МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

М.А. Токарева, А.А. Папин

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРОУПРУГИХ СРЕДАХ

Монография

Барнаул
Издательство
Алтайского государственного
университета
2020

УДК 517.946

ББК 40.322в631я73

Р 248

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор
О.Н. Гончарова
доктор физико-математических наук, профессор
Е.Д. Родионов

Р 248 **Токарева М.А., А.А. Папин**
Краевые задачи для уравнений фильтрации в пороупругих средах: монография / Токарева М.А., А.А. Папин – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2020. – 142 с.
ISBN 978-5-7904-2486-1

Монография посвящена математическим вопросам фильтрации жидкостей в пороупругих средах. Рассмотрена математическая модель, описывающая движение вязкой жидкости в деформируемой вязкоупругой среде. Исследуются вопросы корректности начально-краевых задач для указанных систем уравнений.

Книга будет полезной для студентов, аспирантов и специалистов, интересующихся теорией нелинейных дифференциальных уравнений и их приложениями в механике сплошной среды.

УДК 51-7:631.51(075.8)
ББК 40.322в631я73

ISBN 978-5-7904-2486-1

Предисловие

Актуальность теоретического исследования задач фильтрации в пористых средах связана с их широким применением в решении важных практических задач. Примерами являются: фильтрация вблизи речных плотин, водохранилищ и других гидротехнических сооружений [13]; ирригация и дренаж сельскохозяйственных полей [37]; нефтегазодобыча [25], [26], [28], [57], в частности, динамика трещины гидроразрыва пласта [8], проблемы дегазации угольных и сланцевых месторождений с целью извлечения метана [9]; движение магмы в земной коре [64], [70], геотектоника при исследовании проседания земной коры, процессы, происходящие в осадочных бассейнах [65], [67], и т.д. Построение математических моделей таких процессов затруднено тем, что течение жидкости часто рассматривается в подвижной неоднородной среде, которая характеризуется наличием переменной пористости. Особенностью рассматриваемой в данной работе модели фильтрации жидкости в пористой среде является учет подвижности твердого скелета и его пороупругих свойств. Интерес к этой задаче возникает также в связи с широким применением поверхностных волн, которые возникают в вязкоупругих средах, при взаимодействии трех распространяющихся независимо друг от друга волн: быстрой и медленной продольных, а также поперечной [57]. Поверхностные волны подробно исследуются применительно к задачам сейсмологии, неразрушающего контроля, акустоэлектроники и ряда других направлений [54].

Процессам фильтрации жидкости в пористых средах посвящена обширная литература (см. [78], [79] и приведенные там ссылки). При этом в рассматриваемых задачах, как правило, возникают отличительные характеристики, которые делают невозможным единый подход к моделированию этих процессов. Параметры, входящие в эти уравнения, существенным образом зависят от свойств, как флюидов, так и вмещающей среды. Поэтому в настоящее время существует множество различных моделей пористых сред [10], [92], [93]. Однако в большинстве из них принимается, что твердый пористый скелет неподвижен, т.е. пористость является заданной функцией. Тем самым они могут быть отнесены к теории фильтрации Маскета-Леверетта [5] или теории гомогенизации [72]. В случае двухфазного движения несмешивающихся несжимаемых жидкостей в недеформируемой пористой среде математическая теория процесса построена в работах С.Н. Антонцева, В.Н. Монахова [5], численные решения построены в [19].Вопросам обоснования начально-краевых задач двухфазной фильтрации в недеформируемой пористой среде также посвящены работы [1], [15], [20].

Концепция Терцаги эффективного напряжения для одномерной модели деформации пористой среды является одним из первых инструментов построения моделей пороупругих сред, в которых учитывается подвижность скелета и его пороупругие свойства. В данном подходе эффективное напряжение определяется как разница между общим напряжением и давлением жидкой фазы [86], [87]. Это положение отражает тот факт, что жидкость несет на себе часть нагрузки. В этом подходе основополагающей является связь между деформацией скелета твердой матрицы и процессами течения жидкости. В дальнейшем теория Терцаги была развита Био [53], который представил совместную модель деформирования насыщенной флюидом пористой среды и явился основоположником теории пороупругости. Практически одновременно и независимо близкая теория была развита Френкелем [45]. Позднее аналогичные модели были предложены в работах В.Н. Николаевского, П.П. Золотарева, и Х.А. Рахматуллина [17], [27], [38].

В работе [11] пористость зависела от давления (но деформация пористого скелета не рассматривалась). В работе [93] предложена модель двухфазной фильтрации в деформируемой пористой среде, в которой движение твердого скелета описывалось на основе аналога принципа Терцаги и модифицированного линейного закона Гука. Вопросы обоснования в этой работе не рассматривались. Это было сделано в работах [12], [81], где были построены частные решения.

Все эти модели являются весьма сложными как с теоретической точки зрения, так и в отношении их использования для решения конкретных прикладных задач. На сегодняшний день существуют единичные работы, посвященные обоснованию моделей фильтрации в деформируемых пористых средах. Выполненные в этом направлении математические работы основаны, как правило, на классической теории фильтрации, а вопросы обоснования исследованы только в отдельных модельных случаях. Строгие математические результаты в области фильтрации в деформируемых пористых средах представлены только в нескольких работах, посвященных проблемам существования и единственности решений таких задач. Так, например, в работах [48], [68], [85] на основе ряда упрощающих предположений исходные системы сводились к одному уравнению высокого порядка. В [85] установлена локальная разрешимость задачи Коши в пространствах С.Л.Соболева. В работах [48], [68] исследованы решения типа "простой волны". Численные исследования такого рода задач проведены, например, в работе [82].

В первой главе приведены определяющие уравнения, обозначения и вспомогательные утверждения из гидродинамики, теории функций, функционального анализа и теории дифференциальных уравнений, которые будут необходимы в дальнейшем.

Вторая глава монографии посвящена исследованию разрешимости начально-краевых задач фильтрации жидкости в вязкой деформируемой пористой среде. В параграфе 2.1 сформулирована постановка задачи и доказана локальная по времени однозначная разрешимость в классе гладких функций задачи о нестационарном изотермическом одномерном движении вязкой сжимаемой жидкости в вязкой пористой среде в отсутствие плотности массовых сил. Для простоты и наглядности изложения в параграфе 2.1 в уравнениях отсутствует сила тяжести и тензор скоростей деформации в уравнении баланса сил. В параграфе 2.2 доказана аналогичная теорема в присутствии силы тяжести. В случае полного уравнения импульса системы в целом доказана теорема существования и единственности задачи в гельдеровских классах в параграфе 2.3. В параграфе 2.4 доказана глобальная теорема существования и единственности решения в гладких классах задачи фильтрации несжимаемой жидкости в деформируемой вязкой среде.

В третьей главе описана модель фильтрации вязкой жидкости в деформируемой пористой среде, обладающей преимущественно упругими свойствами. Система уравнений после перехода к переменным Лагранжа сводится к вырождающемуся на решении параболическому уравнению для пористости. Методом интегральных энергетических оценок в параграфе 3.1 установлено свойство конечной скорости распространения возмущений. В параграфе 3.2 установлено свойство метостабильной локализации. Конечное время стабилизации решения получено в параграфе 3.3.

В главе 4 исследуется система уравнений фильтрации вязкой жидкости в вязкоупругой деформируемой пористой среде. В параграфе 4.1 доказана глобальная по времени теорема существования и единственности автомодельного решения задачи. В параграфе 4.2 рассмотрена задача фильтрации в тонком пороупругом слое. В процессе обезразмеривания исходной системы уравнений вводится малый параметр. После предельного перехода по параметру (рассмотрен случай медленных процессов) система уравнений характеризует твердый скелет как среду, обладающую больше упругими свойствами, чем вязкими. Для полученной системы уравнений построены решения в квадратурах.

Работа выполнена в лаборатории математического и компьютерного моделирования в природных и индустриальных системах в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме ”Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики” (номер темы: FZMW-2020-0008). Работа первого соавтора также поддержана грантом РНФ №19-11-00069 ”Анализ краевых задач для возникающих в биологии и медицине математических моделей реологически сложных жидкостей и систем” и грантом президента ”Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей в пороупругих средах и их приложения в динамике снежно-ледового покрова”.

Глава 1

Вспомогательные сведения

В главе приведены определяющие уравнения, обозначения и вспомогательные утверждения из гидродинамики, теории функций, функционального анализа и теории дифференциальных уравнений, которые будут необходимы в дальнейшем.

1 Определяющие уравнения

.

Для каждой составляющей двухфазной среды (скелета s и содержащейся в ней жидкой фазы f) вводятся понятия объемов твердого скелета V_s и пор V_p. Тогда удельный объем пор (пористость, доля объема среды, приходящаяся на пустоты) $\phi = \frac{V_p}{V_t}$, где общий объем $V_t = V_p + V_s$.

Скорость Дарси (удельный расход на единицу площади поверхности) определяется следующей формулой [13]

$$\vec{q}_D = \phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s),$$

где $\vec{v}_f, \vec{v}_s$ – скорости жидкости и скелета соответственно.

Закон сохранения массы для жидкости и твердой фазы в отсутствие фазовых переходов выглядит следующим образом [59]

$$\begin{gathered}\frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t}+\bigtriangledown\cdot(\rho_f\phi\vec{v}_f)=0,\\ \frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t}+\bigtriangledown\cdot((1-\phi)\rho_s\vec{v}_s)=0,\end{gathered}\tag{1.1}$$

где t – время, ρ_f – плотность жидкости, ρ_s – плотность твердой фазы, $\bigtriangledown=(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3})$ – оператор градиента, (x_1,x_2,x_3) – переменные Эйлера.

Закон сохранения массы можно записать в терминах материальной производной ($\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}_s\cdot\bigtriangledown$). Откуда для жидкости получим

$$\frac{d\rho_f\phi}{dt}=-\bigtriangledown\cdot(\rho_f(\vec{q}_D+\phi\vec{v}_s)).\tag{1.2}$$

Для несжимаемой твердой фазы ($\rho_s=const$) уравнение (1.1) можно представить в виде

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}=-(1-\phi)(\bigtriangledown\cdot\vec{v}_s)-\vec{v}_s\cdot\bigtriangledown((1-\phi)),$$

и, следовательно,

$$\bigtriangledown\cdot\vec{v}_s=\frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{dt}.$$

При движении жидкости в деформируемой среде постулируется [59], [73]:

1. общий тензор напряжения σ определяется через тензор напряжения твердой фазы σ_s и жидкой σ_f по правилу:

$$\sigma=(1-\phi)\sigma_s+\phi\sigma_f=(1-\phi)(S_s-p_sI)-\phi p_fI,$$

а полное (общее) давление есть $p_{tot}=(1-\phi)p_s+\phi p_f$, где σ_s,p_s – соответственно тензор напряжения и давление твердой фазы, $S_s = 2\eta\dot{\varepsilon}_D$ – девиатор тензора напряжений, $\dot{\varepsilon}_D = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_s}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial v_s}{\partial \vec{x}}\right)^*\right)$ – тензор скоростей деформации, η – динамическая вязкость твердой фазы, σ_f, p_f – тензор напряжения и давление жидкой фазы;

2. девиатором тензора напряжения в жидкой фазе пренебрегают ($S_f = 0$), потому что вязкость жидкости много меньше, чем сдвиговая вязкость скелета.

В соответствии с принципом Терцаги [86] деформация двухфазной среды определяется через эффективное напряжение $\sigma_e = \sigma + p_f I$. Тогда в случае полного насыщения среды динамическое эффективное давление $p_e = p_{tot} - p_f$ [83].

Заметим, что

$$d\phi = \frac{dV_p}{V_t} - V_p\frac{dV_t}{V_t^2} = \frac{dV_p}{V_t} - \phi\frac{dV_t}{V_t}. \tag{1.3}$$

Если плотность ρ_s твердой фазы постоянна, то $dV_s = 0$ и $dV_t = dV_p$. Из уравнения (1.3) получим

$$d\phi = (1-\phi)\frac{dV_t}{V_t}. \tag{1.4}$$

В работе [50] было выдвинуто предположение, что пористость является функцией эффективного давления $\phi = \phi(p_e)$, в частности: $\phi = \phi_0 \exp\{-bp_e\}$. В подходе, используемом в данном исследовании, объемная сжимаемость двухфазной среды β_t определяется как относительное суммарное изменение объема, реагирующее на изменение приложенного эффективного динамического давления: $\beta_t = -\frac{1}{V_t}(\frac{\partial V_t}{\partial p_e})$.

Уравнение (1.4) примет вид

$$d\phi = -(1-\phi)\beta_t dp_e.$$

Объемная сжимаемость также является функцией пористости, например: $\beta_t(\phi) = \phi^b\beta_\phi$, где β_ϕ – коэффициент сжимаемости, b – положительная постоянная:

$$\beta_\phi = -1/V_p(\partial V_p/\partial p_e).$$

Тогда изменение пористости в случае упругого сжатия может быть записано следующим образом [51], [61]:

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{dt} = -\beta_t(\phi)\frac{dp_e}{dt}.$$

При этом закон вязкой деформации может быть записан как [61], [58], [66], [84]

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{dt} = -\frac{p_e}{\xi},$$

где ξ – объемная вязкость. Аналогичное соотношение используется при изучении переноса магмы в мантии Земли [64], [70].

Объемная вязкость зависит от ϕ, например: $\xi(\phi) = \frac{\eta}{\phi^m}$, где m – положительная постоянная [55], [56], [64], [70].

Таким образом постулируется реологический закон, объединяющий упругую и вязкую сжимаемость [57], [66]

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{dt} = -\beta_t(\phi)\frac{dp_e}{dt} - \frac{p_e}{\xi(\phi)}.$$

Уравнение сохранения импульса для жидкости берется в форме закона Дарси [52], [71]

$$\vec{q}_D = -K \bigtriangledown \left(\frac{P_{ex}}{\rho_f g}\right),$$

где K – гидравлическая проводимость (тензор фильтрации), $K = (k'\rho_f g)/\mu, k', \mu$ – проницаемость и динамическая вязкость жидкости, g – ускорение силы тяжести ($\vec{g} = (0, 0, -g)$), P_{ex} – избыточное давление жидкости, определяемое как разность между давлением жидкости и гидростатическим давлением:$P_{ex} = p_f - p_h$. Отсюда получаем, что

$$\vec{q}_D = -\frac{k'}{\mu}(\bigtriangledown p_f + \rho_f \vec{g}).$$

В некоторых случаях коэффициенты k', β_t, ξ могут быть опытным путем определены несколько иначе. В частности они могут иметь следующий вид: $\beta_t = \phi^b \beta_\phi, \xi = \eta/\phi^m$, $k' = k\phi^n$, где k – проницаемость, $b = 1/2, m \in [0,2], n = 3$ [57].

Законы сохранения импульсов для каждой из фаз имеют вид [65]

$$\nabla \cdot (\phi \sigma_f) + \rho_f \phi \vec{g} + M = 0,$$

$$\nabla \cdot ((1-\phi)\sigma_s) + \rho_s (1-\phi)\vec{g} - M = 0,$$

где M – межфазный обмен импульсом.

Складывая эти уравнения, получим уравнение сохранения импульса системы "твердая матрица - поровая жидкость", а именно: уравнение несжимаемой деформации твердого скелета с учетом влияния порового давления жидкости [51], [59], [73]:

$$\nabla \cdot \sigma + \rho_{tot} \vec{g} = 0,$$

где $\rho_{tot} = (1-\phi)\rho_s + \phi\rho_f$ - средняя плотность среды.

В развернутой форме предыдущее уравнение принимает вид [65]

$$\rho_{tot}\vec{g} + div\left((1-\phi)\eta\left(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \vec{x}} + (\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \vec{x}})^*\right)\right) - \nabla p_{tot} = 0.$$

В некоторых прикладных задачах уравнение баланса сил используется в виде [59], [65], [70]

$$-\nabla p_{tot} + \rho \vec{g} = 0.$$

Таким образом, уравнения модели при отсутствии фазовых переходов имеют вид [57], [59], [65], [73]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t}+div((1-\phi)\rho_s\vec{v_s})=0,\\ \frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t}+div(\rho_f\phi\vec{v_f})=0,\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\phi(\vec{v}_f-\vec{v}_s)=-\frac{k\phi^n}{\mu}(\nabla p_f+\rho_f\vec{g}), \tag{1.6}$$

$$\nabla\cdot\vec{v}_s=-a_1(\phi)p_e-a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t}+\vec{v}_s\cdot\nabla p_e), \tag{1.7}$$

$$\nabla\cdot\sigma+\rho_{tot}\vec{g}=0,\quad \rho_{tot}=\phi\rho_f+(1-\phi)\rho_s, \tag{1.8}$$

$$p_{tot}=\phi p_f+(1-\phi)p_s, p_e=(1-\phi)(p_s-p_f). \tag{1.9}$$

Данная квазилинейная система составного типа описывает пространственное нестационарное изотермическое движение сжимаемой жидкости в вязкоупругой среде. Здесь $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_s, \vec{v}_f$ – соответственно истинные плотности и скорости фаз; ϕ – пористость; $\vec{g}=(0,0,-g)$ – плотность массовых сил; k – проницаемость, μ – динамическая вязкость жидкости ; $a_1(\phi), a_2(\phi)$ – параметры пороупругой среды, ; p_{tot} – общее давление, ρ_{tot} – общая плотность. Задача записана в эйлеровых координатах (x_1, x_2, x_3), t. Истинная плотность твердой фазы ρ_s принимается постоянной. Система (1.5)–(1.9) является замкнутой, если $p_f = p(\rho_f)$ или $\rho_f = const$. В общем случае искомыми являются величины ϕ, ρ_f, $\vec{v}_s$, $\vec{v}_f$, p_f, p_s.

Численные исследования различных начально-краевых задач для системы уравнений (1.5)–(1.9) проводились в работах [57], [73], [94]. Вопросы обоснования в данных работах не рассматривались.

2 Функциональные пространства

Пусть Ω – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $S=\partial\Omega$ в евклидовом пространстве R^n, $n\geq 1$.

Как правило, используем обозначение $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, где x_i, $i = 1, \ldots, n$ – декартовы координаты в R^n. Кроме того, для каждого числа $t \in (0, T)$, $T = \mathrm{const} > 0$ полагаем $Q_t = \Omega \times (0, t)$, $Q = Q_T$. Также используются обозначения $\overline{Q}_t = \overline{\Omega} \times [0, t]$, $\overline{Q} = \overline{Q}_T$, где $\overline{\Omega}$ – замыкание множества Ω, $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$.

Приведем ряд функциональных пространств на Ω, $\overline{\Omega}$, Q и $\overline{Q}$, которые используются в дальнейшем.

