МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

О.П. Хромова, П.Н. Клепиков

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Векторная алгебра

Учебно-методическое пособие

Барнаул

Издательство Алтайского
государственного университета
2020

УДК 514.12
ББК 22.151.5
Х 942

Рецензент – профессор кафедры математического анализа АлтГУ,
д.ф.-м.н. **Е.Д. Родионов**

Хромова, О.П.

Х942 Аналитическая геометрия. Векторная алгебра [Текст]: учебно-методическое пособие / О.П. Хромова, П.Н. Клепиков. – Барнаул.: Изд-во Алт. гос. ун-та, 2020. – 44 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса бакалавриата института математики и информационных технологий направлений подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», впервые знакомящихся с основами векторной алгебры – одного из основных разделов аналитической геометрии. В пособии приведен необходимый теоретический материал, примеры решения задач, а также практические задания по всем изучаемым темам раздела «Векторная алгебра» в рамках курса «Аналитическая геометрия».

УДК 514.12
ББК 22.151.5

Оглавление

Глава 1

Векторная алгебра

1.1 Начальные сведения о векторах

Определение 1.1. ***Вектором*** *называется направленный отрезок. Одна из двух конечных точек называется* ***началом*** *вектора, а другая — его* ***концом****; положительное направление вектора идет от начала к концу. Начало вектора называют также* ***точкой его приложения****.*

Вектор с началом A и концом B обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ (или просто $\vec{a}$). На чертеже вектор изображается стрелкой (рис. 1.1).

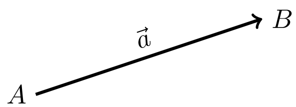

Рис. 1.1: Вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$

Определение 1.2. ***Длиной*** *или* ***модулем*** *вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина его направленного отрезка. (Обозначение $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.)*

Определение 1.3. *Вектор начало которого совпадает с его концом называется* ***нулевым вектором*** *и обозначается через $\vec{0}$.*

Длина нулевого вектора равна нулю, а направление не определено.

Определение 1.4. *Вектор, длина которого равна единице, называется* ***единичным вектором*** *или* ***ортом****.*

Определение 1.5. *Несколько векторов называются* ***коллинеарными*** *между собой, если они будучи приложенными к одной и той же точке, оказываются лежащими на одной прямой.*

Определение 1.6. *Несколько векторов называются* ***компланарными*** *между собой, если они будучи приложенными к одной и той же точке, оказываются лежащими в одной плоскости.*

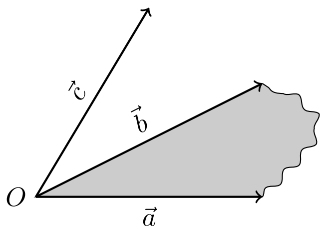

Рис. 1.2: Пример трех некомпланарных векторов

Определение 1.7. *Два вектора называются* ***равными****, если один из них может быть получен параллельным переносом из другого.*

Это обстоятельство записывается следующим образом: $\vec{a} = \vec{b}$. Например, если $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (рис. 1.3).

Замечание. *Равенство длин двух векторов не означает равенства этих векторов.*

В большинстве случаев существенную роль играют только длина и направление вектора, положение же начала роли не играет. Поэтому в дальнейшем мы будем считать тождественными векторы, имеющие одинаковые длины и направления, не зависимо от положения их начал.

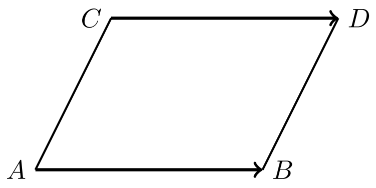

Рис. 1.3: Параллелограмм $ABCD$

1.2 Линейные операции над векторам

Определение 1.8. ***Линейными операциями*** *принято называть операции сложения векторов и умножения векторов на вещественное число.*

Пусть дано k векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$, произвольно расположенных в пространстве.

Определение 1.9. ***Суммой*** *векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ называется вектор, полученный следующим образом: от произвольной точки пространства отложим вектор равный $\vec{a}_1$, далее от его конца отложим вектор равный $\vec{a}_2$ и т.д. для всех векторов. Тогда суммой данных векторов является вектор $\overrightarrow{AB}$, начало A которого совпадает с началом первого построенного вектора, а конец B — с концом последнего построенного вектора. Это записывается так $\overrightarrow{AB} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_k$.*

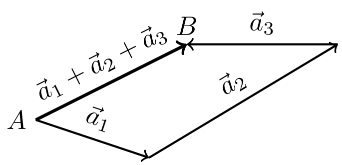

Рис. 1.4: Сумма векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$

Определение 1.10. ***Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ*** *называется вектор $\lambda\vec{a}$, имеющий длину $|\lambda||\vec{a}|$ и направленный одинаково с $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположно $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.*

Свойства операций над векторами

Для произвольных чисел λ, μ и векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справедливы следующие равенства

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность сложения)
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ассоциативность сложения)
3. Существует нулевой вектор $\vec{0}$ такой, что для любого вектора $\vec{a}$ выполнено $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
4. $\forall\vec{a}$, $\forall\vec{b}$ $\exists!\,\vec{c}:\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}$, т.е. $\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$ — разность векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$.
5. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ (ассоциативность умножения)
6. Дистрибутивность
   (a) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$
   (b) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$
7. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ (умножение на единицу)

Замечание. *Чтобы построить разность векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ достаточно отложить эти векторы от какой-либо точки, а затем провести вектор от конца вычитаемого к концу уменьшаемого; этот вектор и будет искомой разностью (рис. 1.5).*

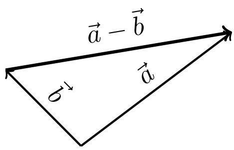

Рис. 1.5: Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Пример 1.1. *В треугольнике ABC на стороне BC отметили точку K такую, что $BK = 4KC$. Выразите вектор $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.*

Решение. Изобразим треугольник ABC на рисунке 1.6 и отметим все необходимые точки. По определению вектор $\overrightarrow{AK}$ является суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BK}$. Вектор $\overrightarrow{BK}$ же равен $\frac{4}{5}$ вектора $\overrightarrow{BC}$, который представляет собой разность векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BC} =$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}.$$

□

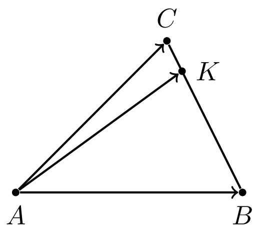

Рис. 1.6: Рисунок к примеру 1.1

1.3 Определители второго и третьего порядка

Определение 1.11. *Прямоугольную таблицу из чисел, содержащую произвольное число m строк и произвольное число n столбцов, называют $(m \times n)$**-матрицей**.*

Если число строк матрицы совпадает с числом ее столбцов, то матрица называется *квадратной*. Числа, входящие в состав матрицы, обычно называют ее *элементами*.

Для обозначения матрицы используют круглые скобки. Например, рассмотрим квадратную матрицу, состоящую из четырех элементов:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Определение 1.12. ***Определителем второго порядка***, *соответствующим матрице (1.1), называется число, равное* $a_1b_2 - a_2b_1$ *и обозначаемое символом*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим квадратную матрицу, состоящую из девяти элементов:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Определение 1.13. ***Определителем третьего порядка***, *соответствующим матрице (1.2), называется число, равное*

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

и обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 1.2. *Вычислить определитель*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. По определению имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} \text{-2} & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot (0 \cdot 2 - 1 \cdot 1) - 2 \cdot ((-2) \cdot 2 - 1 \cdot 0) + 3 \cdot ((-2) \cdot 2 - 0 \cdot 0) =$$
$$= 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-4) + 3 \cdot (-4) = -5.$$

□

1.4 Понятие векторного пространства

Определение 1.14. ***Векторным пространством*** *называется множество* V, *на котором определены две операции: сложение и умножение на число, удовлетворяющие следующим аксиомам:*

1. $\forall a,\, b \in V \quad a + b = b + a,$
2. $\forall a,\, b,\, c \in V \quad (a+b)+c = a+(b+c),$
3. $\exists \vec{0} \in V\ \forall a \in V \quad a + \vec{0} = \vec{0} + a = a,$
4. $\forall a \in V\ \exists (-a) \in V \quad a + (-a) = a + (-a) = \vec{0},$
5. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall a \in V \quad \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a,$
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall a \in V \quad \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b,$
7. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall a \in V \quad (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a,$
8. $\forall a \in V \quad 1 \cdot a = a.$

Следствие. *Согласно сформулированным выше свойствам, множество векторов с введенными операциями сложения и умножения на число образует векторное пространство.*

Определение 1.15. *Пусть* V *— векторное пространство, и пусть* $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ *— набор векторов из* V*, т.е.* $a_i \in V$, $i = 1 \ldots p$. *Любой вектор вида*

$$x^1 a_1 + x^2 a_2 + \cdots + x^p a_p,$$

где x^1, x^2, $\ldots$, x^p *— некоторые числа, называется* ***линейной комбинацией векторов*** a_1, a_2, $\ldots$, a_p.

