

Результаты данной работы могут быть использованы для поддержки принятия решений, направленных на улучшение экологической ситуации в городах, за счёт сокращения выбросов загрязняющих веществ от автотранспорта.

Библиографический список

1. Мадияров М.Н., Темирбеков Н.М., Абдолдина Ф.Н. Экологический мониторинг воздействия автотранспорта на атмосферу // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Серия: Математика, механика, информатика. 2004. – №3(42). – Ч. I. – С. 122–125.

2. Пененко В.В., Алоян А.Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. – Новосибирск: Наука, 1985. –254 с.

УДК 574.34

Исследование одного класса моделей социальной кооперации с помощью репликаторных уравнений эволюционной динамики

А.Г. Топаж

ООО «Бюро Гиперборея», г. Санкт-Петербург

Одной из наиболее интересных и изучаемых в последнее время проблем в математической теории эволюции является проблема устойчивости различных симбиотических взаимодействий (как внутривидовых, так и межвидовых) к проявлению возможных мошеннических или паразитических стратегий поведения. Действительно стабильное и долговременное функционирование шаблонов поведения, основанных на взаимном сотрудничестве, возможно только в том случае, если эти шаблоны образуют *эволюционно-стабильную стратегию*, иными словами внедрение в подобное гармоничное сообщество организмов с альтернативными установками не может дать им преимуществ в смысле естественного отбора [1]. В общем случае, приспособленность каждого варианта стратегии поведения зависит не только от самого этого варианта и внешней среды, но и от того, каким поведением обладают другие особи в популяции, с которыми данный организм вступает в социальные отношения на протяжении своей жизни. Таким образом, задача нахождения наилучшей стратегии поведения допускает постановку в терминах теории игр. При выполнении ряда условий (установившаяся и достаточно большая суммарная численность популяции, равновероят-

ное скрещивание, отсутствие изменчивости при наследовании и т.д.) динамика распределения любого признака внутри популяции под прессом естественного отбора подчиняется классическому репликаторному уравнению

$$\dot{f}_i = f_i \cdot (\varphi_i - \bar{\varphi}), \quad (1)$$

где f_i – частота i -того значения признака или i -той стратегии в популяции, φ_i – приспособленность организмов, обладающих i -тым признаком, $\bar{\varphi}$ – средняя приспособленность организмов в популяции [2]. Для непрерывной постановки, то есть в случае, когда пространство возможных значений определяющего признака непрерывно (дифференциальные игры), репликаторное уравнение (1) переписывается в виде:

$$\dot{f}(x) = f(x) \cdot (\varphi_x - \bar{\varphi}); \quad \bar{\varphi} = \int_x f(x) \cdot \varphi_x \cdot dx. \quad (2)$$

В общем случае приспособленность конкретного клона определяется всем текущим распределением, то есть $\varphi_x = \varphi(x, f(t))$, $t \in X$.

Решение интегро-дифференциального уравнения (2) определяет эволюционную динамику структуры рассматриваемого сообщества. В частности, устойчивые неподвижные точки отвечают предельным стационарным формам, к которым стремится распределение исследуемого признака в популяции на больших временах.

Схожие подходы можно применить и к исследованию устойчивости различных форм коллективного (социального) поведения людей. При этом понятия биологической эволюции (приспособленность, наследование и естественный отбор) оказываются практически без изменений приложимы к явлениям эволюции культурной. В частности, уязвимость взаимовыгодных, но нестабильных социальных институций к внедрению паразитических, эгоистических стратегий поведения находит свое яркое отражение в феномене «трагедии общин» [3]. Его суть состоит в том, что свободный доступ к ресурсу общего пользования (пастбище, водоем и т.д.) рано или поздно приводит к появлению и распространению сверхпотребителей. Это на короткий период времени обеспечивает им доминирование в конкуренции с пользователями, соглашающимися на разумное самоограничение, однако в долгосрочной перспективе приводит к истощению общего ресурса и, в конечном счете, к общему краху. Классической постановкой в терминах теории дифференциальных игр, наглядно демонстрирующей проявление «трагедии общин» в экономике, является игра в «общественное благо» (public goods game). Как и в гораздо более известной «дилемме заключенного», несмотря на наличие очевидной и разумной взаимовыгодной линии кооперативного поведения, единственно устойчивой точкой (равновесием Нэша или

эволюционно-стабильной стратегией) в этой игре оказывается отказ от какого-либо сотрудничества и, в широком смысле, прогресса.