Пространство Лебега $L_q(\Omega)$, $1 \le q \le \infty$ – множество вещественных измеримых функций, суммируемых с показателем q. Норма в $L_q(\Omega)$ определяется следующей формулой:

$$
\begin{gathered}
||u||_{L_q(\Omega)} = (\int\limits_{\Omega} |u(x)|^q d\Omega)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \le q < \infty, \\
||u||_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname{esssup}_{x \in \Omega} |u(x)|, \quad q = \infty.
\end{gathered}
\tag{1.10}
$$

Пространство $L_{p,q}(Q)$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$ – анизотропное пространство Лебега вещественных измеримых функций с нормой

$$
\begin{gathered}
||u||_{L_{p,q}(Q)} = \left(\int\limits_0^T (\int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^p d\Omega\big)^{\frac{q}{p}} dt\right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \le p, q < \infty, \\
||u||_{L_{\infty,q}(Q)} = \left(\int\limits_0^T \big(\operatorname{esssup}_{x \in \Omega} |u(x,t)|\big)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}, \quad p = \infty, \\
||u||_{L_{p,\infty}(Q)} = \operatorname{esssup}_{t \in (0,T)} ||u(t)||_{L_p(\Omega)}, \quad q = \infty.
\end{gathered}
\tag{1.11}
$$

Иногда, для краткости записи, будем использовать обозначения

$$
||u||_{L_q(\Omega)} = ||u||_{q,\Omega}, \quad ||u||_{L_{p,q}(Q)} = ||u||_{p,q,Q}, \quad (\int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^2 d\Omega\big)^{\frac{1}{2}} = ||u(t)
$$

Часто функции, зависящие от переменных $x \in \Omega$ и $t \in (0, T)$, рассматриваются как функции аргумента t со значениями в банаховом пространстве функций, определенных на множестве Ω [53; 274].

Пространство $L_q(0, T; E)$, $1 \le q \le \infty$ – это множество функций $u(t)$, заданных на $(0, T)$ и действующих в E, измеримых по Бохнеру на $(0, T)$ и обладающих конечной нормой

$$||u||_{L_q(0,T;E)} = \left(\int\limits_0^T ||u(t)||_E^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \le q < \infty, \tag{1.12}$$
$$||u||_{L_\infty(0,T;E)} = \operatorname{esssup}_{t \in (0,T)} ||u(t)||_E, \quad q = \infty.$$

Пространство $W_p^l(\Omega)$, *l – натуральное,* $1 \le p \le \infty$ – множество вещественных функций $u(x)$ из пространства $L_p(\Omega)$, имеющих обобщенные производные в смысле С.Л. Соболева [203; 204] всех видов $D_x^\alpha u$ до порядка l включительно, суммируемые по Ω со степенью p. Норма в $W_p^l(\Omega)$ определяется равенством

$$||u||_{W_p^l(\Omega)} = ||u||_{p,\Omega}^{(l)} = \sum_{|\alpha|=0}^{l} \sum_{(\alpha)} ||D_x^\alpha u||_{L_p(\Omega)}, \tag{1.13}$$

где знак $\sum\limits_{(\alpha)}$ означает суммирование по всевозможным производным $u(x)$ порядка α. Определение пространств $W_p^l(\Omega)$ при l положительных и нецелых дано, например, в работах [133; 131; 203; 209].

Теперь определим функциональные пространства, в определении которых отсутствуют условия суммируемости.

Пространство $C(\overline{\Omega})$ – множество непрерывных функций, определенных на множестве $\overline{\Omega}$, с нормой

$$||u||_{C(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|. \tag{1.14}$$

Пространство $C(\Omega)$ – множество непрерывных функций, определенных на множестве Ω, с конечной нормой

$$||u||_{C(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|. \tag{1.15}$$

Аналогично определяются функциональные пространства $C(Q)$, $C(\overline{Q})$.

Для областей с кусочно-гладкой границей без двойных точек пространства Гельдера могут быть определены следующим образом.

Пространство $C^\alpha(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1]$ – множество вещественных функций, определенных на $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α. Норма в $C^\alpha(\overline{\Omega})$ определяется формулой

$$||u||_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| + \sup_{x_1,x_2\in\overline{\Omega}} \frac{|u(x_1)-u(x_2)|}{|x_1-x_2|^\alpha}. \tag{1.16}$$

Пространство $C^k(\overline{\Omega})$, *k – натуральное число* – множество вещественных непрерывных функций, определенных на $\overline{\Omega}$, имеющих в $\overline{\Omega}$ непрерывные производные до порядка k включительно. Норма в $C^k(\overline{\Omega})$ задается формулой

$$||u||_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|m|=0}^{k} \sum_{(m)} ||D_x^m||_{C(\overline{\Omega})}. \tag{1.17}$$

Аналогично определяется функциональное пространство $C^k(\overline{Q})$.

Введем обозначение (константа Гельдера)

$$H^\alpha(u) = \sup_{x_1,x_2\in\overline{\Omega}} \frac{|u(x_1)-u(x_2)|}{|x_1-x_2|^\alpha}.$$

Пространство $C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$, *k – натуральное число,* $\alpha \in (0,1]$ – множество вещественных непрерывных функций, определенных на $\overline{\Omega}$, имеющих в $\overline{\Omega}$ производные до порядка k включительно, непрерывные по Гельдеру с показателем α. Норма в $C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ определяется формулой

$$||u||_{C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})} = \sum_{|m|=0}^{k} \sum_{(m)} ||D_x^m||_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{(k)} H^{\alpha}(D_x^k u). \quad (1.18)$$

Пространство $C^{k+\alpha,m+\beta}(\overline{Q})$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$, k, m *– целые неотрицательные числа* – множество вещественных непрерывных функций в $\overline{Q}$, имеющих в $\overline{Q}$ по переменным x производные до порядка k, а по переменной t – до порядка m, причем эти производные непрерывны по Гельдеру по x с показателем α, а по t – с показателем β. Норма в этом пространстве определяется по формуле

$$||u||_{C^{k+\alpha,m+\beta}(\overline{Q})} = \sum_{|i|=0}^{k} \sum_{(i)} ||D_x^i u||_{C(\overline{Q})} + \sum_{j=1}^{m} ||D_t^j u||_{C(\overline{Q})} +$$
$$+ H_x^{\alpha}(D_x^k u) + H_t^{\beta}(D_x^k u) + H_x^{\alpha}(D_t^m u) + H_t^{\beta}(D_t^m u). \quad (1.19)$$

Здесь $D_x^i u$ – производные порядка $|i| = i_1 + \ldots + i_n$ по переменной x, D_t^j – производная по t порядка j, символами H_x^{α} и H_t^{β} обозначаются константы гельдеровской непрерывности по x и t, т.е.

$$H_x^{\alpha}(u(x,t)) = \sup_{x_1, x_2 \in \overline{\Omega},\, t \in [0,T]} \left(\frac{|u(x_1,t) - u(x_2,t)|}{|x_1 - x_2|^{\alpha}} \right),$$

$$H_t^{\beta}(u(x,t)) = \sup_{x \in \overline{\Omega},\, t_1, t_2 \in [0,T]} \left(\frac{|u(x,t_1) - u(x,t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\beta}} \right),$$

а величина $H_x^{\alpha}(D_x^k u)$ – сумма констант Гельдера по всевозможным производным порядка $|k|$ по переменной x, величина $H_t^{\beta}(D_x^k u)$ – сумма констант Гельдера по переменной t.

Отметим, что все перечисленные пространства функций являются полными нормированными, т.е. банаховыми.

Нуль сверху над обозначением соответствующего пространства означает, что берется лишь подпространство указанного пространства, полученное замыканием в данной норме множества бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на границе множества.

3 Специальные неравенства и теоремы вложения

При получении априорных оценок в рассматриваемых задачах часто будут использоваться неравенства, которые мы приведем в этом пункте.

Лемма 1.3.1 (неравенство Юнга [81; 204; 208]). Для любых чисел $a \geq 0$, $b \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $p > 1$ справедливо неравенство

$$ab \leq \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{1}{q}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^q, \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Иногда будет использоваться неравенство Коши с параметром $\varepsilon > 0$, которое является частным случаем предыдущей оценки при $p = q = 2$.

Лемма 1.3.2 (неравенство Гельдера [81; 208; 204]). Для любых положительных чисел p и q с условием $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ и для любых функций $u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega)$ справедливо неравенство

$$||uv||_{L_1(\Omega)} \leq ||u||_{L_p(\Omega)} \cdot ||v||_{L_q(\Omega)}.$$

Теперь приведем различные аналоги известного неравенства Гронуолла [263], которые будут часто использоваться в дальнейшем.

Лемма 1.3.3 [131; 263]. Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная на $[0,T]$ функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех $t \in (0,T)$ неравенству

$$\frac{dy(t)}{dt} \le a(t)y(t) + b(t)$$

с неотрицательными и суммируемыми на $(0,T)$ функциями $a(t)$ и $b(t)$. Тогда для всех $t \in (0,T)$ справедливо неравенство

$$y(t) \le \left(y(0) + \int\limits_0^t b(s) \exp\left(-\int\limits_0^s a(\tau)d\tau \right) ds \right) \exp\left(\int\limits_0^t a(s)ds \right).$$

Лемма 1.3.4 [131; 263]. Пусть неотрицательная функция $y(t) \in L_\infty(0,T)$ удовлетворяет для почти всех значений $t \in (0,T)$ неравенству

$$y(t) \le c + \int\limits_0^t (a(s)y(s) + b(s))ds,$$

где $c = \mathrm{const} \ge 0$, $a(t) \in L_1(0,T)$, $b(t) \in L_1(0,T)$, $b(t) \ge 0$.

Тогда для почти всех значений $t \in (0,T)$ справедливо неравенство

$$y(t) \le \left(c + \int\limits_0^t b(s) \exp\left(-\int\limits_0^s a(\tau)d\tau \right) ds \right) \exp\left(\int\limits_0^t a(s)ds \right).$$

Кроме приведенных выше специальных неравенств нам понадобятся и специальные мультипликативные неравенства.

Лемма 1.3.5 [131; 133]. Пусть ограниченная область $\Omega \subset R^n$ удовлетворят условию конуса. Тогда для произвольной функции

$u(x) \in \overset{o}{W}{}^{1}_{m}(\Omega)$ или $u(x) \in W^1_m(\Omega)$, $\displaystyle\int_\Omega u\, d\Omega = 0$, $m \geq 1$ и числа $r \geq 1$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{q,\Omega} \leq \beta \|\nabla u\|^{\alpha}_{m,\Omega} \|u\|^{1-\alpha}_{r,\Omega}, \tag{1.20}$$

где $\alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^{-1}$, причем если $m \geq n = 1$, то $q \in [r, \infty]$, а $\beta = \left(1 + \frac{m-1}{m} r\right)^{\alpha}$, и при изменении q от r до ∞ число α меняется от нуля до $\frac{m}{m+r(m-1)}$, включая оба конца.

Если $n > 1$ и $m < n$, то $q \in \left[r, \frac{mn}{n-m}\right]$ при $r \leq \frac{mn}{n-m}$, при $r \geq \frac{mn}{n-m}$ можно взять $q \in \left[\frac{mn}{n-m}, r\right]$, а $\beta = \left(\frac{m(n-1)}{n-m}\right)^{\alpha}$, и при изменении q между r и $\frac{mn}{n-m}$ число α меняется между 0 и 1, включая оба конца.

Если $n > 1$ и $m \geq n$, то $q \in [r, \infty)$, а $\beta = \max\left\{q\frac{(n-1)}{n}, 1 + r\frac{(m-1)}{m}\right\}^{\alpha}$, и при изменении q от r до ∞ число α меняется от нуля до $\frac{nm}{nm+r(m-n)}$, причем правый конец исключается. Если $n > 1$ и $m > n$, то неравенство (1.3.1) справедливо и для $q = \infty$.

Неравенство (1.3.1) при $m < n$ является частным случаем более общих мультипликативных неравенств, доказанных в [247], [61].

Отметим, что неравенство вида (1.3.1), с небольшим добавлением, справедливо для функций класса $W^1_m(\Omega)$. Для этого осуществляется замена $v(x) = u(x) - M$, $M = (\operatorname{mes}\Omega)^{-1} \cdot \displaystyle\int_\Omega u d\Omega$ и для функции $v(x)$ применяется неравенство (1.3.1). После преобразований получается неравенство

$$\|u\|_{q,\Omega} \leq C \cdot \left(\|u\|_{1,\Omega} + \|\nabla u\|^{\alpha}_{m,\Omega} \cdot \|u\|^{1-\alpha}_{r,\Omega}\right), \tag{1.21}$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от функции $u(x)$.

Глава 2

Классическая разрешимость одномерных задач фильтрации жидкости в вязкой деформируемой среде

В главе доказывается существование локального решения в случае сжимаемой жидкости и глобального решения в случае одномерного движения несжимаемой жидкости в вязкой пористой среде при постоянной температуре и в отсутствие фазовых переходов.

1 Локальная разрешимость по времени

1.1 Постановка задачи и формулировка основного результата

Изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа:

$$\begin{gathered}\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)\rho_s v_s)=0,\\ \frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_f\phi v_f)=0,\end{gathered} \tag{2.1}$$

$$\phi(v_f-v_s)=-k(\phi)(\frac{\partial p_f}{\partial x}-\rho_f g), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x}=-\frac{1}{\xi(\phi)}p_e,\quad p_e=p_{tot}-p_f, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}=-\rho_{tot}g,\quad p_{tot}=\phi p_f+(1-\phi)p_s,\\ \rho_{tot}=\phi\rho_f+(1-\phi)\rho_s,\end{gathered} \tag{2.4}$$

решаемая в области $(x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega=(0,1)$, при краевых и начальных условиях

$$\begin{gathered}v_s\mid_{x=0,x=1}=v_f\mid_{x=0,x=1}=0,\\ \phi\mid_{t=0}=\phi^0(x),\quad \rho_f\mid_{t=0}=\rho^0(x).\end{gathered} \tag{2.5}$$

Данная начально-краевая задача описывает одномерное нестационарное движение сжимаемой жидкости в пороупругой среде. Для описания процесса используются законы сохранения масс для каждой из фаз, закон Дарси для жидкой фазы, учитывающий движение твердого скелета, реологическое соотношение типа Максвелла, закон сохранения импульса системы в целом. Здесь ρ_f, ρ_s, v_f, v_s – соответственно истинные плотности и скорости жидкой и твердой фаз, ϕ – пористость, p_f, p_s – соответственно давления жидкой и твердой фаз, p_e – эффективное давление, p_{tot} – общее давление, ρ_{tot} – плотность двухфазной среды, g – плотность массовых сил; кроме того, $k(\phi)$ – коэффициент фильтрации, $\xi(\phi)$ – коэффициент объемной вязкости (заданные функции). Задача записана в эйлеровых координатах x, t. Истинная плотность твердых частиц ρ_s принимается постоянной. Искомыми являются величины ϕ, ρ_f, v_f, v_s p_f, p_s. Система уравнений (2.1) – (2.4) замыкается заданием уравнения состояния жидкой фазы $p_f = p_f(\rho_f)$ (в частности, допускается часто используемая в прикладных задачах зависимость $\frac{dp_f}{d\rho_f} = \frac{1}{\beta_f \rho_f}$, где β_f – коэффициент сжимаемости жидкой фазы [73]).

В настоящем параграфе доказана однозначная локальная разрешимость задачи (2.1)–(2.5) в случае, когда $g = 0$ и ρ_f – функция давления.

Здесь и далее будем придерживаться следующих обозначений. Рассмотрим на Ω и Q_T ряд функциональных пространств, придерживаясь обозначений, принятых в [21; Гл. 1]. Пусть $||\cdot||_{q,\Omega}$ норма в пространстве Лебега $L_q(\Omega)$, $q \in [1,\infty]$. Для краткости положим $||\cdot||_q = ||\cdot||_{q,\Omega}$, $||\cdot|| = ||\cdot||_{2,\Omega}$. Также используется пространство Гельдера $C^\alpha(\Omega)$, $C^{k+\alpha}(\Omega)$, k – натуральное, $\alpha \in (0,1]$ с нормами:

$$||f||_{C^\alpha(\Omega)} \equiv |f|_{\alpha,\Omega} = |f|_{0,\Omega} + H^\alpha_x(f),\ |f|_{0,\Omega} = \max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)|,$$

$$H^\alpha_x(f) = \sup_{x_1,x_2\in\Omega} |f(x_1) - f(x_2)||x_1 - x_2|^{-\alpha},$$

$$||f||_{C^{k+\alpha}(\Omega)} \equiv |f|_{k+\alpha,\Omega} = \sum_{m=0}^{k} ||D^m_x f||_{0,\Omega} + H^\alpha(D^k_x f).$$

Для функций, определенных на Q_T, нам потребуется пространство $C^{k+\alpha,m+\beta}(Q_T)$, где k, m – натуральные, $(\alpha,\beta) \in (0,1]$, с нормой

$$||f||_{C^{k+\alpha,m+\beta}(Q_T)} \equiv |f|_{k+\alpha,m+\beta,Q_T} = \sum_{l=0}^{k} ||D^l_x f||_{0,Q_T} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}||D_t^j f||_{0,Q_T}+H_x^\alpha(D_x^k f)+H_t^\beta(D_x^k f)+H_x^\alpha(D_t^m f)+H_t^\beta(D_t^m f),$$

где

$$H_x^\alpha(f(x,t))=\sup_{x_1,x_2\in\Omega,t\in(0,T)}|f(x_1,t)-f(x_2,t)||x_1-x_2|^{-\alpha},$$

$$H_t^\beta(f(x,t))=\sup_{t_1,t_2\in(0,T),x\in\Omega}|f(x,t_1)-f(x,t_2)||t_1-t_2|^{-\beta}.$$

В случае $k=m$ и $\alpha=\beta$ используется обозначение $C^{k+\alpha}(Q_T)$.

В данной работе под решением задачи (2.1)–(2.5) будем понимать совокупность функций $v_s\in C^{3+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$ $(\phi,\rho_f,p_f,p_s)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$, $v_f\in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$ таких, что $0<\phi<1$, $\rho_f>0$, $p_f>0$. Эти функции удовлетворяют уравнениям (2.1)–(2.4) и начальным и граничным условиям (2.5) как непрерывные в $\overline{Q}_T$ функции.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1.1.1. *Пусть $g=0$ и данные задачи (2.1)–(2.5) подчиняются следующим условиям:*
1) функции $k(\phi),\xi(\phi),p_f(\rho_f)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $\phi\in(0,1),\rho_f>0$, и удовлетворяют условиям

$$k_0^{-1}\phi^{q_1}(1-\phi)^{q_2}\le k(\phi)\le k_0\phi^{q_3}(1-\phi)^{q_4},$$

$$1/\xi(\phi)=a_0(\phi)\phi^{\alpha_1}(1-\phi)^{\alpha_2-1},$$

$$0<R_1\le a_0(\phi)\le R_2,\quad k_0^{-1}\rho_f^{q_5}\le p_f(\rho_f)\le k_0\rho_f^{q_6},$$

$$k_0^{-1}\rho_f^{q_7}\le\frac{\partial p_f(\rho_f)}{\partial\rho_f}\le k_0\rho_f^{q_8},$$

где $k_0,\alpha_i,R_i,i=1,2$ – положительные постоянные, $q_1,...,q_8$ – фиксированные вещественные числа,
2) начальные условия ϕ^0,ρ^0 удовлетворяют следующим

условиям гладкости: $\phi^0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), \rho^0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *и условиям согласования*

$$\frac{dp_f(\rho^0)}{dx} \mid_{x=0,x=1} = 0,$$

а также удовлетворяют неравенствам

$$0 < m_0 \leq \phi^0(x) \leq M_0 < 1, 0 < m_1 \leq \rho^0(x) \leq M_1 < \infty,$$

$$x \in \overline{\Omega},$$

где m_0, M_0, m_1, M_1 *– известные положительные постоянные.*
Тогда задача (2.1)–(2.5) *имеет единственное локальное классическое решение, т.е. существует значение* $t_0 \in (0, T)$ *такое, что*

$$v_s(x,t) \in C^{3+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}), v_f(x,t) \in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}),$$

$$(\phi(x,t), p_s(x,t), p_f(x,t), \rho_f(x,t)) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}).$$

Более того $0 < \phi(x,t) < 1$, $\rho_f(x,t) > 0$ *в* $\overline{Q}_{t_0}$.