Определение 1.16. *Система векторов* $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ *из* V *называется* ***линейно независимой****, если и только если выполнено следующее свойство*

$$x^1 a_1 + x^2 a_2 + \cdots + x^p a_p = \vec{0} \ \Rightarrow\ x^1 = x^2 = \cdots = x^p = 0.$$

Определение 1.17. *Система векторов* $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ *из* V *называется* ***линейно зависимой****, если и только если найдутся числа* x^1, x^2, $\ldots$, x^p, *не все равные нулю, такие, что*

$$x^1 a_1 + x^2 a_2 + \cdots + x^p a_n = \vec{0}.$$

Лемма 1.1. *Два вектора* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Лемма 1.2. *Три вектора* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Определение 1.18. *Упорядоченная система векторов* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *векторного пространства* V *называется* ***базисом****, если 1) она линейно независима и 2) добавление любого другого вектора делает ее линейно зависимой, т.е. любой вектор пространства является линейной комбинацией данной системы векторов. Число* n *не зависит от выбора базиса и называется* ***размерностью*** *векторного пространства* V*. Это записывается так* $n = \dim V$.

Теорема 1.1. *Пусть* V — *векторное пространство, и* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — *базис* V*. Тогда для любого вектора* $x \in V$ *существует единственный набор чисел* $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ *такой, что* $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n$*. Числа* $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ *называются* ***координатами*** *вектора* x *относительно базиса* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Обозначение. *Если вектор* v *имеет координаты* v^1, $\ldots$, v^n, *то это обозначается*

$$v = (v^1, v^2, \ldots, v^n).$$

Предложение 1.1. *Два вектора на плоскости* $x = (x^1, x^2)$ *и* $y = (y^1, y^2)$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Предложение 1.2. *Три вектора в пространстве* $a = (a^1, a^2, a^3)$ *и* $b = (b^1, b^2, b^3)$ *и* $c = (c^1, c^2, c^3)$ *линейно зависимы тогда и только* *тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0.$$

1.5 Аффинная система координат

Определение 1.19. ***Аффинной системой координат*** *на плоскости называется множество состоящее из точки O и базиса $\{e_1, e_2\}$.*

Обозначение. *Oe_1e_2 или $\{O; \{e_1, e_2\}\}$ — аффинная система координат.*

Точка O называется *началом координат*, а векторы e_1, e_2 — *координатными векторами*. Векторы e_1, e_2 задают направление и масштаб.

Пусть Oe_1e_2 — аффинная система координат, а M — произвольная точка плоскости.

Определение 1.20. ***Координатами*** *точки M на плоскости относительно аффинной системы координат Oe_1e_2 называют координаты вектора $\overrightarrow{OM}$, называемого* ***радиус вектором точки*** *M (относительно точки O), в базисе $\{e_1, e_2\}$:*

$$\overrightarrow{OM} = x^1 e_1 + x^2 e_2.$$

Определение 1.21. ***Аффинной системой координат*** *в пространстве называется множество состоящее из точки O и базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$.*

Определение 1.22. ***Координатами*** *точки M в пространстве относительно аффинной системы координат $Oe_1e_2e_3$ называют координаты* ***радиус вектора*** *$\overrightarrow{OM}$ в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$:*

$$\overrightarrow{OM} = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3.$$

Аффинную систему координат кратко будем называть аффинным *репером.*

Теорема 1.2. *Пусть на плоскости задан аффинный репер (т.е. зафиксирована точка O, и от нее отложены базисные векторы). И пусть относительно этого репера произвольная точка A имеет координаты (a^1, a^2), а произвольная точка B — координаты (b^1, b^2). Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны $\{b^1 - a^1, b^2 - a^2\}$.*

Пример 1.3. *Даны точки $A = (-2, 3)$, $B = (3, 7)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.*

Решение. По теореме 1.2 координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ выражаются через координаты точек A и B следующим образом

$$\overrightarrow{AB}\{3 - (-2), 7 - 3\} = \overrightarrow{AB}\{5, 4\}.$$

□

Определение 1.23. *Пусть A и B — две точки плоскости или пространства, а $\frac{\lambda}{\mu} \neq -1$ — некоторое действительное число. Говорят, что точка C на прямой AB* ***делит*** (направленный) ***отрезок*** $\overrightarrow{AB}$ ***в данном отношении*** $\frac{\lambda}{\mu}$, *если $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\lambda}{\mu}$ (рис. 1.7).*

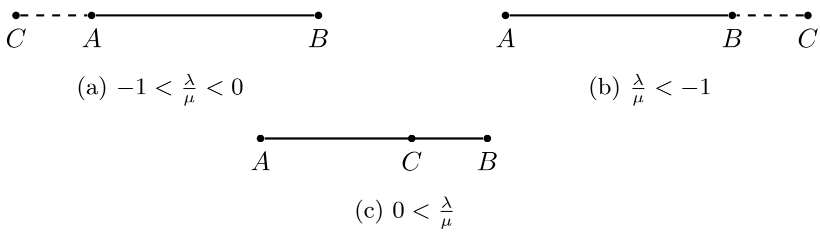

Рис. 1.7: Точка C делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $\frac{\lambda}{\mu}$

Теорема 1.3 (Теорема о делении отрезка в данном отношении). *Пусть даны две точки $A = (a^1, a^2)$, $B = (b^1, b^2)$ на плоскости (либо $A = (a^1, a^2, a^3)$, $B = (b^1, b^2, b^3)$ в пространстве) и пусть точка C делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ в заданном отношении $\frac{\lambda}{\mu}$. Тогда координаты точки C вычисляются по формулам:*

$$c^1 = \frac{\mu a^1 + \lambda b^1}{\mu + \lambda}, \quad c^2 = \frac{\mu a^2 + \lambda b^2}{\mu + \lambda}, \quad \left(c^3 = \frac{\mu a^3 + \lambda b^3}{\mu + \lambda}\right).$$

Пример 1.4. *Даны точки $A = (-2, 3)$, $B = (3, 7)$. Найдите координаты середины отрезка AB.*

Решение. Середина отрезка делит его в отношении $1 : 1$, таким образом $\lambda = \mu = 1$ и по теореме 1.3 координаты середины равны

$$\left(\frac{1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3}{1+1}, \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 7}{1+1}\right) = \left(\frac{1}{2}, 5\right).$$

□

Теорема 1.4 (Координаты центра тяжести системы материальных точек)**.** *Пусть в точках $A_1(x^1, y^1)$, $A_2(x^2, y^2)$, $\ldots$,$A_k(x^k, y^k)$. сосредоточены соответственно массы m_1, m_2, $\ldots$, m_k. Тогда центр тяжести $Z(x, y)$ будет иметь следующие координаты*

$$x = \frac{x^1 m_1 + x^2 m_2 + \cdots + x^k m_k}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k}, \quad y = \frac{y^1 m_1 + y^2 m_2 + \cdots + y^k m_k}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k}.$$

Принципы нахождения центра тяжести:

1. Любая система материальных точек имеет единственный центр тяжести.