Интуитивно объяснимое нежелание исследователей безусловно принимать этот вывод, противоречащий базовым этическим императивам, привел к появлению большого количества работ, в которых рассматриваются различные механизмы (санкции по отношению к суперпотребителям или поощрение альтруистов), позволяющие преодолеть «трагедию общин» [4]. Вместе с тем, и в биологических [5] и в социальных приложениях можно выделить отдельный класс моделей, для которых в достаточно широком спектре параметров предельные устойчивые решения соответствуют кооперативным шаблонам поведения, то есть «трагедия общин» преодолевается естественным образом. Их общность заключается в конкретной последовательности величин выигрышей для условных «кооперативной» и «эгоистичной» стратегий с точки зрения отдельного игрока. Пояснение приводится в таблице 1, где приведены соответствующие последовательности выигрышей для стратегий условного «кооператора» (*c-cooperator*) и «отказника» (*d-defector*) и порождаемые ими устойчивые решения (ЭСС) для нескольких известных и рассмотренных ниже оригинальных эволюционных игр.

Таблица 1 – Эволюционные игры (описание и вид решений)

№	Вид игры	Порядок выигрышей	ЭСС		
1	Дилемма заключенного	dc>cc>dd>cd	D		
2	«Общественное благо»	dc>cc>dd>cd	D		
3	«Ястребы-голуби»	dc>cc>cd>dd	mixed		
4	«Реновация общего ресурса» (дискретная постановка)	cc>dc=dd>cd	D	c	
5	«Реновация общего ресурса» (непрерывная постановка)	cc>dc=dd>cd	d	C	set of mixed
6	«Социальные амебы»	cc>dc>dd>cd			

В моделях, где наиболее выигрышной комбинацией оказывается роль эгоиста среди кооператоров, устойчивыми в эволюционном смысле решениями оказываются либо популяция, состоящая из одних отказников, либо популяция, в которой отказники и кооператоры присутствуют в определенной пропорции (игра «ястребы»-«голуби»). В случае же, если взаимное согласие является наиболее выгодным сочетанием, ситуация меняется. Действительно, нетрудно показать, что здесь существуют по крайней мере два устойчивых решения: популяция одних эгоистов и гармоничное общество кооператоров. Первое решение очевидно – появление в популяции индивидуалистов одного кооператора никак не может способствовать его жизненному успеху и, соответ-

ственно, закреплению этого шаблона поведения под прессом естественного отбора ($cd < dd$). Но справедлив и зеркальный вывод: в обществе разумных кооператоров не может иметь долговременный успех стратегия единичного отказника. Поскольку отказ от кооперации, безусловно, принесет ему сравнительный выигрыш по сравнению с теми, кто вступит с ним во взаимодействие ($dc > cd$), но зато в отношении всех других индивидуумов, объединяющихся в агломерации между собой и повсеместно практикующими взаимовыгодное сотрудничество, он окажется в проигрыше ($dc < cc$). В результате интегральный эффект асоциального поведения окажется отрицательным и соответствующий шаблон элиминируется из популяции. Этот случай ярко демонстрирует действие группового отбора. Приведем примеры исследования конкретных постановок, отвечающих данному условию.

Реновация общего ресурса (дискретный случай). Рассматривается задача совместного владения и управления конечной группой независимых персон неким общим, физически неразделяемым ресурсом. В качестве примера можно привести жителей многоквартирного дома, соседей по этажу или людей, живущих друг над другом и пользующихся одним стояком водоснабжения. Пусть размер каждой такой элементарной группы составляет N индивидуумов. Встает вопрос о том, чтобы провести некую модификацию или реновацию этого общего ресурса, что должно повысить качество пользования им для всех потребителей. Каждый совладелец выбирает одну из двух стратегий поведения – участвовать в предлагаемом общем проекте или отказаться от него. Цена за участие в проекте составляет X условных единиц некомпенсируемых затрат. Выгода каждому индивидууму от успешной реализации реновационного проекта составляет Y условных единиц (для разумности проекта Y считается большим, чем X). Принципиальным является то, что для того, чтобы проект был реализован, с ним должны согласиться все без исключения владельцы и достаточно одного, отказавшегося от сотрудничества, чтобы он оказался невозможным.