1.2 Локальная разрешимость

В условиях теоремы в силу (2.4) имеем $p_{tot} = p^0(t)$. Следуя [5], [74] преобразуем систему (2.1)–(2.3). Пусть $\bar{x} = \bar{x}(\tau, x, t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} = v_s(\bar{x}, \tau), \quad \bar{x} \mid_{\tau=t} = x.$$

Положим $\hat{x} = \bar{x}(0, x, t)$ и возьмем за новые переменные $\hat{x}$ и t. Тогда $1 - \phi(\hat{x}, t) = (1 - \phi^0(\hat{x}))\hat{J}(\hat{x}, t)$, где $\hat{J}(\hat{x}, t) = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}(\hat{x}, t)$ – якобиан перехода. Вместо (2.1)–(2.3) имеем

$$\frac{\partial(1-\hat{\phi})}{\partial t} + \frac{(1-\hat{\phi})^2}{1-\phi^0}\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat\rho_f\hat\phi)+\frac{(1-\hat\phi)}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial \hat x}(\hat\rho_f\hat\phi\hat v_f)=\hat v_s\frac{(1-\hat\phi)}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial \hat x}(\hat\rho_f\hat\phi),$$

$$\hat\phi(\hat v_s-\hat v_f)=k(\hat\phi)\frac{(1-\hat\phi)}{1-\phi^0}\frac{\partial \hat p_f}{\partial \hat x},\quad \frac{(1-\hat\phi)}{1-\phi^0}\frac{\partial \hat v_s}{\partial \hat x}=-a_1(\hat\phi)\hat p_e,$$

где $a_1(\hat\phi)=1/\xi(\hat\phi)$.

Поскольку

$$\hat v_s\frac{\partial}{\partial \hat x}(\hat\rho_f\hat\phi)=\frac{\partial}{\partial \hat x}(\hat\rho_f\hat\phi\hat v_s)-\hat\rho_f\hat\phi\frac{\partial \hat v_s}{\partial \hat x},$$

то уравнение неразрывности для жидкой фазы можно привести к виду

$$\frac{1}{(1-\hat\phi)}\frac{\partial}{\partial t}(\hat\rho_f\hat\phi)+\frac{1}{1-\phi^0}\frac{\partial}{\partial \hat x}(\hat\rho_f\hat\phi(\hat v_f-\hat v_s))+\frac{1}{1-\phi^0}\hat\rho_f\hat\phi\frac{\partial \hat v_s}{\partial \hat x}=0.$$

Используя уравнение неразрывности для твердой фазы, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat\rho_f\frac{\hat\phi}{1-\hat\phi})+\frac{1}{(1-\phi^0)}\frac{\partial}{\partial \hat x}(\hat\rho_f\hat\phi(\hat v_f-\hat v_s))=0.$$

Переходя от $(\hat x,t)$ к массовым переменным Лагранжа (y,t) по правилу

$$(1-\phi^0(\hat x))d\hat x=dy,\quad y(\hat x)=\int\limits_0^{\hat x}(1-\phi^0(\eta))d\eta\in[0,1],$$

опуская крышки и формально заменяя y на x, приходим к следующей системе

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial(1-\phi)}{\partial t}+(1-\phi)^2\tfrac{\partial v_s}{\partial x}=0,\\ \tfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f\tfrac{\phi}{1-\phi}\right)+\tfrac{\partial}{\partial x}(\rho_f\phi(v_f-v_s))=0,\end{gathered}\tag{2.6}$$

$$\phi(v_s - v_f) = k(\phi)(1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x}, \tag{2.7}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi)p_e, \quad p_e = p^0(t) - p_f. \tag{2.8}$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$t' = \frac{t}{t_1}, \quad x' = \frac{x}{L}, \quad v_s' = \frac{v_s}{v_1}, \quad v_f' = \frac{v_f}{v_1}, \quad \rho_f' = \frac{\rho_f}{\rho_s},$$

$$p_f' = \frac{p_f}{p_1}, \quad p_s' = \frac{p_s}{p_1}, \quad p_e' = \frac{p_e}{p_1}, \quad p_{tot}' = \frac{p_{tot}}{p_1},$$

$$a_1'(\phi) = \frac{a_1(\phi)}{a^0}, \quad k'(\phi) = \frac{k(\phi)}{k_1},$$

где

$$L = \int\limits_0^1 (1-\phi^0(\eta))d\eta, \quad t_1 = \frac{L}{v_1}, \quad a^0 = \frac{v_1}{Lp_1}, \quad k_1 = \frac{v_1 L}{p_1},$$

v_1, p_1 – заданные положительные величины, имеющие размерность скорости и давления соответственно.

Тогда область изменения x' есть единичный отрезок $[0,1]$, а система уравнений сохранит свою форму (штрихи опускаются).

Используя последнее уравнение системы (2.6)–(2.8) и условия $v_s|_{x=0,1} = 0$, находим

$$p^0(t) = \int\limits_0^1 \frac{a_1(\phi)}{1-\phi} p_f dx \left(\int\limits_0^1 \frac{a_1(\phi)}{1-\phi} dx \right)^{-1} \equiv P^0(\phi, \rho_f).$$

Второе уравнение (2.6) с учетом закона Дарси (2.7) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f \frac{\phi}{1-\phi}) - \frac{\partial}{\partial x}(\rho_f k(\phi)(1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x}) = 0.$$

Из первого уравнения (2.6) и уравнения (2.8) следует:

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = a_1(\phi)(p_f - p^0).$$

Это уравнение можно представить в виде

$$\frac{\partial G(\phi)}{\partial t} = p_f - p^0,$$

где функция $G(\phi)$ определяется равенством

$$\frac{\partial G(\phi)}{\partial \phi} = \frac{1}{(1-\phi)a_1(\phi)}.$$

Положим

$$a(\phi) = \frac{\phi}{1-\phi}, \quad K(\phi) = k(\phi)(1-\phi), \quad b(\rho_f) = \rho_f \frac{\partial p_f(\rho_f)}{\partial \rho_f}.$$

Учитывая условия (2.5), приходим к следующей задаче для отыскания функций ρ_f, ϕ:

$$\frac{\partial}{\partial t}(a(\phi)\rho_f) - \frac{\partial}{\partial x}(K(\phi)b(\rho_f)\frac{\partial \rho_f}{\partial x}) = 0, \qquad (2.9)$$

$$\frac{\partial G(\phi)}{\partial t} = p_f(\rho_f) - p^0(t), \qquad (2.10)$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial x} \mid_{x=0,x=1} = 0, \quad \rho_f \mid_{t=0} = \rho^0(x), \quad \phi \mid_{t=0} = \phi^0(x). \quad (2.11)$$

Лемма 1.1.1. *Пусть данные задачи* (2.9)–(2.11) *удовлетворяют условиям теоремы 1.1.1. Тогда задача* (2.9)–(2.11) *имеет единственное локальное решение, т.е. существует значение t_0 такое, что*

$$(\phi(x,t), \rho_f(x,t)) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}).$$

Более того, $0 < \phi(x,t) < 1$, $\rho_f(x,t) > 0$ *в* $\overline{Q}_{t_0}$.

Разрешимость задачи (2.9)–(2.11) устанавливается с помощью теоремы Тихонова–Шаудера о неподвижной точке: если V – компактное выпуклое множество банахова пространства B и оператор Λ отображает V в себя непрерывно в норме B, то на V имеется неподвижная точка [47; с.227].

Поскольку функция $\psi = G(\phi)$ при $\phi \in (0,1)$ строго монотонна, то существует обратная функция $\phi = G^{-1}(\psi)$. Положим $\rho(x,t) = \rho_f(x,t) - \rho^0(x)$, $\omega(x,t) = G(\phi) - G(\phi^0)$. Представим уравнения (2.9),(2.10) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a(\omega)(\rho+\rho^0)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(\omega)b(\rho+\rho^0)\frac{\partial(\rho+\rho^0)}{\partial x}\right), \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = p_f(\rho+\rho^0) - p^0(t). \tag{2.13}$$

Здесь $a(\omega) = \frac{\phi(\omega)}{1-\phi(\omega)}, K(\omega) = k(\phi(\omega))(1-\phi(\omega))$, $\phi(\omega) = G^{-1}(\omega + G(\phi^0))$. Причем

$$\rho\mid_{t=0} = \omega\mid_{t=0} = \frac{\partial(\rho+\rho^0)}{\partial x}\mid_{x=0,x=1} = 0. \tag{2.14}$$

В качестве банахова пространства выберем пространство $C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_{t_0})$, где β – любое число из отрезка $(0,\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$. Положим

$$V = \{\bar{\rho}(x,t), \bar{\omega}(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0})|$$

$$\bar{\rho}\mid_{t=0} = \bar{\omega}\mid_{t=0} = \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial x}\mid_{x=0,x=1} = 0,$$

$$G\left(\frac{m_0}{2}\right) - G(\phi^0) \le \bar{\omega}(x,t) \le G\left(\frac{M_0+1}{2}\right) - G(\phi^0) < \infty,$$

$$\frac{m_1}{2} - \rho^0(x) \le \bar{\rho}(x,t) \le 2M_1 - \rho^0(x) < \infty, \quad (x,t) \in Q_{t_0},$$

$$(|\bar{\omega}|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}}, |\bar{\rho}|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}}) \le K_1,$$

$$(|\bar{\omega}|_{2+\alpha,(2+\alpha)/2,Q_{t_0}}, |\bar{\rho}|_{2+\alpha,(2+\alpha)/2,Q_{t_0}}) \leq K_1 + K_2\},$$

где K_1 - произвольная положительная постоянная, а положительная постоянная K_2 будет указана позже. Заметим, что на множестве V справедливы неравенства: $0 < \frac{m_0}{2} \leq \phi(\bar{\omega}) \leq \frac{M_0+1}{2} < 1, \quad a(\bar{\omega}) > 0, \quad K(\bar{\omega}) > 0.$

Построим оператор Λ, отображающий V в V. Пусть $\bar{\omega}, \bar{\rho} \in V$. Используя (2.13) определим функцию ω равенством

$$\omega(x,t) = \int\limits_0^t \left(p_f(\bar{\rho}(x,\tau) + \rho^0(x)) - \int\limits_0^1 \left(\frac{a_1(\phi(\bar{\omega}))}{1-\phi(\bar{\omega})} p_f(\bar{\rho}(x,\tau) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \rho^0(x)) dx \right) \left(\int\limits_0^1 \frac{a_1(\phi(\bar{\omega}))}{1-\phi(\bar{\omega})} dx \right)^{-1} \right) d\tau. \tag{2.15}$$

Из представления (2.15) следует, что гладкость ω определяется гладкостью функций $\bar{\rho}, \rho^0$ и p^0. В частности, имеем оценку

$$|\omega|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} = C_1(m_0, M_0, m_1, M_1, K_1, T, |\rho^0|_{2+\alpha,\Omega}) \cdot$$
$$\cdot (1 + t_0 |\bar{\rho}_{xx}|_{\alpha,\alpha/2,\Omega}).$$

Лемма 1.1.2. *Пусть функция $a_1(\phi)$, $\phi \in (0,1)$ удовлетворяет условиям*

$$(1-\phi)a_1(\phi) = a_0(\phi)\phi^{\alpha_1}(1-\phi)^{\alpha_2}, \quad 0 < R_1 \leq a_0(\phi) \leq R_2,$$

где постоянные $R_i > 0$, $\alpha_i > 0$, $i = 1,2$. Тогда имеет место оценка вида

$$R_2 |G(\phi_1) - G(\phi_2)| \geq |\phi_1 - \phi_2|.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $0 < \phi_1 \leq \phi_2 < 1$. Тогда из определения функций

$G(\phi)$ и $a_1(\phi)$ имеем

$$0 < \Delta G \equiv G(\phi_2) - G(\phi_1) = \int\limits_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{ds}{(1-s)a_1(s)} \geq \frac{1}{R_2}(\phi_2 - \phi_1).$$

Лемма 1.1.2 доказана.

Следствием этой леммы является оценка

$$|\phi(x,t) - \phi^0(x)| \leq \delta(t), \quad \delta(t) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow 0,$$

из которой следует, что существует такое значение $t_1 = t_1(m_0, M_0, m_1, M_1)$, что для всех $t_0 \leq t_1$ справедливо неравенство

$$0 < \frac{m_0}{2} \leq \phi(x,t) \leq \frac{M_0+1}{2}, \quad (x,t) \in Q_{t_0}. \tag{2.16}$$

С учетом (2.16) для функции $\omega(x,t)$ имеем оценку $G(\frac{m_0}{2}) \leq \omega(x,t) + G(\phi^0) \leq G(\frac{M_0+1}{2})$.

Используя (2.12), (2.14) и $\bar{\omega}(x,t)$, найдем $\rho(x,t)$ как решение задачи (здесь и далее предполагается, что начальные и граничные условия согласованы):

$$\frac{\partial}{\partial t}(a(\bar{\omega})(\rho + \rho^0)) = \frac{\partial}{\partial x}(K(\bar{\omega})b(\bar{\rho})\frac{\partial(\rho + \rho^0)}{\partial x}), \tag{2.17}$$

$$\rho \mid_{t=0} = \frac{\partial \rho_f}{\partial x} \mid_{x=0, x=1} = 0, \quad \frac{\partial \rho^0}{\partial x} \mid_{x=0,x=1} = 0.$$

Уравнение для $\rho(x,t)$ является равномерно параболическим. С учетом свойств $\bar{\omega}(x,t)$ и $\rho^0(x)$ задача (2.17) имеет классическое решение [21]. Кроме того, имеем следующую оценку:

$$|\frac{1}{a(\bar{\omega})}\frac{\partial a(\bar{\omega})}{\partial t}| \leq C_0(m_0, M_0, m_1, M_1, \max_{0 \leq t \leq T} |\rho^0(t)|).$$

При дополнительном условии малости на величину интервала времени справедливо следующее утверждение [74], [75].

Лемма 1.1.3. *При* $t_0 \le \min(t_1, t_2), t_2 = ln2/C_0(m_0, M_0, m_1, M_1)$ *классическое решение задачи* (2.17) *удовлетворяет в* Q_{t_0} *неравенству*

$$0 < \frac{m_1}{2} \le \rho(x,t) + \rho^0(x) \le 2M_1 < \infty.$$

Доказательство. Полагая $U(x,t) = \rho(x,t) + \rho^0(x)$, задачу (2.17) представим в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}(a(\bar{\omega})U) = \frac{\partial}{\partial x}(K(\bar{\omega})b(\bar{\rho})\frac{\partial U}{\partial x}), \\ \frac{\partial U}{\partial x} \mid_{x=0,x=1} = 0, \ U \mid_{t=0} = \rho^0. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Сначала покажем, что $U(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in Q_{t_0}$. В уравнении (2.18) сделаем замену $U(x,t) = -z(x,t)$. Тогда

$$z\frac{\partial a}{\partial t} + a\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(Kb\frac{\partial z}{\partial x}).$$

Положим

$$z^{(0)}(x,t) = \max\{z, 0\}, \quad z^{(0)}(x,t) \mid_{t=0} = \max\{-\rho^0, 0\} = 0,$$

$$\sigma_\varepsilon(x,t) = z^{(0)}(x,t)(|z^{(0)}(x,t)|^2 + \varepsilon)^{-1/2}, \varepsilon > 0.$$

Уравнение для функции z умножим на σ_ε и результат проинтегрируем по Ω. Получим равенство

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\int\limits_0^1 a(|z^{(0)}|^2 + \varepsilon)^{1/2} dx + \\ + \int\limits_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}(z\sigma_\varepsilon - (|z^{(0)}|^2 + \varepsilon)^{1/2}) dx + \\ + \varepsilon \int\limits_0^1 Kb\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z^{(0)}}{\partial x}(|z^{(0)}|^2 + \varepsilon)^{-3/2} dx = 0. \end{gathered} \tag{2.19}$$

Положим

$$A^+(t) = \{x \in \Omega |\, z(x,t) > 0\}, \quad A^-(t) = \{x \in \Omega |\, z(x,t) \le 0\}.$$

Тогда

$$\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}(z\sigma_\varepsilon - (|z^{(0)}|^2 + \varepsilon)^{1/2})dx =$$

$$= -\varepsilon \int_{A^+(t)} \frac{\partial a}{\partial t}(|z|^2 + \varepsilon)^{-1/2}dx - \varepsilon^{1/2} \int_{A^-(t)} \frac{\partial a}{\partial t}dx,$$

$$\int_0^1 a(|z^{(0)}|^2 + \varepsilon)^{1/2}dx = \int_{A^+(t)} a(|z|^2 + \varepsilon)^{1/2}dx + \varepsilon^{1/2} \int_{A^-(t)} adx,$$

$$\int_0^1 a(|z^{(0)}|^2 + \varepsilon)^{1/2} \mid_{t=0} dx = \varepsilon^{1/2} \int_0^1 a \mid_{t=0} dx,$$

$$\int_{A^+(t)} a(|z|^2 + \varepsilon)^{1/2}dx \ge \int_{A^+(t)} a|z|dx = \int_0^1 az^{(0)}dx.$$

Проинтегрировав равенство (2.19) по времени, получим

$$\int_{A^+(t)} a(|z|^2 + \varepsilon)^{1/2}dx + \varepsilon^{1/2} \int_{A^-(t)} adx+$$

$$+\varepsilon \int_0^t \int_{A^+(\tau)} Kb|\frac{\partial z}{\partial x}|^2(z^2 + \varepsilon)^{-3/2}dxd\tau =$$

$$= \varepsilon \int_0^t \int_{A^+(\tau)} \frac{\partial a}{\partial \tau}(|z|^2 + \varepsilon)^{-1/2}dxd\tau+$$

$$+\varepsilon^{1/2}\int\limits_0^t\int\limits_{A^-(\tau)}\frac{\partial a}{\partial\tau}dxd\tau+\varepsilon^{1/2}\int\limits_0^1 a\mid_{t=0}dx.$$

Следовательно

$$\int\limits_0^1 az^{(0)}dx\le\varepsilon^{1/2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1|\frac{\partial a}{\partial\tau}|dxd\tau+\varepsilon^{1/2}\int\limits_0^1 a\mid_{t=0}dx.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ получим, что $z^{(0)}=0$, т.е. $U\ge 0$.