2. Центр тяжести Z системы двух материальных точек A_1, A_2 лежит на отрезке A_1A_2 и определяется по правилу рычага:

   $$|A_1Z|m_1 = |A_2Z|m_2;$$

   при этом центр тяжести Z делит отрезок A_1A_2 в отношении $\frac{m_2}{m_1}$.

3. Если в системе материальных точек выделить некоторую подсистему точек и заменить ее одной точкой, а именно центром тяжести этой подсистемы с суммарной массой этой подсистемы, то центр тяжести всей системы не изменится.

1.6 Формулы преобразования координат

Определение 1.24. *Пусть на плоскости заданы два базиса $e = \{e_1, e_2\}$ и $e' = \{e_{1'}, e_{2'}\}$. Разложим по базису*

$$e_{1'} = c^1_{1'} e_1 + c^2_{1'} e_2,$$
$$e_{2'} = c^1_{2'} e_1 + c^2_{2'} e_2.$$

Матрица, составленная из коэффициентов разложения

$$C = \begin{pmatrix} c^1_{1'} & c^2_{1'} \\ c^1_{2'} & c^2_{2'} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей перехода от базиса*** e ***к базису*** e'.

Пример 1.5. *Переход от ортонормированного базиса* $e = \{e_1, e_2\}$ *к ортонормированному базису* $e' = \{e_{1'}, e_{2'}\}$ *осуществляется с помощь поворота на угол* φ *(рис. 1.8). Найти матрицу перехода данного преобразования.*

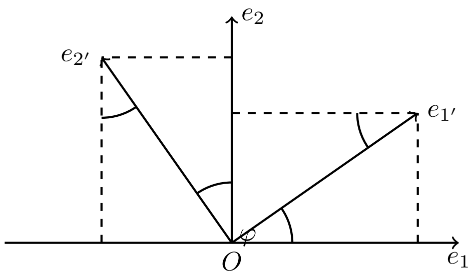

Рис. 1.8: Рисунок к примеру 1.5

Решение. Чтобы найти координаты единичного вектора $e_{1'}$, спроектируем его на координатные оси системы координат Oe_1e_2. Получим

$$e_{1'} = |e_{1'}|\cos\varphi e_1 + |e_{1'}|\sin\varphi e_2 = \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2. \qquad (1.3)$$

Аналогично для единичного вектора $e_{2'}$ находим

$$e_{2'} = -|e_{2'}|\sin\varphi e_1 + |e_{2'}|\cos\varphi e_2 = -\sin\varphi e_1 + \cos\varphi e_2. \qquad (1.4)$$

В данном равенстве знак «$-$» при e_1 возник, поскольку проекция вектора $e_{2'}$ на ось Oe_1 и сам вектор e_1 противоположно направлены.

Исходя из равенств (1.3) и (1.4), записываем матрицу перехода от репера Oe_1e_2 реперу $Oe_{1'}e_{2'}$

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

$\square$

Определение 1.25. *Пусть в пространстве заданы два базиса* $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $e' = \{e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}\}$. *Разложим по базису*

$$\begin{aligned} e_{1'} &= c^1_{1'} e_1 + c^2_{1'} e_2 + c^3_{1'} e_3, \\ e_{2'} &= c^1_{2'} e_1 + c^2_{2'} e_2 + c^3_{2'} e_3, \\ e_{3'} &= c^1_{3'} e_1 + c^2_{3'} e_2 + c^3_{3'} e_3. \end{aligned}$$

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c^1_{1'} & c^2_{1'} & c^3_{1'} \\ c^1_{2'} & c^2_{2'} & c^3_{2'} \\ c^1_{3'} & c^2_{3'} & c^3_{3'} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей перехода от базиса*** e ***к базису*** e'.

В общем случае $e_{i'} = c^k_{i'} e_k$, $i', k = 1, 2, 3, \ldots$.

Теорема 1.5. *Пусть на плоскости или в пространстве заданы два базиса* $e = \{e_i\}$ *и* $e' = \{e_{i'}\}$, *и пусть вектор* x *имеет координаты: относительно первого базиса* x^i, *относительно второго базиса —* $x^{i'}$, *т.е.* $x = (x^i) = (x^{i'})$. *Тогда эти координаты связаны формулами*

$$x^k = c^k_{i'} x^{i'}.$$

В частности, для плоскости, выполняется

$$\begin{aligned} x^1 &= c^1_{1'} x^{1'} + c^1_{2'} x^{2'}, \\ x^2 &= c^2_{1'} x^{1'} + c^2_{2'} x^{2'}. \end{aligned}$$

Теорема 1.6. *Пусть на плоскости или в пространстве заданы две аффинные системы координат* $I = \{O; \{e_1, e_2\}\}$ *и* $I' = \{O; \{e_{i'}, e_{2'}\}\}$. *Пусть так же* $O' = (x^1_0, x^2_0)$ *— координаты точки* O' *относительно первой системы координат,* $C = \|c^k_{i'}\|$ *— матрица перехода. Если произвольная точка* M *имеет координаты относительно первой системы отчета* $M(x^1, x^2)$, *относительно второй системы отчета —* $M(x^{1'}, x^{2'})$, *то эти координаты связаны равенствами:*

$$\begin{aligned} x^1 &= c^1_{1'} x^{1'} + c^1_{2'} x^{2'} + x^1_0, \\ x^2 &= c^2_{1'} x^{1'} + c^2_{2'} x^{2'} + x^2_0, \end{aligned}$$

или

$$x^k = c^k_{i'} x^{i'} + x^k_0.$$

Пример 1.6. *В пространстве задан базис* $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. *Кроме того задан второй базис* $e' = \{e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}\}$, *который выражается через базис* e *по следующим формулам*

$$\begin{aligned} e_{1'} &= e_1, \\ e_{2'} &= 2e_1 + e_2, \\ e_{3'} &= e_1 - 2e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Вектор $\vec{a}$ *имеет координаты* $\{1, -2, 0\}$ *в базисе* e. *Найдите его координаты в базисе* e'.

Решение. По теореме 1.5 имеем:

$$\begin{aligned} 1 &= x^{1'}, \\ -2 &= 2x^{1'} + x^{2'}, \\ 0 &= x^{1'} - 2x^{2'} + x^{3'}. \end{aligned}$$

Решая данную систему, находим $x^{1'} = 1$, $x^{2'} = -4$, $x^{3'} = -9$. $\square$

Теорема 1.7. *Пусть имеется три базиса* $e = \{e_1, e_2\}$, $e' = \{e_{1'}, e_{2'}\}$, $e'' = \{e_{1''}, e_{2''}\}$. *Пусть также* A *— матрица перехода от базиса* e *к базису* e', B *— от базиса* e' *к базису* e'', C *— от базиса* e *к базису* e''. *Тогда все эти матрицы связаны следующим образом:*

$$C = B \cdot A.$$

1.7 Криволинейные координаты

Положение точки M на плоскости Oxy может быть описано с помощью *полярных координат* (ρ, φ), где ρ — длина радиус-вектора точки M, а φ — угол, образованный радиус-вектором точки M с положительным направлением оси Ox (см. рис. 1.9). При этом точку O принято называть *полюсом*, а ось Ox — *полярной осью.*

Связь между полярными координатами (ρ, φ) точки M и ее декартовыми координатами (x, y) задается формулами

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\varphi, \end{cases} \tag{1.5}$$

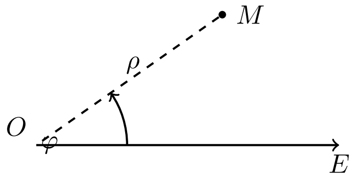

Рис. 1.9: Полярная система координат

где $0 \leqslant \rho$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Обратно

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Пример 1.7. *Найти декартовы координаты точки, зная ее полярные координаты* $A\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. Применяя (1.5), получаем

$$x = 4\cos\frac{\pi}{3} = 2, \quad y = 4\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Следовательно, декартовы координаты точки $A(2, 2\sqrt{3})$. □

Пример 1.8. *Найти полярные координаты точки* $M(1, -1)$.