Структура модельной популяции в любой момент времени описывается единственным параметром – долей «кооператоров» f_1 . Средний выигрыш (в первом приближении принимаемый равным приспособленности) кооператора φ_1 равен:

$$\varphi_1 = (Y - X) \cdot f_1^{N-1} - X \cdot (1 - f_1^{N-1}), \quad (3)$$

а средний выигрыш «отказника» не зависит ни от чего и тождественно равен нулю. Репликаторное уравнение динамики структуры популяции (1) для данного случая записывается в виде:

$$\begin{cases} f_0 = f_0 \cdot Z \\ f_1 = -f_0 \cdot Z \end{cases}, \quad Z = -(Y - X) \cdot f_1^N + X \cdot f_1 \cdot (1 - f_1^{N-1}). \quad (4)$$

Система уравнений (4) имеет три особые точки, две из которых соответствуют вырожденным популяциям, состоящим соответственно только из «кооператоров» и только из «отказников» и представляют собой устойчивые фокусы, а третья отвечает смешанной популяции с определенной долей представителей обоих типов поведения, но является неустойчивым фокусом. Одновременно эта критическая величина $p_1 = (X/Y)^{1/N-1}$ представляет собой точку разделения областей притяжения двух вырожденных стационарных режимов. И можно поставить вопрос о том, какое количество «немотивированных отказников» или личностей асоциального поведения может выдержать описанная система группового пользования в зависимости от среднего объема группы, чтобы сохранить возможность развития, улучшения и прогресса. Видно, что эта величина убывает по показательному закону. Отсюда можно сформулировать общий вывод о том, что существенным и необходимым механизмом повышения динамичности и мобильности социальных систем является стратегия постоянного дробления искусственных агломераций коллективного пользования. Ибо «ад – это другие». Сделанное заключение коррелирует, например, с мнением Гаррета Хардина, который на основании математических моделей, описывающих «трагедию общин», и анализа экономической практики считал, что самый важный вывод, который следует осознать человечеству — это необходимость отказаться от принципа ресурсов общего пользования в воспроизводстве [3].

Реновация общего ресурса (непрерывный случай).

Естественным расширением рассмотренного выше примера выступает та же задача в непрерывной постановке. Условие получения общего блага по-прежнему выражается пороговой функцией от суммарных вложенных усилий, но вклад каждого партнера теперь выражается непрерывной величиной x – долей от имеющегося у него объема средств (для простоты можно принять, что эта величина у всех игроков одинакова и равна единице), которую он согласен пожертвовать на реновацию общего ресурса. Тогда, если объем коллектива равен двум, то есть при рассмотрении простейших парных взаимодействий, величина приспособленности конкретной стратегии для текущего распределения потенциальных партнеров выражается как

$$\varphi(x) = -x + Y \cdot \int_{X-x}^1 f(t) \cdot dt. \quad (5)$$

Подставив выражение (5) в основное репликаторное уравнение (2) можно провести численный анализ получившейся динамической системы в терминах ее стремления к тем или иным устойчивым стационарным распределениям. Результат оказывается достаточно нетривиальным. Как и для дискретного случая, большинство начальных распределений сходится к одному из вырожденных случаев – гомогенной популяции из одних «отказников» ($f(x) = \delta(x)$) или из разумных кооператоров ($f(x) = \delta(x - 0.5 \cdot X)$). Но наряду с этим система порождает также и бесконечное множество других устойчивых решений вида:

$$f(x) = p_a \cdot \delta(x - x_a) + p_b \cdot \delta(x - x_b) \quad (6)$$

$$p_b = 1 - p_a, \quad x_b = X - x_a, \quad -p_a \cdot x_a + p_b \cdot (Y - x_a) = Y - x_b$$

