодействия двух популяций типа «паразит – хозяин». Предлагается также модифицированная модель с непрерывным временем, в которой возникает бифуркация Хопфа.

Библиографический список

1. Ricker, W. E. Stock and Recruitment // Journal of the Fisheries Research Board of Canada. – 1954. – Т.11 – № 5. – С. 559–623.

2. Неверова Г.П., Фрисман Е.Я. Математическое моделирование динамики локальных однородных популяций с учетом эффектов запаздывания // Математическая биология и биоинформатика. –2015. – Т. 10 – № 2 – С. 309–324.

3. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2005. 320 с.

4. Баюк А.А., Петрова А.Г., Хворова Л.А. Однокомпонентная модель производства биогаза из растительного сырья // В сборнике Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и техники. Сборник статей международной конференции: электронный ресурс. Отв. Редактор: Родионов Е.Д. 2018. С. 570–574.