Решение. По формулам (1.6) находим

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{1} = -1.$$

Из двух значений $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ и $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ нужно взять $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, поскольку $\sin\varphi$ по условию задачи должен иметь отрицательный знак. Итак, полярные координаты точки M есть $\rho = \sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. □

Положение точки M в пространстве $Oxyz$ может быть описано с помощью *цилиндрических координат* (ρ, φ, z) или *сферических координат* (ρ, φ, θ).

Цилиндрические координаты представляют соединение полярных координат в плоскости Oxy с обычной декартовой аппликатой z (рис. 1.10). Формулы, связывающие их с декартовыми, имеют

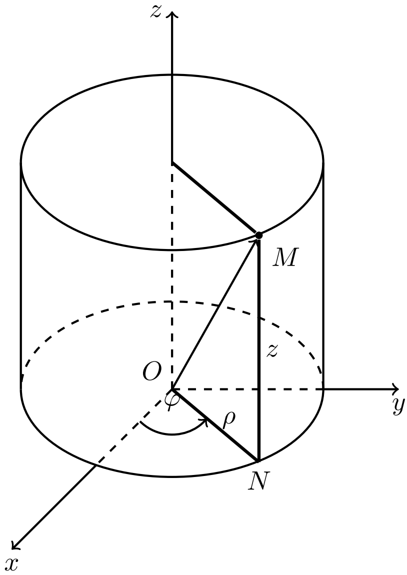

Рис. 1.10: Цилиндрическая система координат

вид

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

где $0 \leqslant \rho$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Положение точки M в *сферической системе координат* задается тройкой чисел (ρ, φ, θ), где ρ — длина радиус-вектора точки M, а φ — угол, образованный проекцией радиус-вектора точки M на плоскость Oxy с положительным направлением оси Ox, θ — угол между положительным направлением оси Oz и радиус-вектором точки M (рис. 1.11). Связь между декартовыми и сферическими координатами точки M описывается формулами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

где $0 \leqslant \rho$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Обратно

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \\ \cos \theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{cases} \tag{1.7}$$

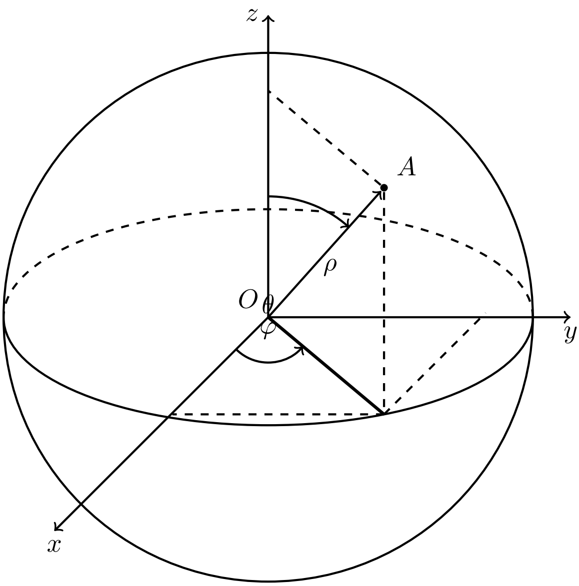

Рис. 1.11: Сферическая система координат

Пример 1.9. *Найти сферические координаты точки* $T(4, -3, 12)$.

Решение. По формулам (1.7) вычисляем

$$\rho = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 12^2} = 13, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{3}{4}, \quad \cos \theta = \frac{12}{13}.$$

Таким образом, сферические координаты точки T

$$\rho = 13, \quad \varphi = -\operatorname{arctg} \frac{3}{4}, \quad \theta = \arccos \frac{12}{13}.$$

$\square$

1.8 Задачи

Занятие 1. Векторная алгебра

1. Векторы $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. 1) Представить векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$ в виде линейных комбинаций векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. 2) Найти сумму векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$.

3. Точки E и F служат серединами диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ (плоского или пространственного). Доказать, что $\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}}{2} = \frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}}{2}$

4. В тетраэдре $OABC$ точка E служит серединой ребра OA, а точка F есть точка пересечения медиан треугольника ABC. Полагая $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, разложить вектор $\overrightarrow{EF}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

5. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за базисные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$.

6. Даны три векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Установить, являются ли эти векторы линейно зависимыми. В случаи линейной зависимости представить вектор $\vec{c}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \{5, 2, 1\}$, $\vec{b} = \{-1, 4, 2\}$, $\vec{c} = \{-1, -1, 1\}$.

7. Зная радиус-векторы $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ трех последовательных вершин параллелограмма, найти радиус-вектор $\vec{r}_4$ четвертой его вершины.

8. Зная радиус-векторы $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ вершин треугольника, найти радиус-вектор $\vec{r}$ точки пересечения его медиан.

9. Найти центр M и радиус r окружности описанной, около треугольника с вершинами $(-2, -2)$, $(2, 6)$, $(5, -3)$

10. Точка M — центр правильного многоугольника $A_1A_2\dots A_n$. Доказать, что $\overrightarrow{MA}_1 + \overrightarrow{MA}_2 + \ldots + \overrightarrow{MA}_n = \vec{0}$ и что для любой точки справедливо равенство: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \ldots + \overrightarrow{OA}_n)$.

Домашнее задание 1

1. В трапеции $ABCD$ отношение основания AD к основанию BC равно λ. Полагая $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A. Разложить вектор $\overrightarrow{AD}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

3. Точки E и F служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{AF}$.

4. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отложен отрезок $AK = \frac{1}{5}AD$, а на диагонали AC — отрезок $AL = \frac{1}{6}AC$. Доказать, что векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{LB}$ коллинеарны и найти 1) отношение $\frac{\overrightarrow{KL}}{\overrightarrow{LB}}$; 2) координаты точки B относительно введенного базиса.

5. A, B, C и D — произвольные точки пространства, M и N — середины отрезков AD и BC. Доказать, что $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

6. Дан тетраэдр $OABC$. Принимая за базисные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, найти в этом базисе координаты: 1) векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$; 2) вектора $\overrightarrow{DE}$, соединяющего середину D ребра OA с серединой E ребра BC; 3) вектора, соединяющего середину D ребра OA с точкой F пересечения медиан грани BOC.

7. Даны три векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Установить, являются ли эти векторы линейно зависимыми. В случаи линейной зависимости представить вектор $\vec{c}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \{3, 2, 1\}$, $\vec{b} = \{-9, 6, 3\}$, $\vec{c} = \{-1, 2, 1\}$.

8. Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$. Выразить вектор $\overrightarrow{MM'}$, соединяющий точки пересечения медиан этих треугольников, через векторы $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$.

Занятие 2. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат

1. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, длина стороны которого равна a. Приняв за полюс вершину A, за положительное направление полярной оси — направление вектора $\overrightarrow{AB}$, а за положительное направление отчета углов — направление кратчайшего поворота от $\overrightarrow{AB}$ к $\overrightarrow{AC}$, определить в этой системе полярные координаты вершин шестиугольника.

2. Вычислить расстояние между двумя данными точками:

$$1)\ A = \left(2, \frac{\pi}{3}\right) \text{ и } B = \left(1, \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$2)\ C = \left(4, \frac{\pi}{5}\right) \text{ и } D = \left(6, \frac{6\pi}{5}\right).$$

3. Зная прямоугольные координаты точек $A = (3, -4)$, $B = (-1, 1)$, $C = (0, 2)$, $D = (5, 0)$, найти их полярные координаты.

4. Зная полярные координаты точки:$r = 2$, $\varphi = \pi/3$, найти её прямоугольные координаты, если полюс находится в точке $(3, 5)$, а полярная ось параллельна оси Ox.

5. Найти угол α вектора $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox, зная, что цилиндрические координаты точки M: $r = 3$, $\varphi = \pi/3$, $z = 4$.

6. Найти сферические координаты точки M, зная, что луч $\overrightarrow{OM}$ образует с осями Ox и Oy углы, соответственно равные $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$, и что третья координата точки $z = -1$.