Уравнение (2.18), после умножения на $U^{l-1}(x,t),\ l>2$, можно представить в виде:

$$\frac{1}{l}\frac{\partial(aU^l)}{\partial t}+(l-1)KbU^{l-2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+$$

$$+\frac{l-1}{l}U^l\frac{\partial a}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(KbU^{l-1}\frac{\partial U}{\partial x}\right).$$

Тогда

$$\frac{1}{l}\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 aU^l dx\le\frac{l-1}{l}\max_{0\le x\le 1}|\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t}|\int\limits_0^1 aU^l dx.$$

Следовательно,

$$y'(t)\le\frac{l-1}{l}\max_{0\le x\le 1}\left|\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t}\right|y(t),\quad y^l(t)=\int\limits_0^1(a^{1/l}U)^l dx,$$

$$y(t)\le y(0)\exp\left\{\frac{l-1}{l}\int\limits_0^t\max_{0\le x\le 1}|\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t}|d\tau\right\}.$$

После предельного перехода при $l \to \infty$, получим

$$\max_{0\le x\le 1} U(x,t) \le \max_{0\le x\le 1} \rho^0(x) \exp\left\{ \int_0^t \max_{0\le x\le 1} |\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t}| d\tau \right\}.$$

Учитывая, что $\max\limits_{0\le x\le 1} \rho^0(x) \le M_1$ и выбирая t из условия

$$t \le t_2, \quad \exp\left\{ \int_0^{t_2} \max_{0\le x\le 1} \left| \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t} \right| d\tau \right\} \le 2,$$

приходим к утверждению леммы об оценке сверху. Для получения оценки снизу уравнение (2.18) представим в виде $(z(x,t) = 1/U(x,t))$

$$\frac{1}{l}\frac{\partial(az^l)}{\partial t} + (l+1)Kbz^{l-2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 -$$

$$-\frac{l+1}{l} z^l \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Kbz^{l-1}\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Откуда сначала получим неравенство

$$\frac{1}{l}\frac{d}{dt}\int_0^1 az^l dx \le \frac{l+1}{l} \max_{0\le x\le 1} \left| \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t} \right| \int_0^1 az^l dx,$$

а затем и оценку

$$\max_{0\le x\le 1} \frac{1}{U(x,t)} \le \max_{0\le x\le 1} \frac{1}{\rho^0(x)} \exp\left\{ \int_0^t \max_{0\le x\le 1} \left| \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t} \right| d\tau \right\} \le \frac{2}{m_1}.$$

Лемма 1.1.3 доказана.

С учетом леммы 1.1.3 и свойств $\bar{\omega}$ имеем следующие оценки [21, гл.3]:

$$|\rho|_{\alpha,\alpha/2,Q_{t_0}} \le C_2,$$

$$|\rho|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} \le C_3(1+|\rho^0|_{2+\alpha,\Omega}+$$
$$|\bar\rho_x|_{\alpha,\alpha/2,Q_{t_0}}+|\bar\omega_t|_{\alpha,\alpha/2,Q_{t_0}}+|\bar\omega_x|_{\alpha,\alpha/2,Q_{t_0}}),$$

в которых постоянные C_2, C_3 зависят от K_1, m_0, m_1, M_0, M_1. Следовательно

$$|\rho|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} \le C_4(K_1,m_0,m_1,M_0,M_1).$$

Положим $C_5=\max\{C_1,C_4\}$. Выберем K_2 таким образом, чтобы $C_5\le\frac{K_1+K_2}{2}$. Тогда при $t_0<\min(t_1,t_2,(K_1+K_2)^{-1})$ получим

$$|\rho|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} \le K_1+K_2, \quad |\omega|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} \le K_1+K_2.$$

Остается проверить условия

$$|\rho|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}} \le K_1, \quad |\omega|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}} \le K_1.$$

Интегрируя уравнение (2.17) по времени, получим $|\rho|_{0,Q_{t_0}} \le C_6t_0$. Из уравнения (2.15) аналогично имеем $|\omega|_{0,Q_{t_0}} \le C_7t_0$. Используя для ρ, ω неравенство вида [5, с.35]

$$|u|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}} \le C|u|^c_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}}|u|^{1-c}_{0,Q_{t_0}},$$
$$c=(1+\alpha)(2+\alpha)^{-1},$$

выводим, что существует достаточно малое значение t_0, зависящее от K_1 и K_2, такое, что справедливы оценки $|\rho|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}} \le K_1$, $|\omega|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}} \le K_1$.

Таким образом, оператор Λ отображает множество V в себя при достаточно малых t_0. Используя полученные выше оценки, легко доказать непрерывность оператора Λ в норме пространства $C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_{t_0})$. Согласно теореме Тихонова-Шаудера существует неподвижная точка $(\rho,\omega)\in V$ оператора Λ.

Установим единственность решения задачи (2.9)–(2.11).

Пусть $(\rho_f^{(1)}, \phi^{(1)})$ и $(\rho_f^{(2)}, \phi^{(2)})$ – суть два различных решения задачи. Их разность $\rho = \rho_f^{(1)} - \rho_f^{(2)}, \phi = \phi^{(1)} - \phi^{(2)}$ есть решение линейной однородной системы

$$\frac{\partial}{\partial t}(d_0\rho + d_1\phi) - \frac{\partial}{\partial x}(d_2\frac{\partial \rho}{\partial x} + d_3\rho + d_4\phi) = 0, \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_0\phi) - h_1\rho + V(t) = 0, \tag{2.21}$$

$$V(t) = P^0(\phi^{(1)}, \rho_f^{(1)}) - P^0(\phi^{(2)}, \rho_f^{(2)}) =$$

$$= \int\limits_0^1 (h_2(x,t)\rho(x,t) + h_3(x,t)\phi(x,t))dx,$$

с нулевыми начальными и граничными условиями $\phi\mid_{t=0} = \rho\mid_{t=0} = \frac{\partial \rho}{\partial x}\mid_{x=0,x=1} = 0$.

Коэффициенты $d_i(x,t), h_j(x,t), i = 0,...,4, j = 0,...,3,$ имеют вид

$$d_0 = a(\phi^{(1)}) > 0, \quad d_1 = \frac{(a(\phi^{(1)}) - a(\phi^{(2)}))\rho_f^{(2)}}{\phi^{(1)} - \phi^{(2)}} > 0,$$

$$d_2 = K(\phi^{(2)})b(\rho_f^{(2)}) > 0, \quad d_3 = K(\phi^{(1)})\frac{b(\rho_f^{(1)}) - b(\rho_f^{(2)})}{\rho_f^{(1)} - \rho_f^{(2)}}\frac{\partial \rho_f^{(1)}}{\partial x},$$

$$d_4 = b(\rho_f^{(2)})\frac{K(\phi^{(1)}) - K(\phi^{(2)})}{\phi^{(1)} - \phi^{(2)}}\frac{\partial \rho_f^{(1)}}{\partial x},$$

$$h_0 = \frac{G(\phi^{(1)}) - G(\phi^{(2)})}{\phi^{(1)} - \phi^{(2)}} > 0, \quad h_1 = \frac{p(\rho_f^{(1)}) - p(\rho_f^{(2)})}{\rho_f^{(1)} - \rho_f^{(2)}},$$

$$h_2 = \frac{a_1(\phi^{(1)})}{1 - \phi^{(1)}}\frac{p_f(\rho_f^{(1)}) - p_f(\rho_f^{(2)})}{\rho_f^{(1)} - \rho_f^{(2)}}\left(\int\limits_0^1 \frac{a_1(\phi^{(1)})}{1 - \phi^{(1)}}dx\right)^{-1},$$

$$h_3 = \left(\frac{a_1(\phi^{(1)})}{1-\phi^{(1)}} - \frac{a_1(\phi^{(2)})}{1-\phi^{(2)}}\right)(\phi^{(1)} - \phi^{(2)})^{-1}\cdot$$
$$\cdot\left(p_f(\rho_f^{(2)})\left(\int\limits_0^1 \frac{a_1(\phi^{(1)})}{1-\phi^{(1)}}dx\right)^{-1} -\right.$$
$$\left. - \int\limits_0^1 \frac{a_1\left(\phi^{(2)}\right)}{1-\phi^{(2)}} p_f(\rho_f^{(2)})dx \left(\int\limits_0^1 \frac{a_1(\phi^{(1)})}{1-\phi^{(1)}}dx \int\limits_0^1 \frac{a_1(\phi^{(2)})}{1-\phi^{(2)}}dx\right)^{-1}\right)$$

и являются ограниченными для всех $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$.

С учетом (2.21) уравнение (2.20) можно представить в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(d_0\rho) + \frac{d_1}{h_0}(h_1\rho - V(t)) + h_0\phi\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d_1}{h_0}\right) - \\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(d_2\frac{\partial\rho}{\partial x} + d_3\rho + d_4\phi\right) = 0.\end{gathered} \tag{2.22}$$

Уравнение (2.22) умножим на $\rho(x,t)$ и результат проинтегрируем по x от 0 до 1. После стандартных преобразований получим неравенство

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 \rho_1^2(x,t)dx \le C(\int\limits_0^1 \rho_1^2(x,t)dx + \\ + \int\limits_0^1 u^2(x,t)dx + V^2(t)),\end{gathered} \tag{2.23}$$

в котором $\rho_1(x,t) = d_0^{1/2}|\rho(x,t)|$, $u(x,t) = h_0\phi(x,t)$. Здесь и далее через C будем обозначать постоянную, зависящую от T и величин

$$\max_{(x,t)\in Q_T}\frac{1}{\phi^{(i)}(x,t)}, \quad \max_{(x,t)\in Q_T}\frac{1}{1-\phi^{(i)}(x,t)},$$

$$\max_{(x,t)\in Q_T} \rho_f^{(i)}(x,t), \quad \max_{(x,t)\in Q_T} \frac{1}{\rho_f^{(i)}(x,t)},$$

$$\max_{(x,t)\in Q_T} \|\frac{\partial \phi^{(i)}(x,t)}{\partial t}\|, \quad \max_{(x,t)\in Q_T} \|\frac{\partial \rho_f^{(i)}(x,t)}{\partial t}\|,$$

$$\max_{(x,t)\in Q_T} \|\frac{\partial \rho_f^{(i)}(x,t)}{\partial x}\|, \quad i=1,2.$$

Для $V(t)$ имеем следующую оценку

$$|V(t)| \leq C \int_0^1 (\rho_1(x,t) + |u(x,t)|)dx.$$

Проинтегрировав уравнение (2.21) по времени и учитывая оценку для $V(t)$, выводим

$$|u(x,t)| \leq C \int_0^t (\rho_1(x,\tau) + |V(\tau)|)d\tau \leq$$

$$\leq C \left(\int_0^t \rho_1(x,\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^1 \rho_1(x,\tau)dxd\tau + \int_0^t \int_0^1 |u(x,\tau)|dxd\tau \right).$$

Интегрируя последнее неравенство по x от 0 до 1, приходим к неравенству Гронуолла для функции $\int_0^1 |u(x,t)|dx$:

$$\int_0^1 |u(x,t)|dx \leq C \left(\int_0^t \int_0^1 \rho_1(x,\tau)dxd\tau + \int_0^t \int_0^1 |u(x,\tau)|dxd\tau \right).$$

Поэтому

$$\int_0^1 |u(x,t)|dx \leq C \int_0^t \int_0^1 \rho_1(x,\tau)dxd\tau,$$

$$|V(t)| \leq C \left(\int_0^1 \rho_1(x,t)dx + \int_0^t \int_0^1 \rho_1(x,\tau)dxd\tau \right),$$

и, следовательно,

$$|u(x,t)| \leq C \left(\int_0^t \rho_1(x,\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^1 \rho_1(x,\tau)dxd\tau \right).$$

Тогда из (2.23) получим

$$\frac{d}{dt}\|\rho_1(t)\|^2 \leq C(\|\rho_1(t)\|^2 + \int_0^t \|\rho_1(\tau)\|^2 d\tau). \qquad (2.24)$$

Полагая $w(t) = \int\limits_0^t \|\rho_1(\tau)\|d\tau$, из (2.24) выводим

$$\frac{d^2w}{dt^2} \leq C \left(\frac{dw}{dt} + w(t) \right).$$

Откуда, сначала выводим неравенство

$$\frac{d}{dt}\left(e^t \left(\frac{dw}{dt} - (C+1)w \right) \right) + we^t \leq 0,$$

из которого следует

$$\frac{dw}{dt} \leq (C+1)w.$$

Поэтому $w(t) = 0$ и $\rho = 0$, $\phi = 0$. Лемма 1.1.1 доказана.

После нахождения ϕ и ρ_f находим $p_{tot} = P^0(\rho_f, \phi)$. Откуда $p_s = (p^0 - \phi p_f)(1-\phi)^{-1}$. Из уравнения $\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi)(1-\phi)^{-1}(p_{tot} - p_f)$ находим v_s, а из закона Дарси получим $v_f = v_s - k(\phi)(1-\phi)\phi^{-1}\frac{\partial p_f}{\partial x}$.

Поскольку $(\phi, \rho_f) \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_{t_0})$, то имеем:

$$v_s \in C^{3+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_{t_0}), \quad (p_f, p_s) \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_{t_0}),$$

$$v_f \in C^{1+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_{t_0}).$$

Теорема 1.1.1 доказана.

2 Локальная разрешимость по времени в поле силы тяжести

Сформулируем основной результат.

Теорема 1.2.1. *Пусть данные задачи* (2.1)–(2.5) *подчиняются следующим условиям:*
1. функции $k(\phi), \xi(\phi)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $\phi \in (0,1), \rho_f > 0$, и удовлетворяют условиям

$$k_0^{-1}\phi^{q_1}(1-\phi)^{q_2} \le k(\phi) \le k_0\phi^{q_3}(1-\phi)^{q_4},$$

$$1/\xi(\phi) = a_0(\phi)\phi^{\alpha_1}(1-\phi)^{\alpha_2-1},$$

$$0 < R_1 \le a_0(\phi) \le R_2, \quad p_f = R\rho_f,$$

где R – известная положительная постоянная, k_0, α_i, R_i, $i = 1, 2$ – положительные постоянные, $q_1, ..., q_4$ – фиксированные вещественные числа,
2. начальные условия ϕ^0, ρ^0 и функция g удовлетворяют следующим условиям гладкости: $\phi^0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), \rho^0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), g \in C^{1+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$, и условиям согласования

$$((1-\phi^0)\frac{dp_f(\rho^0)}{dx} - \rho^0 g(x,0)) \mid_{x=0, x=1} = 0,$$

а также удовлетворяют неравенствам

$$0 < m_0 \le \phi^0(x) \le M_0 < 1, \ 0 < m_1 \le \rho^0(x) \le M_1 < \infty,$$

$$0 < g(x,t) \le g_0 < \infty, \ x \in \overline{\Omega},$$

где m_0, M_0, m_1, M_1, g_0 *– известные положительные постоянные.*
Тогда задача (2.1)–(2.5) *имеет единственное локальное классическое решение, т. е. существует значение* $t_0 \in (0, T)$ *такое, что*

$$v_s(x,t) \in C^{3+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}),$$

$$(\phi(x,t), p_s(x,t), p_f(x,t), \rho_f(x,t)) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}),$$

$$v_f(x,t) \in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}).$$

Более того $0 < \phi(x,t) < 1$, $\rho_f(x,t) > 0$ *в* $\overline{Q}_{t_0}$.

Преобразуем систему (2.1)–(2.5). Следуя [88], приходим к следующей задаче в переменных Лагранжа для отыскания функций ρ_f, ϕ:

$$\frac{\partial}{\partial t}(a(\phi)\rho_f) - \frac{\partial}{\partial x}\left(K(\phi)b(\rho_f)\frac{\partial \rho_f}{\partial x} - \frac{K(\phi)}{1-\phi}\rho_f^2 g\right) = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = p_f - p_{tot}, \quad (2.26)$$

$$\left((1-\phi)\frac{\partial p_f(\rho_f)}{\partial x} - \rho_f g\right)|_{x=0,x=1} = 0,$$
$$\rho_f\,|_{t=0} = \rho^0(x), \quad \phi\,|_{t=0} = \phi^0(x), \quad (2.27)$$

где функции $G(\phi)$ и p_{tot} определяются равенствами

$$\frac{dG}{d\phi} = \frac{1}{a_1(\phi)(1-\phi)}, \quad p_{tot} = p^0(t) - \int_0^x \frac{\rho_{tot} g}{1-\phi} d\xi.$$

Функция $p^0(t)$ определяется из представления для p_{tot}, реологического уравнения, связывающего эффективное давление и пористость, и условия $v_s|_{x=0,1} = 0$:

$$p^0(t) = \int\limits_0^1 \left(\frac{a_1(\phi)}{1-\phi}(p_f + \int\limits_0^x \frac{\rho_{tot} g}{1-\phi} d\xi)\right) dx\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_0^1 \frac{a_1(\phi)}{1-\phi}dx\right)^{-1} \equiv P^0(\phi,\rho_f).$$

Лемма 1.2.1. *Пусть данные задачи* (2.25)–(2.27) *удовлетворяют условиям теоремы 1.2.1. Тогда задача* (2.25)–(2.27) *имеет единственное локальное решение, т.е. существует значение* t_0 *такое, что*

$$(\phi(x,t),\rho_f(x,t)) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}).$$

Более того, $0<\phi(x,t)<1$, $\rho_f(x,t)>0$ *в* $\overline{Q}_{t_0}$.

Разрешимость задачи (2.25)–(2.27) устанавливается с помощью теоремы Тихонова-Шаудера о неподвижной точке [47; с.227].