со своими областями притяжения в функциональном пространстве начальных распределений (см. рис. 1). Иными словами, полное множество возможных решений содержит в себе смешанные популяции, которые состоят одновременно из «сверхкооператоров» и частичных «отказников», при этом увеличенный вклад в «общий котёл» первых нивелирует паразитическое, но рискованное поведение вторых. И, что важно, каждый такой вариант распределения социальных ответственностей (конкретная реализация из *evolutionary stable set*) обладает локальной устойчивостью. Для более сложных постановок (коллективы совместных пользователей более чем из двух персон) показывается существование еще более интересных форм решений, но предельное устойчивое распределение всегда оказывается суммой дельта-функций, то есть выполняется теорема А.Н. Горбаня о стремлении к нулю носителя предельного распределения для динамических систем с наследственностью [6].

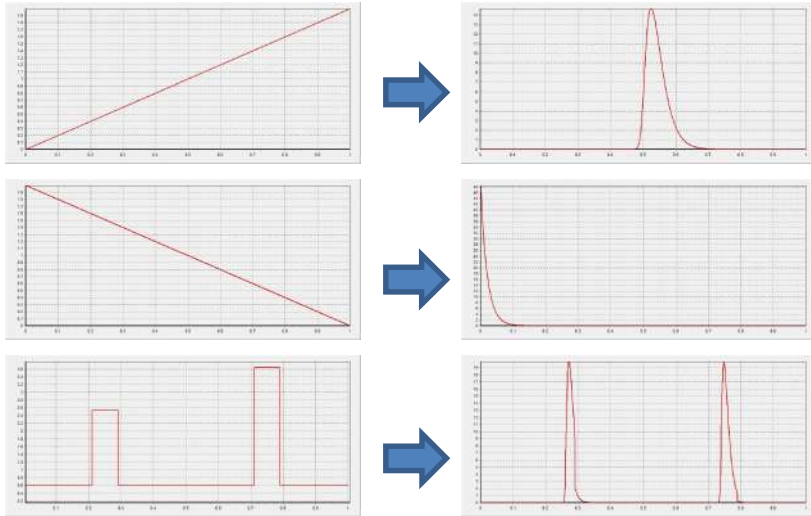


Рисунок 1 – Динамика изменения распределения параметра кооперативности по популяции (слева – начальное распределение; справа – состояние после 1000 шагов алгоритма численного интегрирования репликаторного уравнения)

Задача о «социальных амебах». Основная идея описанной выше задачи кооперативного взаимодействия – возможность вложить долю личного ресурса в общий пул, одинаково повышающий приспособленность для всех участников группы. Этот же принцип положен в основу описания классической модели социального поведения «живой слизи» – группы разнородных одноклеточных организмов, формирующих грибовидные пространственные структуры для увеличения радиуса распространения своих спор [7]. При этом организмы, оказавшиеся в «ножке» гриба, жертвуют перспективой своего размножения ради процветания своих собратьев, оказавшихся в «шляпке». Если сообщество состоит из клонов организмов различного генотипа, то доля особей каждого клона, которая идет на формирование общей «ножки», в точности соответствует вкладу или «налогу» соответствующей стратегии в общий социальный проект. Оставшаяся доля используется на размножение, то есть понятия абстрактного выигрыша и эволюционной приспособленности в данном случае полностью совпадают. Данная модель также может быть исследована с помощью принципов эволюционной динамики и репликаторных уравнений. В общем случае, по аналогии с уравнением (5) приспособленность конкретного клона в предположении о парном взаимодействии может быть записана в виде:

$$\varphi(x) = (1-x) \cdot \int_0^1 S(x+t) \cdot f(t) \cdot dt, \quad (7)$$

где $S(y)$ – вероятность выживаемости спор для гриба с ножкой размера y может быть задана не только в виде пороговой, но и в виде гладкой сигмоидальной функции. Численное исследование репликаторного уравнения получившейся динамической системы дает результаты, качественно схожие с задачей о реновации общего ресурса в непрерывной постановке. При этом, однако, и факт наличия устойчивых смешанных предельных распределений и размер областей их притяжения оказываются существенно зависимыми от крутизны выбранной сигмоидальной функции S .