7. Найти цилиндрические координаты точек по их прямоугольным координатам: $A = (3, -4, 5)$, $B = (-6, 0, 8)$.

8. Найти сферические координаты точек по их прямоугольным координатам: $A = (0, -4, 3)$, $B = (1, -1, -1)$.

Домашнее задание 2

№№ 116, 120, 124, 126, 129.

Занятие 3. Преобразование аффинных координат

1. Даны две системы координат: Oxy и $O'x'y'$. Относительно первой системы координат начало второй системы находится в точке $O' = (-4, 2)$, ось $O'x'$ пересекает ось Ox в точке $A = (2, 0)$, а ось $O'y'$ пересекает ось Oy в точке $B = (0, 8)$. Принимая за базисные векторы второй системы векторы $\overrightarrow{O'A}$ и $\overrightarrow{O'B}$, выразит координаты произвольной точки относительно первой системы через её координаты во второй системе.

2. Дан параллелограмм $OACB$. Рассмотрим две системы координат, принимая за начало обеих систем вершину параллелограмма O, а за единичные векторы осей Ox и Oy первой системы соответственно стороны $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ параллелограмма, а за единичные векторы осей Ox' и Oy' второй системы соответственно векторы $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{OF}$ (E и F — середины сторон AC и BC). Найти координаты вершин параллелограмма во второй системе.

3. Написать формулы преобразования прямоугольных координат, если начало новой системы находится в точке $O' = (-4, 2)$, угол от положительного направления оси Ox до положительного направления оси $O'x'$ равен $\frac{2\pi}{3}$ и обе системы одинаково ориентированы.

4. Две системы координат имеют одинаковые направления осей. Координаты начала первой системы относительно второй суть $(7, -5)$. Чему равны координаты начала второй системы относительно первой?

5. На какой угол надо повернуть оси прямоугольной системы координат, чтобы координаты точки $M = (2, 0)$ стали равны между собой?

6. Как изменятся координаты любой точки $M(x, y)$, если за ось абсцисс принять ось ординат и за ось ординат ось абсцисс?

Домашнее задание 3

№№ 663, 674, 685, 687.

1.9 Контрольные вопросы и задачи

1. Что называется координатами вектора?

2. Какой вектор называется ортом?

3. Как найти координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?

4. Запишите формулы перехода от базиса e к базису e', указанному на рисунке 1.8.

5. Как связаны между собой сферическая, цилиндрическая и декартова системы координат?

6. Докажите, что точки $A(3,-5)$, $B(-2,-7)$, $C(18,1)$ лежат на одной прямой.

7. Даны вершины треугольника $A(1,2,-1)$, $B(2,-1,3)$, $C(-4,7,5)$. Определить координаты биссектрисы $\overrightarrow{BE}$ и медианы $\overrightarrow{AF}$.

8. Определите координаты центра тяжести треугольника ABC, заданного координатами своих вершин $A(1,-1,-3)$, $B(2,1,-2)$, $C(-5,2,-6)$.

9. Зная полярные координаты точки:$r = 1$, $\varphi = \pi/4$, найти её прямоугольные координаты, если полюс находится в точке $(2,3)$, а полярная ось параллельна оси Ox.

10. Найти формулы преобразования прямоугольных координат, если начало новой системы координат находится в точке $O'(-4,2)$, а угол поворота координатных осей составил $\frac{2\pi}{3}$.

Глава 2

Скалярное, векторное и смешанное произведение

2.1 Проекция вектора на ось

Пусть u — некоторая ось (т.е. прямая на которой выбрано направление), и пусть l — некоторая прямая, не параллельная этой оси (рис. 2.1).

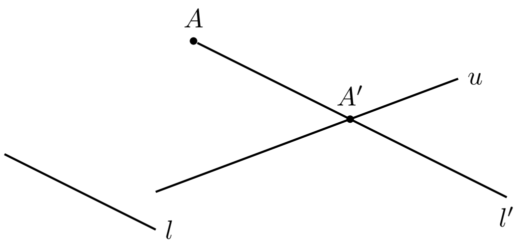

Рис. 2.1: Проеция точки A на ось u, взятая параллельно прямой l

Пусть далее А — произвольная точка плоскости. Проведем через А прямую l', параллельную прямой l, и пусть A' есть точка пересечения прямой l' с осью u.

Определение 2.1. *Точка A' называется **проекцией точки** A*

на ось u, взятой параллельно прямой l.

Если прямая l перпендикулярна оси u, то проекция называется *прямоугольной*, или *ортогональной*.

Пусть $\overrightarrow{AB}$ — некоторый вектор, и пусть A' и B' обозначают проекции начала и конца этого вектора на ось u параллельно прямой l (рис. 2.2).

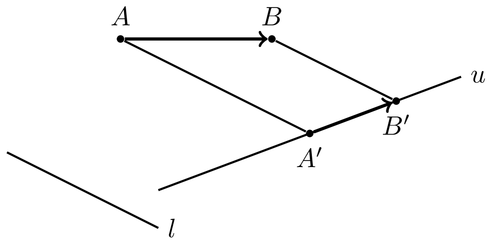

Рис. 2.2: Проеция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось u

Определение 2.2. *Вектор $\overrightarrow{A'B'}$ называется* ***проекцией вектора*** *$\overrightarrow{AB}$ на ось u параллельно прямой l.*

Проекцию $\overrightarrow{A'B'}$ будем обозначать так

$$\overrightarrow{A'B'} = Pr_u\overrightarrow{AB}$$

В дальнейшем нам потребуется, главным образом, не сама проекция $\overrightarrow{A'B'}$, а ее абсолютная величина $|A'B'|$ по оси u. Абсолютную величину проекции будем обозначать так

$$|A'B'| = pr_u\overrightarrow{AB}.$$

Свойства проекции.

Для произвольного числа λ и векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ справедливы следующие равенства:

1. Если $\vec{x} = \vec{y}$, то $Pr_u\vec{x} = Pr_u\vec{y}$;

2. $\forall\vec{x},\vec{y} \quad Pr_u(\vec{x} \pm \vec{y}) = Pr_u\vec{x} \pm Pr_u\vec{y}$;

3. $\forall \vec{x} \quad Pr_u(\lambda \vec{x}) = \lambda Pr_u \vec{x}$.

Замечание. *Аналогичные свойства справедливы для абсолютных величин проекций.*

Определение 2.3. ***Углом между двумя направлениями*** *(осями, векторами) называется угол между ортами этих направлений, проведенными из одной и той же произвольной точки.*

Угол всегда берется между положительными направлениями ортов и принимает все значения от 0 до π.

Теорема 2.1. *Пусть даны ось u и вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 2.3), составляющий угол θ с осью u. Тогда алгебраическое значение прямоугольной проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось u вычисляется по формуле*

$$pr_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\theta.$$

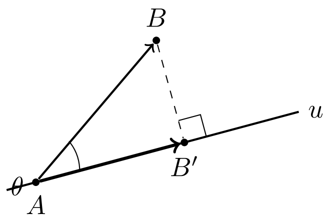

Рис. 2.3: Прямоугольная проеция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось u

2.2 Скалярное произведение векторов

Определение 2.4. ***Скалярным произведением*** *двух векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла, заключенному между ними:*

$$(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos(\varphi), \quad (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

Заметим, что

$$(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}| \cdot pr_{\vec{u}} \vec{v} = |\vec{v}| \cdot pr_{\vec{v}} \vec{u}.$$

Свойства скалярного произведения.

1. $(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{v},\vec{u})$ (коммутативность);
2. $(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{u},\vec{w})$ (дистрибутивность);
3. $(\vec{u},\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u},\vec{v})$ (однородность);
4. $(\vec{u},\vec{u}) \geqslant 0$ (неотрицательность);
5. $(\vec{u},\vec{u}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{u} = \vec{0}$ (невырожденность).