Поскольку функция $\psi = G(\phi)$ при $\phi\in(0,1)$ строго монотонна, то существует обратная функция $\phi = G^{-1}(\psi)$. Положим $\rho(x,t) = \rho_f(x,t)-\rho^0(x)$, $\omega(x,t) = G(\phi)-G(\phi^0)$. Представим уравнения (2.25),(2.26) в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(a(\omega)(\rho+\rho^0)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(K(\omega)b(\rho+\rho^0)\cdot \\ \cdot\frac{\partial(\rho+\rho^0)}{\partial x} - \frac{K(\omega)}{1-\phi(\omega)}(\rho+\rho^0)^2 g),\end{gathered} \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = p_f(\rho+\rho^0)-p_{tot},\ (1-\phi(\omega))\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot}g. \tag{2.29}$$

Здесь $a(\omega)=\frac{\phi(\omega)}{1-\phi(\omega)}$, $K(\omega)=k(\phi(\omega))(1-\phi(\omega))$, $\phi(\omega) = G^{-1}(\omega+G(\phi^0))$. Причем

$$\rho\,|_{t=0}=\omega\,|_{t=0}=((1-\phi(\omega))\frac{\partial(\rho+\rho^0)}{\partial x}-(\rho+\rho^0)g)\,|_{x=0,x=1}=0,$$
$$p_{tot}|_{x=0}=p^0(t).$$

В качестве банахова пространства выберем пространство $C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_{t_0})$, где β – любое число из отрезка $(0,\alpha)$,

$\alpha \in [0,1)$. Положим

$$V = \{\bar\rho(x,t), \bar\omega(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0})|$$

$$\bar\rho\ |_{t=0} = \bar\omega\ |_{t=0} =$$

$$= \left((1-\phi(\bar\omega))\frac{\partial(\bar\rho+\rho^0)}{\partial x} - (\bar\rho+\rho^0)g\right)|_{x=0,x=1} = 0,$$

$$\hat m_1 - \rho^0(x) \le \bar\rho(x,t) \le \hat M_1 - \rho^0(x) < \infty,$$

$$\hat m_1 = \frac{m_1}{2}\left(1+\frac{g_0}{R(1-M_0)}\right)^{-1},$$

$$\hat M_1 = 2M_1\left(1+\frac{g_0}{R(1-M_0)}\right),$$

$$G\left(\frac{m_0}{2}\right) - G(\phi^0) \le \bar\omega(x,t) \le G\left(\frac{M_0+1}{2}\right) - G(\phi^0) < \infty,$$

$$(x,t)\in Q_{t_0},$$

$$(|\bar\omega|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}},\ |\bar\rho|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}}) \le K_1,$$

$$(|\bar\omega|_{2+\alpha,(2+\alpha)/2,Q_{t_0}},\ |\bar\rho|_{2+\alpha,(2+\alpha)/2,Q_{t_0}}) \le K_1+K_2\},$$

где K_1 - произвольная положительная постоянная, а положительная постоянная K_2 будет указана позже. Заметим, что на множестве V справедливы неравенства: $0 < \frac{m_0}{2} \le \phi(\bar\omega) \le \frac{M_0+1}{2} < 1, \quad a(\bar\omega) > 0, \quad K(\bar\omega) > 0.$

Построим оператор Λ, отображающий V в V. Пусть $\bar\omega,\ \bar\rho \in V$. Из уравнений (2.29) определим функцию ω равенством

$$\omega = \int\limits_0^t \Bigg(R(\bar\rho(x,\tau)+\rho^0(x)) - P^0(\bar\phi,\bar\rho) + \\ + \int\limits_0^x g(\rho_s + (\bar\rho+\rho^0(\xi))\frac{\phi(\bar\omega)}{1-\phi(\bar\omega)})d\xi\Bigg)\,d\tau. \tag{2.30}$$

Из представления (2.30) следует, что гладкость ω определяется гладкостью функций $\bar{\rho}$, $\bar{\omega}$, ρ^0, p^0 и g, а также существует такое значение $t_1 = t_1(m_0,\ M_0,\ m_1,\ M_1)$, что для всех $t_0 \le t_1$ справедливо неравенство

$$0 < \frac{m_0}{2} \le \phi(x,t) \le \frac{M_0+1}{2}, \quad (x,t) \in Q_{t_0}. \tag{2.31}$$

В частности, имеем оценку

$$|\omega|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} =$$

$$C_1(m_0, M_0, m_1, M_1, K_1, T, |g|_{1+\alpha,\Omega}, |\rho^0|_{2+\alpha,\Omega}, |p^0|_{\alpha/2,[0,T]})\cdot$$
$$\cdot(1 + t_0|\bar{\rho}_{xx}|_{\alpha,\alpha/2,\Omega}).$$

С учетом (2.31) для функции $\omega(x,t)$ имеем оценку

$$G\left(\frac{m_0}{2}\right) \le \omega(x,t) + G(\phi^0) \le G\left(\frac{M_0+1}{2}\right).$$

Используя (2.28), $\bar{\rho}$ и $\bar{\omega}(x,t)$, найдем $\rho(x,t)$ как решение задачи (здесь и далее предполагается, что начальные и граничные условия согласованы):

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(a(\bar{\omega})(\rho+\rho^0)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(\bar{\omega})b(\bar{\rho})\frac{\partial(\rho+\rho^0)}{\partial x} - \right.\\ \left. - \frac{K(\bar{\omega})}{1-\phi(\bar{\omega})}(\bar{\rho}+\rho^0)(\rho+\rho^0)g\right),\end{gathered} \tag{2.32}$$

$$\rho\mid_{t=0} = 0, \quad ((1-\phi(\bar{\omega}))R\frac{\partial(\rho+\rho^0)}{\partial x} - (\rho+\rho^0)g)\mid_{x=0,x=1} = 0.$$

Уравнение для $\rho(x,t)$ является равномерно параболическим. С учетом свойств $\bar{\omega}(x,t)$ и $\rho^0(x)$ задача (2.32) имеет классическое решение [21]. Кроме того, имеем следующую оценку:

$$\left|\frac{1}{a(\bar{\omega})}\frac{\partial a(\bar{\omega})}{\partial t}\right| \le C_0\left(m_0, M_0, m_1, M_1,\ \max_{0\le t\le T}|p^0(t)|\right).$$

При дополнительном условии малости на величину интервала времени справедливо следующее утверждение.
Лемма 1.2.2. *Существуют такие* t_2, t_3, *что при* $t_0 \leq \min(t_1, t_2, t_3)$, *классическое решение задачи* (2.32) *удовлетворяет в* Q_{t_0} *неравенству*

$$0 < \hat{m}_1 \leq \rho(x,t) + \rho^0(x) \leq \hat{M}_1 < \infty.$$

Доказательство. Полагая $U(x,t) = \rho(x,t) + \rho^0(x)$, задачу (2.32) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(a(\bar{\omega})U) = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(\bar{\omega})b(\bar{\rho})\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{K(\bar{\omega})}{1-\phi(\bar{\omega})}(\bar{\rho}+\rho^0)Ug\right),$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \tilde{d}U\right)|_{x=0,x=1} = 0, \quad U\,|_{t=0} = \rho^0, \tag{2.33}$$

где $\tilde{d} = \frac{g}{(1-\phi(\bar{\omega}))R}$. Сначала покажем, что $U(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in Q_{t_0}$. В уравнении (2.33) сделаем замену $U(x,t) = -z(x,t)$. Тогда

$$z\frac{\partial a}{\partial t} + a\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Kb\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{K}{1-\phi(\bar{\omega})}(\bar{\rho}+\rho^0)gz\right).$$

Положим

$$z^{(0)}(x,t) = \max\{z, 0\}, \quad z^{(0)}(x,t)\,|_{t=0} = \max\{-\rho^0, 0\} = 0,$$

$$\sigma_\varepsilon(x,t) = z^{(0)}(x,t)(|z^{(0)}(x,t)|^2 + \varepsilon)^{-1/2}, \ \varepsilon > 0.$$

Уравнение для функции z умножим на σ_ε и результат проинтегрируем по Ω. Следуя [89], получим оценку

$$\int\limits_0^1 az^{(0)}dx \leq \varepsilon^{1/2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left|\frac{\partial a}{\partial\tau}\right|dxd\tau + \varepsilon^{1/2}\int\limits_0^1 a\,|_{t=0}\,dx.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим, что $z^{(0)} = 0$, т.е. $U \geq 0$.

Задачу (2.33) представим в виде:

$$U_t - \tilde{a}_{11}U_{xx} + \tilde{a}_1 U_x + \tilde{a}U = 0, \quad (U_x - \tilde{d}U)|_{x=0,1} = 0, \quad (2.34)$$

где

$$\tilde{a}_{11} = \frac{Kb}{a}, \quad d = \frac{kg\bar{\rho}_f}{1-\bar{\phi}}, \quad \tilde{a}_1 = \frac{d-(Kb)_x}{a},$$

$$\tilde{a} = \frac{a_t + d_x}{a}, \quad \tilde{d} = \frac{g}{(1-\bar{\phi})R}.$$

Следуя [21], перейдем от функции $U(x,t)$ к новой функции $w(x,t)$, связанной с ней равенством $w(x,t) = e^{-\lambda t}\varphi(x)U(x,t)$, где

$$\varphi = -mx^2 + mx + 1 > 0, \; m \equiv 2\max_{Q_t}|\tilde{d}| = \frac{4g_0}{(1-M_0)R},$$

а число λ будет указано позже.

Функция ω вследствие (2.34) является решением задачи

$$\omega_t - \tilde{a}_{11}\omega_{xx} + \left(\tilde{a}_1 + \frac{2\tilde{a}_{11}\varphi_x}{\varphi}\right)\omega_x +$$

$$+\left(-2\tilde{a}_{11}\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} + \tilde{a}_{11}\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \tilde{a}_1\frac{\varphi_x}{\varphi} + \tilde{a} + \lambda\right)\omega = 0,$$

$$\omega_x|_{x=0,1} = \left(\left(\frac{\varphi_x}{\varphi} + \tilde{d}\right)\omega\right)|_{x=0,1},$$

где $\omega_x|_{x=0} \geq 0, \quad \omega_x|_{x=1} \leq 0$, т. к. $\varphi|_{x=0,1} = 1, \quad \varphi_x|_{x=0} = m > 0, \quad \varphi_x|_{x=1} = -m \equiv -2\max\tilde{d} < 0$. Выберем

$$\lambda > \max_{Q_t}\left[2\tilde{a}_{11}\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} - \tilde{a}_{11}\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \tilde{a}_1\frac{\varphi_x}{\varphi} - \tilde{a}\right].$$

Тогда функция ω достигает положительного максимума при $t=0$, т. е.

$$U(x,t)e^{-\lambda t}\varphi(x) \le \max_{Q_t}(U(x,t)e^{-\lambda t}\varphi(x)) = \max_{Q_t}\omega(x,t) \le$$

$$\le \max_x \omega|_{t=0} = \max_x (U(x,t)e^{-\lambda t}\varphi(x))|_{t=0}.$$

Поэтому имеем оценку сверху для U :

$$U \le e^{\lambda t} M_1 \left(1 + \frac{g_0}{(1-M_0)R}\right).$$

Тогда существует значение $t_2 = \ln 2^{1/\lambda}$, что для всех $t \le t_2$ имеем оценку для ρ сверху из леммы 1.2.2.

Для получения оценки снизу уравнение (2.33) представим в виде $(z(x,t) = 1/U(x,t))$

$$z_t - \tilde{a}_{11} z_{xx} + \frac{2\tilde{a}_{11}}{z}(z_x^2) + \tilde{a}_1 z_x - \tilde{a} z = 0.$$

Перейдем от функции $z(x,t)$ к новой функции $w_1(x,t)$, связанной с ней равенством $w_1(x,t) = e^{-\lambda_1 t}\varphi(x) z(x,t)$, где функция φ определяется как и раньше для оценки сверху, а число λ_1 будет указано позже.

Функция ω_1 является решением задачи

$$\omega_{1t} - \tilde{a}_{11}\omega_{1xx} + \left(\tilde{a}_1 + \frac{2\tilde{a}_{11}\varphi_x}{\varphi} - 4\tilde{a}_{11}\frac{\varphi_x}{\varphi^2}\right)\omega_{1x} +$$

$$+\left(-2\tilde{a}_{11}\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} + \tilde{a}_{11}\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \tilde{a}_1\frac{\varphi_x}{\varphi} + 2\tilde{a}_{11}\frac{\varphi_x^2}{\varphi^3} -\right.$$

$$\left. -\tilde{a} + \lambda_1\right)\omega_1 + 2\tilde{a}_{11}\frac{\omega_{1x}^2}{\varphi^2\omega} = 0,$$

$$\omega_{1x}|_{x=0,1} = \left(\left(\frac{\varphi_x}{\varphi} - \tilde{d}\right)\omega_1\right)|_{x=0,1},$$

где $\omega_{1x}|_{x=0} \geq 0, \quad \omega_{1x}|_{x=1} \leq 0$, т. к. $\varphi|_{x=0,1} = 1, \quad \varphi_x|_{x=0} = m > 0, \quad \varphi_x|_{x=1} = -m \equiv -2\max \tilde{d} < 0$. Выберем

$$\lambda_1 > \max_{Q_t} \left[2\tilde{a}_{11}\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} - \tilde{a}_{11}\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \tilde{a}_1\frac{\varphi_x}{\varphi} - 2\tilde{a}_{11}\frac{\varphi_x^2}{\varphi^3} + \tilde{a} \right],$$

тогда функция ω_1 достигает положительного максимума при $t = 0$. Т. е.

$$\max_{Q_t} \left(\frac{1}{U(x,t)} e^{-\lambda_1 t} \varphi(x) \right) = \max_{Q_t} \omega_1(x,t) \leq$$

$$\leq \max_x \omega_1|_{t=0} = \max_x \left(\frac{1}{U(x,t)} e^{-\lambda_1 t} \varphi(x) \right) |_{t=0}.$$

Откуда имеем, что

$$\frac{1}{U(x,t)} \leq \frac{1}{m_1} e^{\lambda_1 t} \left(1 + \frac{g_0}{R(1-M_0)} \right).$$

Поэтому

$$U(x,t) \geq m_1 e^{-\lambda_1 t} \left(1 + \frac{g_0}{R(1-M_0)} \right)^{-1}.$$

Тогда существует значение $t_3 = \ln 2^{1/\lambda_1}$, что для всех $t \leq t_3$ имеем оценку для ρ снизу из леммы 1.2.2. Лемма 1.2.2 доказана.

С учетом леммы 1.2.2 и свойств $\bar{\omega}$ имеем следующие оценки [21, гл.3]:

$$|\rho|_{\alpha,\alpha/2,Q_{t_0}} \leq C_2,$$

$$|\rho|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} \leq C_3 \left(1 + |\rho^0|_{2+\alpha,\Omega} + |\bar{\rho}_x|_{\alpha,\alpha/2,Q_{t_0}} + \right.$$

$$\left. + |\bar{\omega}_t|_{\alpha,\alpha/2,Q_{t_0}} + |\bar{\omega}_x|_{\alpha,\alpha/2,Q_{t_0}} \right),$$

в которых постоянные $C_2, \ C_3$ зависят от K_1, m_0, m_1, M_0, M_1. Следовательно

$$|\rho|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} \leq C_4(K_1, m_0, m_1, M_0, M_1).$$

Положим $C_5 = \max\{C_1, C_4\}$. Выберем K_2 таким образом, чтобы $C_5 \le \frac{K_1+K_2}{2}$. Тогда при $t_0 < \min(t_1, t_2, (K_1+K_2)^{-1})$ получим

$$|\rho|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} \le K_1 + K_2, \quad |\omega|_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} \le K_1 + K_2.$$

Остается проверить условия

$$|\rho|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}} \le K_1, \quad |\omega|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}} \le K_1.$$

Интегрируя уравнение (2.32) по времени, получим $|\rho|_{0,Q_{t_0}} \le C_6 t_0$. Из уравнения (2.30) аналогично имеем $|\omega|_{0,Q_{t_0}} \le C_7 t_0$. Используя для ρ, ω неравенство вида [5, с.35]

$$|u|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}} \le C|u|^{c}_{2+\alpha,1+\alpha/2,Q_{t_0}} |u|^{1-c}_{0,Q_{t_0}},$$

$$c = (1+\alpha)(2+\alpha)^{-1},$$

выводим, что существует достаточно малое значение t_0, зависящее от K_1 и K_2, такое, что справедливы оценки $|\rho|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}} \le K_1$, $|\omega|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}} \le K_1$.

Таким образом, оператор Λ отображает множество V в себя при достаточно малых t_0. Используя полученные выше оценки, легко доказать непрерывность оператора Λ в норме пространства $C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_{t_0})$. Согласно теореме Тихонова-Шаудера существует неподвижная точка $(\rho,\ \omega) \in V$ оператора Λ. Единственность устанавливается стандартным образом [5].

Лемма 1.2.1 доказана.

Поскольку $(\phi,\ \rho_f) \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(Q_{t_0})$, то имеем:

$$v_s \in C^{3+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(Q_{t_0}), \quad (p_f,\ p_s) \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(Q_{t_0}),$$

$$v_f \in C^{1+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(Q_{t_0}).$$

Теорема доказана.

3 Локальная разрешимость по времени в случае полного уравнения баланса сил

Рассматривается следующая квазилинейная система уравнений составного типа, описывающая одномерное нестационарное движение вязкой сжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)\rho_s v_s)=0,\\ \frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_f\phi v_f)=0,\end{gathered} \tag{2.35}$$

$$\phi(v_f-v_s)=-k(\phi)\left(\frac{\partial p_f}{\partial x}-\rho_f g\right), \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x}=-\frac{1}{\xi(\phi)}p_e, \quad p_e=p_{tot}-p_f, \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\eta(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x}\right)=\rho_{tot}g+\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}, \tag{2.38}$$

$$p_{tot}=\phi p_f+(1-\phi)p_s, \quad \rho_{tot}=\phi\rho_f+(1-\phi)\rho_s,$$

решаемая в области $(x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega=(0,1)$, при краевых и начальных условиях

$$\begin{gathered}v_s\mid_{x=0,x=1}=v_f\mid_{x=0,x=1}=0,\\ \phi\mid_{t=0}=\phi^0(x), \quad \rho_f\mid_{t=0}=\rho^0(x).\end{gathered} \tag{2.39}$$

Здесь под решением задачи (2.35) – (2.39) будем понимать совокупность функций $v_s\in C^{3+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$ $(\phi,\ \rho_f,\ p_f,\ p_s)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$, $v_f\in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$ таких, что $0<\phi<1$, $\rho_f>0$, $p_f>0$. Эти функции удовлетворяют уравнениям (2.35) – (2.38) и начальным и граничным условиям (2.39) как непрерывные в $\overline{Q}_T$ функции.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1.1. Тогда задача (2.35) – (2.39) имеет единственное локальное классическое решение, т.е. существует значение t_0 такое, что*

$$v_s(x,t) \in C^{3+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}),$$

$$(\phi(x,t),\ p_s(x,t),\ p_f(x,t),\ \rho_f(x,t)) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}),$$

$$v_f(x,t) \in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}).$$

Более того $0 < \phi(x,t) < 1$, $\rho_f(x,t) > 0$ *в* $\overline{Q}_{t_0}$.

Переходя к массовым переменным Лагранжа аналогичным пункту 1.1.2 образом, приходим к следующей системе

$$\begin{gathered}\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + (1-\phi)^2\frac{\partial v_s}{\partial x} = 0,\\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f\frac{\phi}{1-\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_f\phi(v_f - v_s)) = 0,\end{gathered} \tag{2.40}$$

$$\phi(v_s - v_f) = k(\phi)(1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x}, \tag{2.41}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi)(p_{tot} - p_f), \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\eta(1-\phi)^2\frac{\partial v_s}{\partial x}\right). \tag{2.43}$$

В безразмерных переменных (аналогично параграфу 1.1.1) область изменения x есть единичный отрезок $[0,1]$, а система уравнений (2.40)–(2.43) сохранит свою форму.