Альтернативным инструментом исследования описанных выше моделей может служить агентное имитационное моделирование. Использование этого метода позволяет путем обработки результатов компьютерного эксперимента изучить влияние факторов, которыми пренебрегается при аналитическом подходе, связанном с интегрированием теоретических репликаторных уравнений. Это, например, эффекты ограниченности и целочисленности популяции, неполная наследственность (мутации), индивидуальные предпочтения организмов при выборе партнеров по кооперации, влияние пространственной структуры и многие другие аспекты [8].

Библиографический список

1. Maynard Smith J. Evolution and the theory of games. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982.
2. Page K., Nowak M. Unifying Evolutionary Dynamics // Journal of Theoretical Biology, 2002, (219), P. 93–98.
3. Hardin G. The Tragedy of the Commons // Science, 1968, (32), #3859, P. 1243–1248.
4. Березовская Ф.С., Карева И.Г., Карев Г.П. Возможно ли предотвратить «трагедию общего ресурса»? // Математическая биология и биоинформатика, 2012, Т.7, № 1, С. 30–44.
5. Абрамова А.В., Топаж А.Г. Исследование модели растительно-микробного симбиотического взаимодействия методами теории эволюционных игр // Математическая биология и биоинформатика, 2018, Т. 13, №1, С. 130–158.
6. Gorban A.N. Selection Theorem for Systems with Inheritance // Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2007, (2), P. 1–45.
7. Matsuda H., Harada Y. Evolutionary stable stalk to spore ratio in cellular slime molds and the law of equalization in net incomes // Journal of Theoretical Biology, 1990, (147), P. 329–344.

8. Adami C., Schossau J., Hintze A. Evolutionary game theory using agent-based methods // Physics of Life Reviews, 2016, (19), P. 1–26.

УДК 628.1:628.3:65.016

Математическая оценка эффективности предприятий водокommunального хозяйства Сибири

А.А. Цхай¹, М.А. Романов²

¹АлтГТУ им. И.И. Ползунова, г. Барнаул;

²АлтГУ, г. Барнаул

1. Введение. Поиск наиболее эффективных путей развития предприятий водокommunального хозяйства – это актуальная проблема и для развитых, и для развивающихся стран. Возможности анализа процессов в этой области чаще всего ограничены рамками раскрытия информации о финансовом и технологическом состоянии компаний. Часто данных хватает, чтобы оценить производственный процесс только с позиций ряда затраченных ресурсов (входная информация) и полученных результатов (выходные данные).

Для характеристики различных аспектов деятельности ВКХ – предприятий в работе приводится определение индикаторов эффективности, формулируется порядок расчета их численных значений [1]. Оценка связи выбранных результатов и ресурсов с позиций эффективности использования последних выполняется в данном исследовании.

2. Предмет, задачи и методы. Характеристики эффективности формулируются в предположении о разделении, как ресурсов, так и результатов деятельности, соответственно, на две составляющие по отношению к объекту исследования: внутренние и внешние.

В качестве внешних результатов рассматриваются A_1 – объем принятых у потребителей сточных вод (тыс. м³) и A_2 – объем отпущенной потребителям питьевой воды (тыс. м³). В качестве внутренних результатов выбраны A_3 – чистая прибыль предприятия (тыс. руб.) и A_4 – расходы на оплату труда и отчисления на социальные нужды основного производственного и административно-управленческого персонала (тыс. руб.) Внешними ресурсами в исследовании являются B_1 – выручка (тыс. руб.) и B_2 – заемные средства (тыс. руб.) В свою очередь, внутренние ресурсы – это B_3 – стоимость основных средств (тыс. руб.) и B_4 – финансовые вложения (тыс. руб.).

Задается следующий порядок определения, например, K_1 – коэффициента мультипликативности, который находится на пересечении столбца "Внешние результаты A_1 " и "Внешние ресурсы B_1 " (таблица 1).