Определение 2.5. *Векторное пространство V, на котором определена числовая функция (u,v), удовлетворяющая свойствам 1-4, называется* ***евклидовом пространством*** *или* ***пространством со скалярным произведением****.*

Теорема 2.2 (Неравенство Коши–Буняковского)**.** *Пусть V — евклидово пространство. Тогда для любой пары векторов $u,v \in V$ справедливо неравенство*

$$|(u,v)| \leq \sqrt{(u,u)} \cdot \sqrt{(v,v)}.$$

Следствие. *В условиях предыдущей теоремы равенство достигается, если и только если векторы u,v коллинеарны.*

Определение 2.6. *Пусть V — евклидово пространство, $u \in V$. Тогда* ***длина*** *(или* ***норма****) вектора u определяется как корень квадратный из скалярного квадрата вектора u, т.е.*

$$|u| = \sqrt{(u,u)}.$$

Определение 2.7. ***Углом между векторами*** *u,v называется такое число φ, что выполняется следующее равенство*

$$\cos(\varphi) = \frac{(u,v)}{|u|\cdot|v|}, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

В силу неравенства Коши–Буняковского формула корректна, и $\varphi = \arccos\left(\frac{(u,v)}{|u|\cdot|v|}\right)$.

Теорема 2.3. *Для любой пары векторов u, v евклидова векторного пространства справедливо неравенство (**неравенство треугольника**)*

$$|u + v| \leqslant |u| + |v|.$$

Определение 2.8. *Говорят, что векторы u и v **ортогональны**, если $(u, v) = 0$.*

Теорема 2.4. *Пусть V — евклидово пространство, и пусть $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ — система линейно независимых векторов. Тогда существует система ортогональных друг другу векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$, таких что*

$$\begin{aligned}
&u_1 = c_1^1 v_1, \\
&u_2 = c_2^1 v_1 + c_2^2 v_2, \\
&u_3 = c_3^1 v_1 + c_3^2 v_2 + v_3^3 v_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\
&u_p = c_n^1 v_1 + \cdots + c_p^p v_p,
\end{aligned}$$

где $c_j^i \in \mathbb{R}$.

Следствие. *В конечномерном евклидовом пространстве существует ортогональный базис, т.е. базис, состоящий из взаимно ортогональных векторов.*

Определение 2.9. *Базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ конечномерного евклидова пространства V называется **ортонормированным**, если*

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

(Отсюда следует, что векторы взаимно ортогональны и имеют единичную длину, т.е. $(e_i, e_i) = |e_i|^2 = 1$).

Теорема 2.5. *Любое евклидово конечномерное пространство имеет ортонормированный базис.*

2.3 Выражение скалярного произведения в координатах

Определение 2.10. ***Аффинной системой координат*** *в пространстве V^n называется множество состоящее из точки O и базиса $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.*

Определение 2.11. ***Координатами*** *точки M в пространстве относительно аффинной системы координат I=$\{O; \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}\}$ называют координаты радиус вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$:*

$$\overrightarrow{OM} = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n.$$

Определение 2.12. *Аффинная система координат называется* ***прямоугольной декартовой*** *или просто* ***прямоугольной****, если соответствующий базис ортонормирован.*

Теорема 2.6. *Пусть в прямоугольной системе координат заданы два вектора с координатами*

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^n),$$
$$y = (y^1, y^2, \ldots, y^n).$$

Тогда их скалярное произведение равно

$$(x, y) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \cdots + x^n y^n.$$

Пример 2.1. *В прямоугольной системе координат даны векторы $\vec{a} = \{1, 2, -4\}$ и $\vec{b} = \{3, 3, 7\}$. Найдите их скалярное произведение.*

Решение. По теореме 2.6 имеем:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 7 = 3 + 6 - 28 = -19.$$

□

Пример 2.2. *Найдите расстояние между точками с координатами $A(2, 3)$ и $B(-1, 8)$ (система координат прямоугольная).*

Решение. Расстояние между точками есть длина вектора с началом в первой точке и концом во второй, т.е. вектора $\vec{a} = \{-3, 5\}$. Тогда по определению 2.6 имеем:

$$AB = |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{(-3) \cdot (-3) + 5 \cdot 5} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}.$$

□

Пример 2.3. *В прямоугольной системе координат даны векторы* $\vec{a} = \{1, 2, -4\}$ *и* $\vec{b} = \{3, 3, 7\}$. *Найдите угол между ними.*

Решение. По определению 2.7 имеем:

$$\begin{aligned}\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} &= \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} \cdot \sqrt{(\vec{b}, \vec{b})}} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 7}{\sqrt{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-4) \cdot (-4)} \cdot \sqrt{3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 7}} = \\ &= \frac{-19}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{67}} = -\frac{19\sqrt{1407}}{1407}.\end{aligned}$$

Тогда угол между векторами равен $\arccos\left(-\frac{19\sqrt{1407}}{1407}\right)$. □

2.4 Ориентация пространства

Определение 2.13. *Два базиса* $I = \{e_1, e_2, e_3\}$ *и* $I' = \{e_1, e_2, e_3\}$ *называются* ***одинаково ориентированными****, если определитель матрицы перехода от одного базиса к другому* $\det A > 0$, *и* ***противоположно ориентированными****, если* $\det A < 0$.

Лемма 2.1. *Одинаково ориентированные базисы являются эквивалентными, т.е. удовлетворяют свойствам:*
1) $I \sim I$ *(рефлексивность).*
2) Если $I \sim I'$, *то* $I' \sim I$ *(симметричность).*
3) Если $I \sim I'$ *и* $I' \sim I''$, *то* $I \sim I''$ *(транзитивность).*
4) Если $I_0 = \{e_1^0, e_2^0, e_3^0\}$ *— фиксированный базис, то для любого другого базиса* I *выполнено или* $I \sim I_0$, *или* $I \sim -I_0 = \{e_1^0, e_2^0, -e_3^0\}$.

Определение 2.14. ***Ориентацией пространства*** *называется совокупность всех одинаково ориентированных базисов этого пространства.*

Определение 2.15. ***Ориентировать пространство*** *— это значит выбрать, какой из базисов* $I = \{e_1, e_2, e_3\}$ *или* $-I = \{e_1, e_2, -e_3\}$ *задает ориентацию пространства. Этот базис называется* ***правым*** *(ориентацию которую он задает назовем* ***положительной****), а другой базис —* ***левым*** *(ориентацию которую он задает назовем* ***отрицательной****).*

Определение 2.16. *Система координат* $Oe_1e_2e_3$ *называется* ***правой*** *(соответственно* ***левой****), если базис* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *— правый (соответственно — левый).*

Замечание. *Обычно ориентацию пространства выбирают так, чтобы координатные оси* e_1, e_2, e_3 *правой (соответственно левой) системы координат* $Oe_1e_2e_3$ *были направлены вдоль большого, указательного и среднего пальцев правой (соответственно левый) руки.*

Определение 2.17. ***Круговой перестановкой*** *элементов* a, b, c, $\dots$, d, *расположенных в определенном порядке, называется такая перестановка, при которой каждый элемент заменяется на следующий, а последний на первый.*

Например, применяя круговую перестановку к векторам a, b, c, получим b, c, a.

Свойство. *Круговая перестановка сохраняет ориентацию пространства, т.е. при круговой перестановке базисных векторов правый (соответственно левый) базис останется правым (соответственно левым).*

2.5 Векторное произведение векторов

Определение 2.18. ***Векторным произведением*** *векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется вектор* $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ *(рис. 2.4), определяемый следующими условиями:*
1) длина $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$, *где* $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$*;*
2) вектор $\vec{c}$ *ортогонален векторам* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$*;*
3) тройка векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ *— правая.*

Свойства векторного произведения.