Используя реологическое соотношение (2.42) и баланс сил (2.43), а также условия $v_s|_{x=0,1} = 0$, находим

$$p_{tot} = \frac{2\eta a_1(\phi)(1-\phi)p_f + p^0(t)}{1 + 2\eta a_1(\phi)(1-\phi)},$$

$$p^0(t) = \int\limits_0^1 \frac{a_1(\phi)p_f}{(1-\phi)(1+2\eta a_1(\phi)(1-\phi))}dx \cdot$$

$$\cdot \left(\int\limits_0^1 \frac{a_1(\phi)}{(1-\phi)(1+2\eta a_1(\phi)(1-\phi))}dx \right).$$

Второе уравнение системы с учетом закона Дарси принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f \frac{\phi}{1-\phi}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_f k(\phi)(1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x}\right) = 0.$$

Из первого и четвертого уравнений системы (2.40)–(2.43) следует:

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{a_1(\phi)}{1+2\eta a_1(\phi)(1-\phi))}(p_f - p^0).$$

Это уравнение можно представить в виде

$$\frac{\partial G(\phi)}{\partial t} = p_f - p^0,$$

где функция $G(\phi)$ определяется равенством

$$\frac{dG(\phi)}{d\phi} = \frac{1+2\eta a_1(\phi)(1-\phi))}{(1-\phi)a_1(\phi)}.$$

Положим

$$a(\phi) = \frac{\phi}{1-\phi}, \quad K(\phi) = k(\phi)(1-\phi), \quad b(\rho_f) = \rho_f \frac{\partial p_f(\rho_f)}{\partial \rho_f}.$$

Учитывая условия (2.39), приходим к следующей задаче для отыскания функций $\rho_f,\ \phi$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(a(\phi)\rho_f) - \frac{\partial}{\partial x}(K(\phi)b(\rho_f)\frac{\partial \rho_f}{\partial x}) = 0, \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial G(\phi)}{\partial t} = p_f(\rho_f) - p^0(t), \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial x} \mid_{x=0,x=1}= 0, \quad \rho_f \mid_{t=0}= \rho^0(x), \quad \phi \mid_{t=0}= \phi^0(x). \tag{2.46}$$

Лемма 1.3.1. *Пусть данные задачи* (2.44) – (2.46) *удовлетворяют условиям теоремы 1.3.1. Тогда задача* (2.44) – (2.46) *имеет единственное локальное решение, т.е. существует значение* t_0 *такое, что*

$$(\phi(x,t), \rho_f(x,t)) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}),$$

Более того $0 < \phi(x,t) < 1$, $\rho_f(x,t) > 0$ *в* $\overline{Q}_{t_0}$.

Положим $\rho(x,t) = \rho_f(x,t) - \rho^0(x)$ и представим уравнения (2.44), (2.45) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a(\phi)(\rho+\rho^0)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(\phi)b(\rho+\rho^0)\frac{\partial(\rho+\rho^0)}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial G(\phi)}{\partial t} = p_f(\rho+\rho^0) - p^0(t). \tag{2.47}$$

причем

$$\rho \mid_{t=0}= \frac{\partial(\rho+\rho^0)}{\partial x} \mid_{x=0,x=1}= 0, \quad \phi \mid_{t=0}= \phi^0(x).$$

В качестве банахова пространства выберем пространство $C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_{t_0})$, где β – любое число из отрезка $(0,\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$. Положим

$$V = \{\bar{\rho}(x,t), \bar{\phi}(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0})|,$$

$$\bar{\rho} \mid_{t=0}= \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \mid_{x=0,x=1}= 0,$$

$$0 < \frac{m_1}{2} - \rho^0(x) \le \bar{\rho}(x,t) \le 2M_1 - \rho^0(x) < \infty,$$

$$0 < \frac{m_0}{2} \le \bar{\phi}(x,t) \le \frac{M_0+1}{2} < 1, \quad (x,t) \in Q_{t_0},$$

$$(|\bar{\phi}|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}}, |\bar{\rho}|_{1+\alpha,(1+\alpha)/2,Q_{t_0}}) \le K_1,$$

$$(|\bar{\phi}|_{2+\alpha,(2+\alpha)/2,Q_{t_0}}, |\bar{\rho}|_{2+\alpha,(2+\alpha)/2,Q_{t_0}}) \le K_1 + K_2\},$$

где K_1 - произвольная положительная постоянная, а положительная постоянная K_2 будет указана позже.

Построим оператор Λ, отображающий V в V. Пусть $\bar{\phi}, \bar{\rho} \in V$. Используя (2.47) определим функцию ϕ равенством

$$G(\phi) = G(\phi^0) + \int\limits_0^t (p_f(\bar{\rho}(x,\tau) + \rho^0(x)) -$$
$$- \int\limits_0^1 \frac{a_1(\bar{\phi})}{(1-\bar{\phi})(1+2\eta a_1(\phi)(1-\phi))} p_f(\bar{\rho}(x,\tau) + \rho^0(x))dx \cdot$$
$$\cdot \left(\int\limits_0^1 \frac{a_1(\bar{\phi})}{(1-\bar{\phi})(1+2\eta a_1(\phi)(1-\phi))} dx \right)^{-1})d\tau. \tag{2.48}$$

Лемма 1.3.2 и лемма 1.3.3 формулируются аналогичным образом и доказываются так же, как в пункте 1.1 леммы 1.1.2 и 1.1.3 соответственно. Дальнейшие рассуждения и доказательство единственности решения задачи сохраняются. Таким образом теорема 1.3.1 доказана.

Замечание. В случае полного уравнения баланса сил при воздействие на систему внешних сил (сила тяжести), поскольку вязкость жидкости намного меньше вязкости скелета и девиатор тензора напряжений жидкости достаточно мал, система уравнений, описывающая одномерное нестационарное движение сжимаемой жидкости в вязкой пористой среде, выглядит следующим образом [65], [70],

[73], [51]:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)\rho_s v_s) = 0,$$
$$\frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_f \phi v_f) = 0, \tag{2.49}$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k(\phi)\left(\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g\right), \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi)p_e, \quad p_e = p_{tot} - p_f, \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\eta(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x}\right) = \rho_{tot} g + \frac{\partial p_{tot}}{\partial x}, \tag{2.52}$$

После перехода в переменные Лагранжа аналогично пункту 1.1.2 система (2.49) – (2.52) принимает вид

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + (1-\phi)^2\frac{\partial v_s}{\partial x} = 0, \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_f \frac{\phi}{1-\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_f \phi(v_f - v_s)) = 0, \tag{2.54}$$

$$\phi(v_s - v_f) = k(\phi)\left((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g\right), \tag{2.55}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi)p_e, \quad p_e = p_{tot} - p_f, \tag{2.56}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial}{\partial x}\left((1-\phi)^2\frac{\partial v_s}{\partial x}\right) = \rho_{tot} g + (1-\phi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}. \tag{2.57}$$

Из (2.57), с учетом (2.53), получаем представление для p_{tot} :

$$p_{tot} = \frac{\partial \phi}{\partial t} - \int_0^x \frac{\rho_{tot} g}{1-\phi} d\xi + p^1(t).$$

где функцию p^1 определим позже.

Далее уравнение (2.56) с учетом представления для p_{tot} представим в виде

$$\left(\frac{1}{(1-\phi)a_1(\phi)}+1\right)\frac{\partial\phi}{\partial t}-\int_0^x\frac{\rho_{tot}g}{1-\phi}d\xi=p_f-p^1.$$

Найдем функцию p^1. Проинтегрируем по x уравнение (2.57), получим

$$(1-\phi)^2\frac{\partial v_s}{\partial x}=\int_0^x\frac{\rho_{tot}g}{1-\phi}d\xi+p_{tot}-p^1.$$

С учетом уравнения (2.56) получим, что

$$p_{tot}=\left(p^1-\int_0^x\frac{\rho_{tot}g}{1-\phi}d\xi+(1-\phi)a_1(\phi)p_f\right)\cdot$$

$$\cdot(1+(1-\phi)a_1(\phi))^{-1}.$$

Проинтегрируем уравнение (2.56) по x от 0 до 1. С учетом краевых условий $v_s|_{x=0,1}=v_f|_{x=0,1}=0$ и последнего представления для p_{tot} получим представление для p^1.

Таким образом, получаем систему уравнений для нахождения пористости и плотности:

$$\frac{\partial}{\partial t}(a(\phi)\rho_f)-\frac{\partial}{\partial x}\left(K(\phi)b(\rho_f)\frac{\partial\rho_f}{\partial x}-\frac{K(\phi)}{1-\phi}\rho_f^2g\right)=0, \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial G^1}{\partial t}=R\rho_f-p^1+\int_0^x\frac{\rho_{tot}g}{1-\phi}d\xi, \quad (2.59)$$

где функции $G^1,\ p^1$ определяются следующим образом:

$$\frac{dG^1}{d\phi}=1+\frac{1}{a_1(\phi)(1-\phi)},$$

$$p^1=\int\limits_0^1\left(\frac{a_1(\phi)}{(1-\phi)(1+a_1(\phi)(1-\phi))}(R\rho_f+\int_0^x\frac{\rho_{tot}g}{1-\phi}d\xi)\right)dx\cdot$$

$$\cdot \left(\int_0^1 \frac{a_1(\phi)}{(1-\phi)(1+a_1(\phi)(1-\phi))} dx \right)^{-1}.$$

Применяя аналогичный пункту 1.2 подход, докажем разрешимость начально-краевой задачи для уравнений (2.58) – (2.59), дополненных условиями

$$\left((1-\phi)\frac{\partial p_f(\rho_f)}{\partial x} - \rho_f g \right) |_{x=0,x=1} = 0, \quad p_f = R\rho_f, \tag{2.60}$$

$$\rho_f |_{t=0} = \rho^0(x), \quad \phi |_{t=0} = \phi^0(x).$$

4 Глобальная разрешимость по времени

Рассматривается система (2.1)–(2.5), в которой истинные плотности фаз принимаются постоянными.

Определение 1.4.1. *Решением задачи* (2.35) – (2.39) *называется совокупность функций* $\phi, v_s, v_f \in C^{2+\alpha,1+\beta}(Q_T), p_f, p_s \in C^{1+\alpha,1+\beta}(Q_T)$, *таких, что* $0 < \phi < 1$. *Эти функции удовлетворяют уравнениям* (2.35)–(2.38) *и начальным и граничным условиям* (2.39) *как непрерывные в* Q_T *функции.*

Теорема 1.4.1. *Пусть данные задачи* (2.35) – (2.39) *подчиняются следующим условиям: 1. функции* $k(\phi)$, $\xi(\phi)$ *и их производные до второго порядка непрерывны для* $\phi \in (0, 1)$ *и удовлетворяют условиям*

$$k_0^{-1}\phi^{q_1}(1-\phi)^{q_2} \leq k(\phi) \leq k_0\phi^{q_3}(1-\phi)^{q_4},$$

$$\frac{1}{\xi(\phi)} = a_0(\phi)\phi^{\alpha_1}(1-\phi)^{\alpha_2-1}, \quad 0 < R_1 \leq a_0(\phi) \leq R_2 < \infty,$$

где k_0, α_i, R_i, $i = 1, 2$ *– положительные постоянные,* $q_1, ..., q_4$ *– фиксированные вещественные числа. 2. функция* g, *начальная функция* ϕ^0 *и граничная функция* p^0

удовлетворяют следующим условиям гладкости

$$g \in C^{1+\alpha,1+\beta}(\bar{Q}_T), \quad \phi^0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T) \quad p^0 \in C^{1+\beta}(0,T),$$

а также функции ϕ^0 и g удовлетворяют неравенствам

$$0 < m_0 \le \phi^0(x) \le M_0 < 1, \quad |g(x,t)| \le g_0 < \infty, \quad x \in \bar{\Omega},$$

где m_0, M_0, g_0 – известные положительные константы. Тогда задача (2.35) – (2.39) *имеет единственное локальное классическое решение, т. е. существует значение t_0 такое, что*

$$(\phi(x,t), v_s(x,t), v_f(x,t)) \in C^{2+\alpha,1+\beta}(Q_{t_0}),$$

$$(p_f(x,t), p_s(x,t)) \in C^{1+\alpha,1+\beta}(Q_{t_0}).$$

Более того $0 < \phi(x,t) < 1$ в $\bar{Q}_{t_0}$.

Теорема 1.4.2. *Пусть дополнительно к условиям теоремы 1.4.1 функции $k(\phi)$, $\xi(\phi)$ удовлетворяют условиям*

$$k(\phi) = \frac{k}{\mu}\phi^n, \quad \xi(\phi) = \eta\phi^{-m}, \ n \ge 1, m \ge 1,$$

где k, μ, η – положительные постоянные. Тогда для всех $t \in [0,T]$, $T < \infty$ существует единственное решение задачи (2.35) – (2.39)*, причем существуют числа $0 < m_1 < M_1 < 1$ такие, что $m_1 \le \phi(x,t) \le M_1$, $(x,t) \in Q_T$.*

4.1 Локальная разрешимость

При доказательстве теорем 1.4.1 и 1.4.2 удобно использовать переменные Лагранжа [74]. Переход осуществляется аналогично пункту 1.1.2. В безразмерных переменных Лагранжа система выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + (1-\phi)^2 \frac{\partial v_s}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi(v_f - v_s)) = 0, \tag{2.61}$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k(\phi)\left((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g\right), \tag{2.62}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g, \tag{2.63}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi)p_e, \quad a_1(\phi) = \frac{1}{\xi(\phi)}. \tag{2.64}$$

Второе уравнение (2.61) с учетом закона Дарси (2.62) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\phi)((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g)\right) = 0. \tag{2.65}$$

Из уравнений (2.61) и (2.64) следует, что

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = -a_1(\phi)(p_{tot} - p_f).$$

Последнее уравнение можно представить в виде

$$p_{tot} - p_f = -\frac{\partial G(\phi)}{\partial t}, \tag{2.66}$$

где функция $G(\phi)$ определяется равенством

$$\frac{dG}{d\phi} = \frac{1}{a_1(\phi)(1-\phi)}.$$

Уравнение (2.65) с учетом (2.63) и (2.66) перепишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi}) = \frac{\partial}{\partial x}(k(\phi)((1-\phi)\frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_{tot} + \rho_f))). \tag{2.67}$$

Оно дополняется следующими начально-краевыми условиями:

$$\phi|_{t=0} = \phi^0,$$
$$\left(k(\phi)\left((1-\phi)\frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_{tot}+\rho_f)\right)\right)|_{x=0,1} = 0. \tag{2.68}$$

Лемма 1.4.1. *Пусть данные задачи* (2.67)–(2.68) *удовлетворяют условиям теоремы 1.4.1. Тогда задача* (2.67)–(2.68) *имеет единственное локальное решение, т. е. существует значение* t_0 *такое, что*

$$\phi \in C^{2+\alpha,1+\beta}(Q_{t_0}),\ \phi \in (0,1).$$

Без ограничения общности будем считать, что $0 < \phi_1 \leq \phi_2 < 1$. Из определения функций $G(\phi)$ и $a_1(\phi)$ имеем

$$0 < \Delta G \equiv G(\phi_2) - G(\phi_1) = \int\limits_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{ds}{(1-s)a_1(s)} \geq \frac{1}{R_2}(\phi_2 - \phi_1).$$

Тогда имеет место оценка вида

$$R_2|G(\phi_1) - G(\phi_2)| \geq |\phi_1 - \phi_2|.$$

Следовательно,

$$|\phi(x,t) - \phi^0(x)| \leq \delta(t), \quad \delta(t) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow 0,$$

из которой следует, что существует такое значение $t_1 = t_1(m_0, M_0)$, что для всех $t_0 \leq t_1$ справедливо неравенство

$$0 < \frac{m_0}{2} \leq \phi(x,t) \leq \frac{M_0+1}{2}, \quad (x,t) \in Q_{t_0}. \tag{2.69}$$

Полагая $z(x,t) = \partial G/\partial t$, из (2.67)–(2.68) приходим к следующей задаче для G, z

$$z = \frac{\partial G}{\partial t}, \quad G|_{t=0} = G(\phi^0) \equiv G^0(x), \tag{2.70}$$

$$\frac{z}{d(G)} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(G)\frac{\partial z}{\partial x} - b(G)\right) = 0, \qquad (2.71)$$

$$\left(a(G)\frac{\partial z}{\partial x} - b(G)\right)|_{x=0,x=1} = 0, \qquad (2.72)$$

где

$$d(G) = \frac{1-\phi(G)}{a_1(\phi(G))}, \quad a(G) = k(\phi(G))(1-\phi(G)),$$

$$b(G) = k(\phi(G))g((1-\phi(G))\rho_s + (1+\phi(G))\rho_f).$$

Разрешимость в малом устанавливается с помощью теоремы Тихонова- Шаудера о неподвижной точке [5].

Положим $\omega(x,t) = G(\phi) - G(\phi^0)$. Представим уравнения (2.70),(2.71) в виде

$$z = \frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad \omega|_{t=0} = 0, \qquad (2.73)$$

$$\frac{z}{d(\omega)} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(\omega)\frac{\partial z}{\partial x} - b(\omega)\right) = 0, \qquad (2.74)$$

$$\left(a(\omega)\frac{\partial z}{\partial x} - b(\omega)\right)|_{x=0,x=1} = 0. \qquad (2.75)$$

В качестве банахова пространства выберем пространство $C^{2+\zeta,1+\gamma}(\overline{Q}_{t_0})$, где ζ – любое число из отрезка $(0,\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$, γ – любое число из отрезка $(0,\beta)$, $\beta \in [0,1)$. Положим

$$V = \{\bar{\omega} \in C^{2+\alpha,1+\beta}(\bar{Q}_{t_0})|\bar{\omega}|_{t=0} = 0,$$

$$0 < \frac{m^0}{2} \leq \phi(\bar{\omega}) \leq \frac{M^0+1}{2} < \infty, \ |\bar{\omega}|_{1+\alpha,(1+2\beta)/2,Q_{t_0}} \leq K_1,$$
$$|\bar{\omega}|_{2+\alpha,1+\beta,Q_{T_0}} \leq K_1 + K_2\},$$

где K_1 - произвольная положительная постоянная, а положительная постоянная K_2 будет указана позже. Построим оператор Λ, отображающий V в V. Пусть $\bar{\omega} \in V$.

Используя (2.71), (2.72) определим функцию $z = z(x,t)$ как решение задачи:

$$\frac{z}{d(\bar{\omega})} - (a(\bar{\omega})z_x - b(\bar{\omega}))_x = 0,$$

$$(a(\bar{\omega})z_x - b(\bar{\omega}))\,|_{x=0,1} = 0, \tag{2.76}$$

где

$$0 < d_1 = \frac{1-M_0}{a_0 M_0^{\alpha_1}(1-m_0)^{\alpha_2 - 1}} \le d(\bar{\omega}) \le$$

$$\le \frac{1-m_0}{a_0 m_0^{\alpha_1}(1-M_0)^{\alpha_2 - 1}} = d_2,$$

$$0 < h_1 = k_0^{-1} m_0^{q_1}(1-M_0)^{q_2+1} \le a(\bar{\omega}) \le$$

$$\le k_0 M_0^{q_3}(1-m_0)^{q_4+1} = h_2,$$

$$|b(\bar{\omega})| \le k_0 M_0^{q_3}(1-m_0)^{q_4} g_0((1-m_0)\rho_s + (1+M_0)\rho_f) = b_2.$$

Уравнение для z (2.76) является равномерно эллиптическим. Поскольку $d(\bar{\omega}) > 0$, то задача (2.76) имеет единственное классическое решение. Доказательство существования полностью следует технике, изложенной в [21, стр. 144, 177]. Тогда для решения задачи (2.76) имеет место шаудеровская оценка:

$$|z|_{2+\alpha,\Omega} \le N_1(K_1, m_0, M_0).$$

Покажем непрерывность функции z по переменной t.