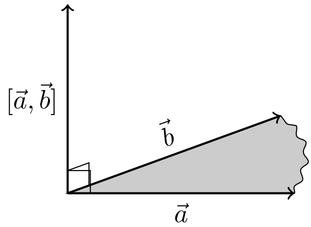

Рис. 2.4: Вектрное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

1. $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$ (антикоммутативность).
2. a) $[\vec{a},\vec{b}+\vec{d}] = [\vec{a},\vec{b}] + [\vec{a},\vec{d}]$, (дистрибутивность)
   b) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{d}] = [\vec{a},\vec{b}] + [\vec{b},\vec{d}]$.
3. a) $[\vec{a},\lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a},\vec{b}]$, (однородность)
   b) $[\lambda\vec{a},\vec{b}] = \lambda[\vec{a},\vec{b}]$.
4. $[\vec{a},\vec{b}] = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы.
5. $|[\vec{a},\vec{b}]|^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & (\vec{b},\vec{b}) \end{vmatrix}$.
6. Для площади треугольника ABC выполняется
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]|.$$

Теорема 2.7. *Пусть $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ — ортонормированный правый базис, и пусть векторы $\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2 + a^3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b^1\vec{e}_1 + b^2\vec{e}_2 + b^3\vec{e}_3$. Тогда векторное произведение этих векторов равно*

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$

Пример 2.4. *В прямоугольной системе координат даны векторы $\vec{a} = \{1,2,-4\}$ и $\vec{b} = \{3,3,7\}$. Найдите их векторное произведение.*

Решение.

По теореме 2.7 имеем

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} =$$
$$= 26\vec{i} - 19\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Таким образом $[\vec{a},\vec{b}] = \{26, -19, -3\}$. □

Замечание. *При решении данной задачи мы воспользовались тем, что орты прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ принято обозначать соответственно $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.*

2.6 Смешанное произведение векторов

Определение 2.19. ***Смешанным произведением*** *трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число*

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = ([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}).$$

Свойства смешанного произведения.

1. a) $(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b},\vec{c},\vec{d}) = \lambda(\vec{a},\vec{c},\vec{d}) + \mu(\vec{b},\vec{c},\vec{d})$, (линейность)
   b) $(\vec{a},\lambda\vec{b}+\mu\vec{c},\vec{d}) = \lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{d}) + \mu(\vec{a},\vec{c},\vec{d})$,
   c) $(\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}+\mu\vec{d}) = \lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) + \mu(\vec{a},\vec{b},\vec{d})$.
2. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$ (антикоммутативность).
3. Если V — объем ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, то

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = V, \text{ если } \{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\} \text{ правая},$$
$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -V, \text{ если } \{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\} \text{ левая}.$$

4. Формула смешанного произведения в координатах

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}, \tag{2.1}$$

   где $\{a^i\}$, $\{b^i\}$, $\{c^i\}$ — координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ соответственно.

5. $|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) & (\vec{a},\vec{c}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & (\vec{b},\vec{b}) & (\vec{b},\vec{c}) \\ (\vec{c},\vec{a}) & (\vec{c},\vec{b}) & (\vec{c},\vec{c}) \end{vmatrix}.$

Пример 2.5. *Найдите смешанное произведение векторов $\vec{a} = \{1, 2, -4\}$, $\vec{b} = \{-3, 0, -1\}$ и $\vec{c} = \{3, 3, 7\}$, заданных в прямоугольной системе координат.*

Решение. По формуле (2.1) имеем

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 75.$$

□

2.7 Двойное векторное произведение векторов

Определение 2.20. ***Двойным векторным произведением*** *векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$.*

Теорема 2.8. *Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справедлива формула*

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}).$$

Пример 2.6. *Найдите двойное векторное произведение векторов $\vec{a} = \{1, 2, -4\}$, $\vec{b} = \{-3, 0, -1\}$ и $\vec{c} = \{3, 3, 7\}$, заданных в прямоугольной системе координат.*

Решение. Найдём скалярные произведения

$$(\vec{a},\vec{b}) = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 + (-4) \cdot (-1) = 1;$$
$$(\vec{a},\vec{c}) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 7 = -19.$$

Теперь по теореме 2.8 имеем

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}) = -19\vec{b} - \vec{c} =$$
$$= -19\{-3, 0, -1\} - \{3, 3, 7\} = \{54, -3, 12\}.$$

□

2.8 Ковариантные и контравариантные координаты

Определение 2.21. ***Контравариантными*** *координатами вектора v (относительно базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$) называют коэффициенты разложения вектора v по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$.*

Другими словами, если в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ для вектора v выполняется $v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3$, то упорядоченный набор чисел (v^1, v^2, v^3) — это *контравариантные координаты* или просто *координаты* вектора v.

Определение 2.22. *Базис $e^* = \{e^1, e^2, e^3\}$ называется* ***двойственным*** *к базису $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, если для всех $i, j = 1, 2, 3$ скалярное произведение*

$$(e_i, e^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

где δ_i^j — символ Кронекера.

Определение 2.23. ***Ковариантными*** *координатами вектора v называют коэффициенты разложения этого вектора по двойственному базису $\{e_1, e_2, e_3\}$.*

Другими словами, если в базисе $e*$ для вектора v выполняется $v = v_1 e^1 + v_2 e^2 + v_3 e^3$, то упорядоченный набор чисел (v_1, v_2, v_3) — это *ковариантные координаты* вектора v.

Естественно возникают вопросы. Всегда ли можно по исходному базису определить двойственный? И как это можно сделать?

Ответы на них дают следующие утверждения.

Теорема 2.9. *Для любого базиса e однозначно определен двойственный базис e^*. При этом справедливы формулы*

$$e^i = g^{ij} e_j,$$

где g^{ij} — элементы матрицы, обратной к матрице Грама, т.е. матрицы, состоящей из элементов вида $g_{ij} = (e_i, e_j)$.

Теорема 2.10. *Пусть* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *— исходный базис. Тогда двойственный базис можно получить по формулам*

$$e^1 = \frac{[e_2, e_3]}{(e_1, e_2, e_3)}, \quad e^2 = \frac{[e_3, e_1]}{(e_1, e_2, e_3)}, \quad e^3 = \frac{[e_1, e_2]}{(e_1, e_2, e_3)}.$$

Другой интересный вопрос — это как связаны между собой контравариантные и ковариантные координаты вектора?

Теорема 2.11. *Пусть* $\{v^i\}$ *и* $\{v_j\}$ *— контравариантные и ковариантные координаты вектора* v. *Тогда справедливы формулы*

$$v^i = g^{ik} v_k,$$
$$v_j = g_{js} v_s.$$

Теорема 2.12. *Пусть векторы* u *и* v *заданы своими координатами:* $u = \{u^i\} = \{u_j\}$ *и* $v = \{v^i\} = \{v_j\}$. *Тогда их скалярное произведение равно*

$$(u, v) = g_{ij} u^i u^j = g^{ij} u_i u_j = u^s v_s.$$

Пример 2.7. *Зная длины базисных векторов* $|e_1| = 2$, $|e_2| = 3$ *и угол между ними* $\omega = \frac{\pi}{3}$, *найти длину вектора* $v = \{-4, 6\}$, *заданного в этом базисе.*

Решение.

Способ 1. По условию задачи $v = -4e_1 + 6e_2$. Тогда

$$\begin{aligned}
|v|^2 = (v, v) = (-4e_1 + 6e_2, -4e_1 + 6e_2) = \\
= 16(e_1, e_1) - 48(e_1, e_2) + 36(e_2, e_2) = \\
= 16|e_1|^2 - 48|e_1||e_2| \cos\omega + 36|e_2|^2 = \\
= 16 \cdot 4 - 48 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 36 \cdot 9 = 244.
\end{aligned}$$

Следовательно, $|v| = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$.

Способ 2. Согласно данным задачи

$$g_{11} = (e_1, e_1) = |e_1|^2 = 4,$$
$$g_{12} = g_{21} = (e_1, e_2) = |e_1||e_2| \cos\omega = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3,$$
$$g_{22} = (e_2, e_2) = |e_2|^2 = 9.$$

Используя последнюю теорему, заключаем

$$|v|^2 = (v, v) = g_{ij}v^iv^j = g_{11}v^1v^1 + 2g_{12}v^1v^2 + g_{22}v^2v^2.$$

Поскольку $v^1 = -4$, $v^2 = 6$, получаем

$$|v|^2 = 4 \cdot (-4)^2 + 3 \cdot (-4) \cdot 6 + 9 \cdot (6)^2 = 244.$$

Поэтому $|v| = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$. $\square$

2.9 Задачи

Занятие 4. Скалярное произведение векторов

1. Даны два вектора $\vec{a} = \{2, 5, 14\}$, $\vec{b} = \{14, 5, 2\}$. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на плоскость Oxy при направлении проектирования, параллельном вектору $\vec{b}$.