Положим $u = (z(x,t_2) - z(x,t_1))(t_2 - t_1)^{\beta}$. Поскольку функции $z(x,t_i), (i = 1,2)$ являются решением уравнения (2.76), то функция u удовлетворяет равенству

$$a(\bar{\omega}(x,t_2))u_{xx} + a_x(\bar{\omega}(x,t_2))u_x - \frac{1}{d(\bar{\omega}(x,t_2))} =$$

$$= (z_{xx}(\bar{\omega}(x,t_1))(a(\bar{\omega}(x,t_1)) - a(\bar{\omega}(x,t_2)))+$$

$$+z_x(\bar{\omega}(x,t_1))(a(\bar{\omega}(x,t_1)) - a(\bar{\omega}(x,t_2)))+$$

$$+z(\bar{\omega}(x,t_1))\left(\frac{1}{d(\bar{\omega}(x,t_1))}-\frac{1}{d(\bar{\omega}(x,t_2))}\right)+$$

$$+b_x(\bar{\omega}(x,t_2))-b_x(\bar{\omega}(x,t_1)))(t_2-t_1)^{-\beta}.$$

Откуда следует, что функция u ограничена, а следовательно, имеем $|z|_{2+\alpha,\beta,Q_{t_0}} \leq N_2(K_1,\ m_0,\ M_1)$.

По найденному z из уравнения (2.73) найдем ω:

$$\omega = \int\limits_0^t z d\tau,$$

и, следовательно,

$$|\omega|_{2+\alpha,1+\beta,Q_{t_0}} \leq N_3(1+t|z_{xx}|_{\alpha,\beta,Q_{t_0}}),$$

где постоянная $N_3 = N_3(K_1,\ m_0,\ M_0)$.

Положим $N_4 = \max\{N_1, N_3\}$. Выберем K_2 таким образом, чтобы $N_4 \leq (K_1+K_2)/2$. Тогда при $t_0 = 2(K_1+K_2)^{-1}$ получаем оценку

$$|\omega|_{2+\alpha,1+\beta,Q_{t_0}} \leq K_1+K_2.$$

Из представления для функции ω имеем $|\omega|_{0,Q_{t_0}} \leq N_5 t_0$. Используя для ω неравенство вида [5, с.35]

$$|u|_{1+\alpha,(1+2\beta)/2,Q_{t_0}} \leq C|u|^c_{2+\alpha,1+\beta,Q_{t_0}}|u|^{1-c}_{0,Q_{t_0}},$$

$$c = (1+\alpha)(2+\alpha)^{-1},$$

выводим, что существует достаточно малое значение t_0, зависящее от K_1 и K_2, такое, что справедлива оценка $|\omega|_{1+\alpha,(1+2\beta)/2,Q_{t_0}} \leq K_1$.

Таким образом, оператор Λ отображает множество V в себя при достаточно малых t_0. Используя полученные выше оценки, легко доказать непрерывность оператора Λ в норме пространства $C^{2+\zeta,1+\gamma}(\overline{Q}_{t_0})$. Согласно теореме

Тихонова-Шаудера существует неподвижная точка $\omega \in V$ оператора Λ.

Легко показать единственность решения задачи (2.70)–(2.72). Пусть $(z_1,\ G_1)$ и $(z_2,\ G_2)$ – два различных решения задачи. Их разность $z = z_1 - z_2,\ G = G_1 - G_2$ есть решение линейной однородной системы

$$A_0 z + A_1 G - \frac{\partial}{\partial x}\left(A_2\frac{\partial z}{\partial x} + A_3 G\right) = 0, \quad z = \frac{\partial G}{\partial t},$$

с нулевыми начальными и граничными условиями

$$\left(A_2\frac{\partial z}{\partial x} + A_3 G\right)|_{x=0,1} = 0, \quad G|_{t=0} = 0.$$

Коэффициенты $A_i,\ i = 0, ..., 3$ имеют вид

$$A_0 = d(G_1) > 0, \quad A_1 = \frac{z_2(d(G_2) - d(G_1))}{G d(G_1) d(G_2)},$$

$$A_2 = a(G_1) > 0,\ A_3 = \frac{\partial z_2}{\partial x}\frac{a(G_1) - a(G_2)}{G} - \frac{b(G_1) - b(G_2)}{G}$$

и являются ограниченными для всех $x \in [0, 1], t \in [0, T]$.

Уравнение для z умножим на $z(x, t)$ и результат проинтегрируем по x от 0 до 1. После стандартных преобразований получим неравенство

$$\int_0^1 z^2 dx + \int_0^1 z_x^2 dx \le C\int_0^1 G^2 dx. \tag{2.77}$$

Здесь и далее C – постоянная, зависящая от T и других данных задачи.

Поскольку из уравнения для G следует неравенство

$$G^2 \le C\int_0^t z^2 d\tau,$$

то неравенство (2.77) примет вид

$$\int_0^1 z^2 dx + \int_0^1 z_x^2 dx \le C\int_0^1\int_0^t z^2 d\tau dx.$$

Полагая $y(t) = \int_0^1 \int_0^t z^2 d\tau dx$, выводим

$$\frac{dy}{dt} \leq Cy,$$

Поэтому $y(t) = 0$, $z = 0, G = 0$. Лемма 1.4.1 доказана.

Теорема 1.4.1 доказана.

4.2 Глобальная разрешимость

Доказательство теоремы 1.4.2. В силу теоремы 1.4.1 будем считать, что на промежутке $[0,\ t_0]$ существует решение задачи (2.35) – (2.39), причем $0 < \phi(x,t) < 1$, $x \in \Omega$, $t \in [0,\ t_0]$. После получения необходимых априорных оценок, не зависящих от величины t_0, локальное решение можно продолжить на весь отрезок $[0,\ T]$.

Положим в (2.67) $s(x,t) = \phi/(1-\phi)$. Тогда функция s удовлетворяет следующей задаче

$$\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{k}(s)\left(\frac{1}{1+s}\frac{\partial^2 G(s)}{\partial x \partial t} - \bar{g}(\phi(s))\right)\right) = 0, \quad (2.78)$$

$$s|_{t=0} = s^0,$$
$$\left(\frac{1}{1+s}\frac{\partial^2 G(s)}{\partial x \partial t} - \bar{g}(\phi(s))\right)|_{x=0,x=1} = 0, \quad (2.79)$$

где

$$\bar{k}(s) = k(\phi(s)),\ \bar{g}(s) = g\left(\frac{1}{1+s}\rho_s + \frac{1+2s}{1+s}\rho_f\right),\ s^0 = \frac{\phi^0}{1-\phi^0}.$$

Имеет место следующая Лемма.

Лемма 1.4.2. *Пусть $s(x,t)$ – решение задачи* (2.78)–(2.79). *Тогда* $\int\limits_0^1 s(x,t)dx = \int\limits_0^1 s^0(x)dx \equiv \lambda$, *и существует такая точка* $a(t) \in [0,1]$, *что* $s(a(t),t) = \lambda > 0$.

Доказательство полностью следует [5, стр.50].

Далее рассмотрим функцию $\psi(s)$, удовлетворяющую соотношению

$$\frac{d^2\psi(s)}{ds^2} = \bar{k}^{-1}(1+s)\frac{dG(s)}{ds}.$$

Лемма 1.4.3. *Пусть* $s(x,t)$ *– решение задачи* (2.78)–(2.79), $n, m \geq 1$. *Тогда функция* ψ *удовлетворяет неравенству* $\psi \geq P\frac{(1+s)^2}{2}$, *где* $P = \frac{\mu\eta}{k} = const > 0$.

Доказательство. Для функции G при $s > 0$ имеем

$$\frac{dG}{ds} = \eta s^{-m}(1+s)^{m-1} = \eta\left(1+\frac{1}{s}\right)^{m-1}\frac{1}{s} \geq \eta\frac{1}{s}.$$

Тогда

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = \bar{k}^{-1}(s)(1+s)\frac{dG}{ds} = P\phi^{-m-n} = P\left(\frac{1+s}{s}\right)^p,$$

где $p = m+n \geq 2$.

Если p – целое, то функция ψ удовлетворяет равенству

$$\psi = P\left(\frac{s^2}{2} + s(c_1 - p) + c_2 + \left(ps - \frac{p(p-1)}{2}\right)lns\right) +$$

$$+\sum_{i=3}^{p} C_p^i \frac{1}{(i-1)(i-2)}\frac{1}{s^{i-2}},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, а

$$C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}.$$

Исследуем свойства функции $(ps - \frac{p(p-1)}{2})lns \equiv L$. Так как

$$(L)'_s = p\left(1 + lns - \frac{p-1}{2s}\right),\ (L)''_s = p\frac{1}{s^2}\left(s + \frac{p-1}{2}\right) > 0,$$

то функция L – выпуклая вниз.

Точка минимума s^* удовлетворяет равенству

$$1 + lns^* = \frac{p-1}{2s^*}.$$

Покажем ограниченность s^*. Поскольку $s^*(1 + lns^*) = \frac{p-1}{2} > 0$, то $0 < s^*(1+lns^*)$. Следовательно, $s^* > e^{-1}$. Если $s^* \geq 1$, то из равенства $s^*(1 + lns^*) = \frac{p-1}{2} > 0$ следует $1 + lns^* \leq \frac{p-1}{2}$. Поэтому $e^{-1} \leq s^* \leq e^{\frac{p-3}{2}}$.

Выбирая константы $c_1,\ c_2$:

$$c_2 \geq \left| \frac{p}{s^*} \left(s^* - \frac{p-1}{2} \right)^2 \right| + \frac{1}{2},\ c_1 \geq p + 1,$$

имеем, что

$$\psi \geq P \frac{(1+s)^2}{2} > 0.$$

Если p – не целое, то представим $p = m + n = r + q$, где r – целая часть, а q – дробная часть. Тогда функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = P \left(1 + \frac{1}{s} \right)^r \left(1 + \frac{1}{s} \right)^q .$$

Введем функцию $\bar{\psi}$, удовлетворяющую равенству

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{ds^2} = P \left(1 + \frac{1}{s} \right)^r .$$

Покажем, что разность $\psi - \bar{\psi}$ положительна. Имеем

$$\frac{d^2(\psi - \bar{\psi})}{ds^2} = P \left(\left(1 + \frac{1}{s} \right)^{r+q} - \left(1 + \frac{1}{s} \right)^r \right) = \delta(s) \geq 0.$$

Выберем $\varepsilon > 0$. В случае $0 < \varepsilon \le s$ представим предыдущее равенство в виде

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\psi - \bar{\psi} - \int\limits_{\varepsilon}^{s}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\xi}\delta(\tau)d\tau\right)d\xi\right) = 0.$$

Откуда следует, что разность $\psi - \bar{\psi}$ удовлетворяет условию

$$\psi - \bar{\psi} = \int\limits_{\varepsilon}^{s}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\xi}\delta(\tau)d\tau\right)d\xi + c_3 + c_4 s \ge c_3 + c_4 s,\ 0 < \varepsilon \le s,$$

где $c_3,\ c_4$ – произвольные постоянные.

Если $s < \varepsilon$, представим уравнение для разности ψ и $\bar{\psi}$ в виде

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\psi - \bar{\psi} - \int\limits_{s}^{\varepsilon}\left(\int\limits_{s}^{\xi}\delta(\tau)d\tau\right)d\xi\right) = 0.$$

Откуда имеем, что

$$\psi - \bar{\psi} \ge c_3 + c_4 s, \quad 0 < s < \varepsilon.$$

В итоге, выбирая константы $c_3, c_4 > 0$, имеем $\psi - \bar{\psi} > 0$. Лемма 1.4.3 доказана.

Приведем пример функции ψ. Пусть $m = n = \eta = k = \mu = 1$. Тогда

$$\psi = (2s-1)lns + \frac{s^2}{2} + s + \frac{3}{2} \ge \frac{(1+s)^2}{2}.$$

Лемма 1.4.4. *Пусть* $s(x,t)$ *– решение задачи* (2.78)–(2.79), $n, m \ge 1$. *Тогда существуют постоянные*

$$A = \lambda e^{-1/\eta N_6^{1/2}},\ B = \lambda e^{1/\eta N_6^{1/2}},$$

$$N_6 = \int_0^1 \left(\psi(s^0) + G_x^2(s^0)\right) dx \exp\{TN_7\},$$

$$N_7 = \frac{1}{2} \max\{1, \frac{4g_0^2}{P}(\rho_s^2 + 4\rho_f^2)\},$$

такие, что $0 < A \leq s \leq B < \infty$ *для любого* $t \in [0, T]$.

Доказательство. Умножив уравнение (2.78) на $\frac{d\psi(s)}{ds}$ и проинтегрировав по x от 0 до 1, получим:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_0^1 \left(\psi(s) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2\right) dx = \int\limits_0^1 \bar{g}(1+s)\frac{\partial G}{\partial x} dx.$$

Отсюда в силу неравенства Коши имеем оценку

$$\frac{d}{dt} \int\limits_0^1 \left(\psi(s) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2\right) dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 dx + \int\limits_0^1 (\bar{g}(1+s))^2 dx\right).$$

С учетом свойств функции ψ имеем

$$\frac{d}{dt} \int\limits_0^1 \left(\psi(s) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2\right) dx \leq N_7 \int\limits_0^1 \left(\psi(s) + \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2\right) dx.$$

Положим

$$y(t) = \int\limits_0^1 \left(\psi(s) + \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2\right) dx.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dt} \le N_7 y, \quad y|_{t=0} = \int_0^1 \left(\psi(s^0) + \left(\frac{\partial G(s^0)}{\partial x} \right)^2 \right) dx \equiv y_0,$$

и, следовательно

$$y \le y_0 e^{N_7 t} \le y_0 e^{N_7 T} \equiv N_6.$$

Поскольку из свойств G имеем оценку

$$\frac{dG}{ds} \ge \eta \frac{1}{s},$$

то

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial G}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \ge \eta^2 \frac{1}{s^2} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 = \eta^2 \left(\frac{\partial lns}{\partial x} \right)^2.$$

Ввиду леммы 1.4.2

$$lns(x,t) - ln(s(a(t),t)) = \int_{a(t)}^x \frac{\partial lns}{\partial x} dx.$$

Поэтому

$$\left| ln \frac{s(x,t)}{s(a(t),t)} \right| \le \int_0^1 \left| \frac{\partial lns}{\partial x} \right| dx \le$$

$$\le \left(\frac{1}{\eta^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 dx \right)^{1/2} = \frac{1}{\eta} N_6^{1/2}.$$

Откуда следует, что

$$0 < \lambda e^{-1/\eta N_6^{1/2}} \le s \le \lambda e^{1/\eta N_6^{1/2}}.$$

Лемма 1.4.4 доказана.

Получим теперь оценки функции z в гельдеровских нормах по x и t.

Умножим уравнение (2.76) на z и проинтегрируем по x от 0 до 1:

$$\int_0^1 \left(\frac{z^2}{d(\bar{G})} + a(\bar{G}) z_x^2 \right) dx = \int_0^1 b(\bar{G}) z_x dx.$$

Применяя неравенства Гельдера и Юнга для правой части, получим оценку сверху

$$\frac{1}{d_2} \int_0^1 z^2 dx + h_1 \int_0^1 z_x^2 dx \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 b^2(\bar{G}) dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 z_x^2 dx.$$

Выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым и учитывая свойства функции $b(\bar{G})$, находим:

$$\int_0^1 (z^2 + z_x^2) dx \leq N_8, \tag{2.80}$$

где N_8 – положительная константа, зависящая от начальных данных, параметров и постоянных задачи, но не зависит от t_0.

Из последнего неравенства следует, что

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |z| \leq 2 N_8^{1/2}.$$

Прежде всего учтем, что неравенство (2.80) гарантирует гельдеровскую непрерывность функции $z(x,t)$ в $\bar{Q}_T$.

Действительно, если x_1 и x_2 – две произвольные точки на [0,1], то

$$|z(x_1,t) - z(x_2,t)| \leq \left(\int_0^1 z_x^2 dx \right)^{1/2} |x_1 - x_2|^{1/2}.$$

Отсюда в силу (2.80) заключаем:

$$H_x^\alpha(z) \equiv \sup_{x_1, x_2 \in [0,1], t \in [0,T]} (|z(x_1,t) - z(x_2,t)| |x_1 - x_2|^{-\alpha}) \leq N_9,$$

$$\forall \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Найдем постоянную Гельдера по времени функции z. Продифференцируем уравнение (2.76) по t. Получим

$$\frac{z_t}{d} + z^2 \left(\frac{1}{d}\right)'_G - (az_{tx} + z_x z a'_G - b'_G z)_x = 0.$$

Введем функцию $\sigma = z_t$. Тогда последнее уравнение перепишется в виде

$$\frac{\sigma}{d} + z^2 \left(\frac{1}{d}\right)'_G - (a\sigma_x + a'_G z z_x - z b'_G)_x = 0.$$

Домножим это уравнение на σ и проинтегрируем полученное равенство по x от 0 до 1. Получим равенство

$$\int\limits_0^1 \frac{\sigma^2}{d} dx + \int\limits_0^1 \sigma z^2 \left(\frac{1}{d}\right)'_G dx +$$

$$+ \int\limits_0^1 a\sigma_x^2 dx + \int\limits_0^1 \sigma_x \left(z z_x a'_G - z b'_G\right) dx = 0.$$

Используя неравенства Юнга и Гельдера, выводим оценку:

$$\int\limits_0^1 (\sigma^2 + \sigma_x^2) dx \le N_{10},$$

где N_{10} зависит только от данных задачи и не зависит от t_0.

Тем самым

$$\max_{x\in[0,1]} |\sigma| = \max_{x\in[0,1]} |z_t| \le N_{11},$$

где N_{11} - постоянная, зависящая от данных задачи.

Проводя такие же рассуждения, как при оценке постоянной Гельдера по x, получаем оценку гельдеровского модуля непрерывности по переменной t:

$$H_t^{\alpha}(z) \equiv \sup_{x_1,x_2\in[0,1],t\in[0,T]} (|z(x,t_2)-z(x,t_1)||t_2-t_1|^{-\beta}) \leq N_{11},$$

$$\forall\beta \in (0,1].$$

Чтобы коэффициенты уравнения

$$az_{xx} + a_x z_x - \frac{1}{d}z = b_x \tag{2.81}$$

были гельдеровскими, необходимо получить оценку постоянной Гельдера производной z_x.

Поскольку из леммы 1.4.4 следует вложение $G_x \in L_2(0,1)$, то в уравнении (2.81) коэффициенты $a_x, b_x \in L_2(0,1)$. Поэтому из (2.81) легко следует, что

$$\int_0^1 z_{xx}^2 dx \leq N_{12},$$

где N_{12} - постоянная, зависящая от данных задачи. Аналогичным образом получаем оценку

$$H_x^{\alpha}(z_x) \equiv \sup_{x_1,x_2\in[0,1],t\in[0,T]} (|z_x(x_2,t)-z_x(x_1,t)||x_2-x_1|^{-\beta}) \leq N_{13},$$

где N_{13} - постоянная, зависящая от данных задачи.

Оценки Гельдера по x и t получены. Далее используем теорию эллиптических уравнений для функции z, изложенную в [22]. Теорема 1.4.2 доказана.

Глава 3

Локализация решений уравнений фильтрации в упругой деформируемой среде

В данной главе для задачи фильтрации вязкой жидкости в упругой деформируемой пористой среде установлено свойство конечной скорости распространения возмущений, свойство метостабильной локализации, конечное время стабилизации решения.