2. В трех точках $A = \left(7, \frac{3}{2}\right)$, $B = (6, 7)$, $C = (2, 4)$ помещены массы, соответственно равные 3; 5; 2. Определить центр тяжести этой системы материальных точек.

3. Дан равносторонний треугольник ABC, длины сторон которого равны 1. Вычислить выражение
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}).$$

4. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Вычислить
$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF}).$$

5. Доказать, что при любом расположении точек A, B, C, D на плоскости или в пространстве имеет место равенство
$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0.$$

6. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти вектор $\vec{c}$, являющийся ортогональной проекцией вектора $\vec{b}$ на прямую, направление которой определяется вектором $\vec{a}$.

7. Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\{-14, 2, 5\}$ на прямую с направляющим вектором $\{2, -2, 1\}$.

8. Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2, 0, 2)$ и $D(5, -2, 0)$ разделен на три равные части.

9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M лежит на ребре AA_1, причем $AM : MA_1 = 3 : 1$, а точка N — середина ребра BC. Найдите косинус угла между прямыми MN и DD_1.

10. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\angle BAA_1 = \angle BAD = \angle DAA_1 = 60°$. Найдите длину отрезка BD_1.

Домашнее задание 4

№№ 31, 106, 132, 134, 139, 141, 145.

Занятие 5. Ориентация пространства. Векторное и смешанное произведения векторов

1. Даны два вектора $\vec{a} = \{0, 1, 1\}$ и $\vec{b} = \{1, 0, 1\}$. Найти вектор $\vec{c}$ длины 1, перпендикулярный к вектору $\vec{a}$, образующий с вектором $\vec{b}$ угол $\frac{\pi}{4}$ и инаправленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ имела положительную ориентацию.

2. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A = (-1; 0; -1)$, $B = (0; 2; -3)$, $C = (4; 4; 1)$.

3. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, зная его вершину $A = (1; 2; 3)$ и концы выходящих из него ребер $B = (9; 6; 4)$, $D = (3; 0; 4)$, $A' = (5; 2; 6)$. Для данного параллелипипеда найти угол φ между диагональю AC' и плоскосью $(ABCD)$.

4. Доказать, что если $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

5. Доказать, что сумма векторов, перпендикулярных к граням тетраэдра, равных по абсолютной величине площадям этих граней и направленных в сторону вершин, противоположных граням, равна нулю.

6. Доказать тождества:

$$1)\quad ([\vec{a},\vec{b}][\vec{c},\vec{d}]) = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{c}) & (\vec{a},\vec{d}) \\ (\vec{b},\vec{c}) & (\vec{b},\vec{d}) \end{vmatrix};$$

$$2)\quad [[\vec{a},\vec{b}][\vec{c},\vec{d}]] = \vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a},\vec{c},\vec{d}) - \vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d});$$

$$3)\quad (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d} = (\vec{d},\vec{b},\vec{c})\vec{a} + (\vec{d},\vec{c},\vec{a})\vec{b} + (\vec{d},\vec{a},\vec{b})\vec{c};$$

$$4)\quad (\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = \begin{vmatrix} (\vec{x},\vec{a}) & (\vec{x},\vec{b}) & (\vec{x},\vec{c}) \\ (\vec{y},\vec{a}) & (\vec{y},\vec{b}) & (\vec{y},\vec{c}) \\ (\vec{z},\vec{a}) & (\vec{z},\vec{b}) & (\vec{z},\vec{c}) \end{vmatrix};$$

$$5)\quad (\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) & (\vec{a},\vec{c}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & (\vec{b},\vec{b}) & (\vec{b},\vec{c}) \\ (\vec{c},\vec{a}) & (\vec{c},\vec{b}) & (\vec{c},\vec{c}) \end{vmatrix}.$$

Домашнее задание 5

№№ 176, 177, 183, 185, 191, 195.

Занятие 6. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов в аффинных координатах

1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{1; 3\}$ и $\vec{b} = \{-1; 7\}$, зная, что матрица метрических коэффициентов в базисе $\{e_1, e_2\}$ имет вид

$$\|g_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Найти длину вектора $\vec{a} = \{1; 2; -4\}$, зная, что метрические коэффициенты базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ составляют матрицу

$$\|g_{ij}\| = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Зная длины базисных векторов $|e_1| = |e_2| = 1$ и угол между ними $\varphi = \frac{\pi}{3}$, найти:
   1) длину вектора $\vec{a} = \{-1; 1\}$;
   2) угол α между векторами $\vec{a} = \{0; 1\}$ и $\vec{b} = \{3; 2\}$;

3) площадь S ориентированного параллелограмма, построенного на упорядоченной паре векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
4) координаты векторов двойственного базиса $\{e^1, e^2\}$ в базисе $\{e_1, e_2\}$;
5) длины векторов e^1, e^2;
6) угол θ между векторами e^1, e^2.

4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{1; 2\}$ и $\vec{b} = \{3; 4\}$, первый из которых задан своими координатами в базисе $\{e_1, e_2\}$, а второй — в базисе $\{e^1, e^2\}$.

5. Найти объем ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \{1, 2, 3\}$, $\vec{b} = \{0, 1, 0\}$ и $\vec{c} = \{0, 0, -1\}$, если $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$, $\angle(e_1, e_2) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(e_3, e_1) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(e_2, e_3) = \frac{\pi}{3}$.

Домашнее задание 6

№№ 216, 220, 239, 244, 253.

2.10 Контрольные вопросы и задачи

1. Как найти длину вектора, если известны его координаты?

2. Каков геометрические смысл векторного произведения?

3. Как определить объем параллелепипеда, зная координаты его трех некомпланарных сторон?

4. В треугольнике ABC даны длины его сторон $BC = 5$, $CA = 6$, $AB = 7$. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

5. Найти угол между векторами $\vec{a} = \{2, 5, 6\}$ и $\vec{b} = \{3, -4, 1\}$.

6. Вычислить векторное произведение векторов $\vec{a} = \{2, 0, 4\}$ и $\vec{b} = \{3, 7, -1\}$.

7. Даны три вектора $\vec{a} = \{2, 1, 1\}$, $\vec{b} = \{5, 6, 1\}$, $\vec{c} = \{2, 1, 0\}$. Выясните какую тройку образуют векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — правую, левую, или они компланарны?

8. Даны вершины тетраэдра $A(0, 0, 0)$, $B(1, -3, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(0, 0, 5)$. Найти длину его высоты, проведенной из вершины A.

Библиографический список

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии / П.С. Александров. — Спб.: Издательство «Лань», 2008. — 912 с.

2. Бахвалов С.В. Сборник задач по аналитической геометрии / С.В. Бахвалов, П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. — СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 384 с.

3. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия / А.В. Погорелов. — Москва Ижевск: ЗАО НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 208 с.

4. Постников М.М. Аналитическая геометрия. Лекции по геометрии. Ч.1 : учебное пособие / М.М. Постников. — СПб.: Издательство «Лань» , 2009. – 414 с.

5. Привалов И.И. Аналитическая геометрия / И.И. Привалов. — М.: Издательство Юрайт, 2016. – 312 с.

6. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. Том 2-й / Г.М. Фихтенгольц — СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 466 с.

Издательская лицензия ЛР 020261 от 14.01.1997
Подписано в печать 27.03.2020
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Усл.-печ. л. 2,56. Тираж 100. Заказ 132.

Издательство Алтайского государственного университета

Типография Алтайского государственного университета
656099 Барнаул, ул. Димитрова, 66