1 Конечная скорость распространения возмущений

В области $Q_T = \Omega \times (0, T)$ рассматривается одномерное нестационарное изотермическое движение несжимаемой жидкости в пороупругой среде, в которой преобладают упругие свойства относительно свойств вязкости:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)\rho_s v_s) = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_f \phi v_f) = 0,$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k(\phi)\left(\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g\right),$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\beta_t(\phi)\left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + v_s \frac{\partial p_e}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g,$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s, \quad p_e = p_{tot} - p_f, \quad \rho_{tot} = (1-\phi)\rho_s + \phi\rho_f.$$

Истинные плотности жидкости и твердой среды ρ_f, ρ_s принимаются постоянными. Искомыми являются величины ϕ, $\vec{v}_s$, $\vec{v}_f$, p_f, p_s.

Данную систему удается свести к одному вырождающемуся параболическому уравнению, используя переход к переменным Лагранжа по скорости твердой фазы. Для полученного уравнения применяется известная техника доказательства конечной скорости распространения возмущений [2], [3], [4], [49].

В массовых переменных Лагранжа система принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi(v_f - v_s)) = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + (1-\phi)^2 \frac{\partial v_s}{\partial x} = 0, \tag{3.2}$$

$$\phi(v_f - v_s) = -k(\phi)\left((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g\right), \tag{3.3}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\beta_t(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad p_e = p_{tot} - p_f, \tag{3.4}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g, \rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s. \qquad (3.5)$$

Введем функцию $G(\phi)$, определенную равенством

$$\frac{\partial G(\phi)}{\partial \phi} = \frac{1}{\beta_t(\phi)(1-\phi)}.$$

Тогда из уравнений (3.2) и (3.4) имеем

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} = -\frac{\partial G(\phi)}{\partial t},$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered} p_e = -G(\phi) + G^0 + p_e^0, \quad G^0 = G(\phi^0), \\ \phi|_{t=0} = \phi^0(x), \quad p_e|_{t=0} = p_e^0(x), \end{gathered} \qquad (3.6)$$

где $p_e^0(x), \phi^0(x)$ – заданные функции координаты x.

Из уравнений (3.1) и (3.3) системы получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\phi)\left((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g\right)\right).$$

С учетом равенства $p_f = p_{tot} - p_e$ и уравнений (3.5), (3.6) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k(\phi)}{\beta_t(\phi)}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\phi)\left((g((1-\phi)\rho_s - \right.\right.$$

$$\left.\left. -(1+\phi)\rho_f)) + \frac{\partial(p_e^0(x) + G^0(x))}{\partial x}\right)\right).$$

В дальнейшем вместо $\phi \in [0,1)$ введем новую искомую функцию $s = \phi/(1-\phi)$ и будем считать [57], что

$$k(\phi) = \frac{k}{\mu}\phi^n, \quad \beta_t(\phi) = \beta_\phi \phi^b,$$

где $k = const > 0$ – проницаемость, $\mu = const > 0$ – динамическая вязкость жидкости, $\beta_\phi = const > 0$ – коэффициент объемной сжимаемости твердой фазы, b, n –

положительные параметры среды (в дальнейшем предполагается, $0 < n - b \leq 2, \quad n + b - 2 > 0$). Тогда уравнение для s можно представить в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(d(s)\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \frac{\partial f(s)}{\partial x}, \tag{3.7}$$

причем предполагается, что существуют положительные постоянные $M,\ \delta_1,\ \delta_2$ такие, что справедливы следующие оценки:

$$0 \leq s \leq M < \infty, \quad |\frac{dp_e^0(x)}{dx}| \leq \delta_1 < \infty,$$

$$\beta_\phi|\frac{dG^0(x)}{dx}| \leq \delta_2 < \infty, \quad \nu_1 s^{n-b} \leq d(s) \leq \nu_2 s^{n-b},$$

$$\nu_1 = \frac{k}{\mu\beta_\phi}(1+M)^{b-n-2}, \quad \nu_2 = \frac{k}{\mu\beta_\phi}, \quad |f(s)| \leq \nu_3 s^n,$$

$$\nu_3 = \frac{k}{\mu}\left(g(\rho_s + (1+2M)\rho_f) + \delta_1 + \frac{\delta_2}{\beta_\phi}\right), \quad g = const \geq 0.$$

Замечание. Если $\phi^0 = const,\ p_e^0 = const$, то формально можно положить $\delta_1, \delta_2 = 0$.

Основной результат настоящего раздела можно сформулировать следующим образом: пусть $s(x,t)$ – слабое решение (3.7) в $K_{\rho_0}(x_0) \times (0,\infty)$, $K_{\rho_0}(x_0) = \{(x,x_0) : |x - x_0| < \rho_0\}$, такое, что $s_0(x) \equiv s(x,0) = 0$ в $K_{\rho_0}(x_0)$. Тогда существуют $T > 0$ и $\rho(t) \in (0,\rho_0)$ такие, что $s(x,t) = 0$ для всех $t \leq T$ и $x \in K_\rho(x_0)$. При дополнительных предположениях на характер обращения в нуль $s_0(x)$ доказывается, что $s(x,t) = 0$ в $K_{\rho_0}(x_0)$. Здесь не затрагиваются вопросы существования соответствующего решения [18]. Доказательство использует локальный энергетический метод, развитый в работах [49,63].

Определение 2.1.1. *Неотрицательная ограниченная измеримая функция* $s(x,t)$ $(0 \leq s(x,t) \leq M)$, *определенная в* $\Omega \times (0,\infty)$, *есть слабое решение уравнения* (3.7) *с начальным условием* $s_0(x)$, *если для* $\forall T > 0$ *и любого открытого подмножества* $\Omega_1 \subset R^1$ *выполняются следующие предположения*

$$s \in L_\infty(0, T, W_2^1(\Omega)),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(s^{n-b+1}\right) \in L_2[(0,T) \times \Omega_1], \tag{3.8}$$

$$\lim_{t \to 0} \int\limits_{\Omega_1} s dx = \int\limits_{\Omega_1} s_0 dx \tag{3.9}$$

и для $\forall \varphi(x,t) \in \overset{o}{C}{}^\infty((0,T) \times \Omega_1)$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \left[d(s)\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f(s)}{\partial x}\,\varphi\right] dx\,dt = \\ = \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega s\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dx\,dt + \int\limits_\Omega s(x,0)\,\varphi(x,0)\,dx.\end{gathered} \tag{3.10}$$

Введем обозначения

$$A(\rho,t) \equiv \int\limits_{K_\rho(x_0)} s^2(x,t)dx, \quad B(\rho,t) \equiv \int\limits_{K_\rho(x_0)} s^{n-b}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 dx$$

и без ограничения общности будем считать $x_0 = 0$.
Лемма 2.1.1. *Пусть выполнены предположения* (3.8), (3.9). *Тогда для* $s(\rho,t)$ *справедливы оценки*

$$\begin{gathered}s^\sigma(\rho,t) \le C_i A^{\frac{1-\theta}{r}}(\rho,t)[B^{\frac{1}{2}}(\rho,t) + \rho^{-\delta}A^{\frac{1}{r}}(\rho,t)]^\theta, \\ i = 1,2,\end{gathered} \tag{3.11}$$

где

$$\sigma = \frac{n}{2} - \frac{b}{2} + 1 > 0, \quad \theta = \frac{2}{2+r}, \quad \delta = \frac{1}{\theta r}.$$

При $0 < n-b < 2$, $\frac{4}{n-b+2} < r < 2$,

$$C_1 = CM^{\frac{(r\sigma-2)(1-\theta)}{2}} \max(\sigma, M^{\frac{r\sigma-2}{r}}),$$

а при $n-b=2, \quad r = \frac{4}{n-b+2} = 1$,

$$C_2 = 2C,$$

C– положительная постоянная, не зависящая от радиуса ρ.

Доказательство следует работе [6]. Для $\forall u \in W_q^1(K_\rho(0))$ справедлива оценка [2]

$$|u(\rho)| \le C \cdot \left(\|u_x\|_{q,K_\rho(0)} + \rho^{-\delta} \|u\|_{r,K_\rho(0)} \right)^\theta \|u\|_{r,K_\rho(0)}^{1-\theta}, \quad (3.12)$$

$$\theta = \frac{q}{q-r+qr}, \quad \delta = \frac{1}{\theta r}, \quad q \ge 1, \quad 1 \le r \le \infty.$$

Положим в (3.12) $u = s^\sigma$, $q = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} s^\sigma(\rho,t) \le C \cdot \Bigg(\sigma \Bigg(\int\limits_{K_\rho(0)} s^{2\sigma-2} \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 dx \Bigg)^{\frac{1}{2}} + \\ + \rho^{-\delta} \Bigg(\int\limits_{K_\rho(0)} s^{r\sigma}\, dx \Bigg)^{\frac{1}{r}} \Bigg)^\theta \Bigg(\int\limits_{K_\rho(0)} s^{r\sigma}\, dx \Bigg)^{\frac{1-\theta}{r}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Усилим правую часть (3.13) следующим образом. Если $0 < n-b < 2$ и $1 < \frac{4}{n-b+2} < r < 2$, то $\sigma > 2/r$, и

$$s^{r\sigma} = s^2\, s^{r\sigma-2} \le M^{r\sigma-2}\, s^2.$$

И, следовательно,

$$s^\sigma(\rho,t) \le C\, M^{\frac{(r\sigma-2)(1-\theta)}{r}} \cdot \Bigg(\sigma \Bigg(\int\limits_{K_\rho(0)} s^{n-b} \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 dx \Bigg)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+M^{\frac{r\sigma-2}{r}}\rho^{-\delta}\Bigg(\Big(\int\limits_{K_\rho(0)} s^2\,dx\Big)^{\frac{1}{r}}\Bigg)^{\theta}\Big(\int\limits_{K_\rho(0)} s^2\,dx\Big)^{\frac{1-\theta}{r}},$$

Если же $n-b=2$, то в (3.13) положим $r=4/(n-b+2)=1$, и учитывая, что $s^{r\sigma}=s^2\,s^{r\sigma-2}\le s^2$, при $\sigma=2/r$, выводим

$$s^\sigma(\rho,t)\le C\cdot\Bigg(\sigma\Big(\int\limits_{K_\rho(0)} s^{n-b}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\rho^{-\delta}\Bigg(\Big(\int\limits_{K_\rho(0)} s^2\,dx\Big)^{\frac{1}{r}}\Bigg)^{\theta}\Big(\int\limits_{K_\rho(0)} s^2\,dx\Big)^{\frac{(1-\theta)}{r}},$$

то есть приходим к (3.11). Лемма доказана.

Теорема 2.1.1. *Пусть выполнены условия* (3.8) – (3.10) *и дополнительно* $t\in[0,T]$, $T\le T^*$, *где*

$$T^*\le min\Bigg(M^{2-b-n}\left(\frac{min(1,\nu_1)}{n\nu_3}\right)^2,$$

$$\left(\frac{(2\theta-1)(\rho_0^{1+2\delta}-\rho^{1+2\delta})}{(2\delta+1)4(\nu_2K_i)^2}w^{1-2\theta}(\rho_0,t)\right)^{\frac{1}{1-\theta}}\Bigg),i=1,2.$$

Если $s(x,t)$ *– слабое решение* (3.7) *и* $s_0(x)=0$ *в* $K_{\rho_0}(x_0)$, $0<\rho_0<dist(x_0,\ \partial G)$, *то* $s(x,t)=0$ *почти всюду в* $K_{\rho_1(t)}(x_0)$ *при* $0\le t\le T\le T^*$. *Причем*

$$\rho_1(t)=\Big({\rho_0}^{1+2\delta}-L\,t^{1-\theta}(w(\rho_0,t))^{2\theta-1}\Big)^{\frac{1}{1+2\delta}},$$

где при $0<n-b<2$

$$L=4C_1^2\cdot Q(r),\quad r\in\left(\frac{4}{n-b+2},\ 2\right),$$

а при $n-b=2$

$$L = 4C_2^2 \cdot Q(r), \quad r = \frac{4}{n-b+2} = 1.$$

В обоих случаях здесь

$$w(\rho_0,t) = \sup_{0\le\tau\le t} \int\limits_0^\tau B(\rho_0,s)ds,$$

$$Q(r) = \frac{2\delta+1}{2\theta-1}\left(\frac{1}{2}\rho_0^\delta + T^{\frac{1}{2}} M^{2(\delta-1)}\rho_0^{\delta-1}\right)^{2\theta} (\nu_2)^2\,,$$

$$K_i = C_i\,\left[\frac{1}{2}{\rho_0}^\delta + T^{\frac{1}{2}}\,{\rho_0}^{\delta-1}\,M^{2(\delta-1)}\right]^\theta, \quad i=1,2,$$

а постоянные C_1 *и* C_2 *определены в* (3.11).

Доказательство теоремы 2.1.1. Положим в (3.10)

$$\varphi(x,t) = \varphi_n(|x-x_0|)\xi_k(t)\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} T_l(s(x,\tau))d\tau,$$

где

$$h \in (0,T-t),\ T_l(s)\ = min(|s|,l)sign\,s,$$

$$\varphi_n(r) = \begin{cases} 1, \quad r\in[0,\rho-1/n], \\ n(\rho-r), \quad r\in[\rho-1/n,\rho], \\ 0, \quad r\in[\rho,\rho_0], \end{cases}$$

$$\xi_k(t) = \begin{cases} 1, \quad r\in[0,t-1/k], \\ k(t-r), \quad r\in[t-1/k,t], \\ 0, \quad r\in[t,T^*]. \end{cases}$$

Имеем

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} \left[d(s)\frac{\partial s}{\partial x}\,\xi_k(\tau)\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_n \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} T_l(s(x,\psi))d\psi\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial f(s)}{\partial x}\,\varphi(x,\tau)\right] dx\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} s\,\varphi_n \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\xi_k \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} T_l(s(x,\psi))d\psi\right) dx\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} s(x,0)\,\varphi(x,0)\,dx. \tag{3.14}$$

С учетом теоремы Лебега при $k \to \infty$ получим

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^\infty \int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} s\,\varphi_n \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\xi_k \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} T_l(s(x,\psi))d\psi\right) dx\,d\tau =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_0^\infty \int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} s\,\varphi_n \frac{\partial \xi_k}{\partial \tau}\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} T_l(s(x,\psi))d\psi\,dx\,d\tau +$$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^\infty \int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} s\,\varphi_n \xi_k \frac{1}{h}\Big(T_l(s(x,\tau+h)) - T_l(s(x,\tau))\Big)\,dx\,d\tau =$$

$$= -\lim_{k\to\infty} k \int\limits_{t-1/k}^{t} \int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} s\,\varphi_n \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} T_l(s(x,\psi))d\psi\,dx\,d\tau +$$

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} s\,\varphi_n \frac{1}{h}\Big(T_l(s(x,\tau+h)) - T_l(s(x,\tau))\Big)\,dx\,d\tau =$$

$$= -\int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} s\,\varphi_n \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} T_l(s(x,\psi))d\psi\,dx +$$

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} s\,\varphi_n \frac{1}{h}\Big(T_l(s(x,\tau+h)) - T_l(s(x,\tau))\Big)\,dx\,d\tau$$

и, следовательно, при $h \to 0$ тождество (3.14) можно представить в виде

$$\int\limits_0^t \int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} \left[d(s)\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}T_l + \left(d(s)\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\varphi_n\frac{\partial T_l}{\partial x} - \frac{\partial f(s)}{\partial x}\right)\varphi_n T_l\right]dx\,d\tau =$$

$$= -\int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} s\varphi_n T_l\,dx + \int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} s_0(x)\varphi_n T_l(s(x,0))\,dx.$$

Соответственно, после предельного перехода при $l \to$

∞ получим

$$\int\limits_0^t \int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} \left[sd(s)\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \left(d(s)\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot\varphi_n - \frac{\partial f(s)}{\partial x}\right)\varphi_n s\right] dx\, d\tau =$$

$$= - \int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} s^2\varphi_n\, dx + \int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} s_0^2(x)\varphi_n\, dx.$$

Наконец, устремляя $n \to \infty$, выводим

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^t \int\limits_{K_{\rho_0}(x_0)} sd(s)\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\, dx\, d\tau =$$

$$= - \lim_{n\to\infty} n \int\limits_0^t \int\limits_{\rho-1/n<|x-x_0|<\rho} sd(s)\frac{\partial s}{\partial x}\, dx\, d\tau = - \int\limits_0^t sd(s)\frac{\partial s}{\partial x}\, d\tau.$$

Тем самым, приходим к равенству $(x_0 = 0)$

$$\int\limits_0^\rho s^2 dx + \int\limits_0^t \int\limits_0^\rho \left[d(s)\, \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - s\frac{\partial f}{\partial x}\right] dx\, d\tau = \int\limits_0^t sd(s)\,\frac{\partial s}{\partial x}(\rho,\tau)\, ds\, d\tau. \tag{3.15}$$

Положим

$$a(\rho,t) = \sup_{0\le\tau\le t} A(\rho,\tau).$$

Из тождества (3.15) следует

$$a(\rho,t) + \nu_1 w(\rho,t) \le \nu_2 I_1 + I_2, \tag{3.16}$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^t s(\rho,\tau)^{n-b+1} \left|\frac{\partial s}{\partial x}(\rho,\tau)\right| d\tau,$$

$$I_2 = \int\limits_0^t \int\limits_0^\rho s(\rho,\tau) \left|\frac{\partial f(s)}{\partial x}\right| dx d\tau.$$

Используя неравенство Гельдера и (3.11), получим

$$I_1 = \int\limits_0^t s(\rho,\tau)^{n-b+1} \left|\frac{\partial s}{\partial x}(\rho,s)ds\right| \le$$

$$\le \left(\int\limits_0^t s^{n-b}(\rho,\tau)\left(\frac{\partial s}{\partial x}(\rho,\tau)\right)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int\limits_0^t s^{n-b+2}(\rho,\tau)\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)^{\frac{1}{2}} a_1(\rho,t),$$

$$a_1(\rho,t) \equiv \left(\int\limits_0^t s^{n-b+2}(\rho,\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C_i \left(\int\limits_0^t (B^{\frac{1}{2}}(\rho,\tau) + \rho^{-\delta} A^{\frac{1}{r}}(\rho,\tau))^2\, d\tau\right)^{\frac{\theta}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int\limits_0^t A^{\frac{2}{r}}(\rho,\tau) d\tau\right)^{\frac{1-\theta}{2}} \le C_i \left(\left(\int\limits_0^t B(\rho,\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \rho^{-\delta} \left(\int\limits_0^t A^{\frac{2}{r}}(\rho,\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\theta} t^{\frac{1-\theta}{2}}\, a^{\frac{1-\theta}{r}}(\rho,t) \le$$

$$\leq C_i\rho^{-\delta}t^{\frac{1-\theta}{2}}\left(w^{\frac{1}{2}}(\rho,t)\,a^{\frac{1-\theta}{r\theta}}(\rho,t)\rho^{\delta}+T^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{r\theta}}(\rho,t)\right)^{\theta},i=1,2.$$

Но $\rho<\rho_0$ и, кроме того,

$$2w^{\frac{1}{2}}\,a^{\frac{1-\theta}{r\theta}}=2w^{\frac{1}{2}}\,a^{\frac{1}{2}}\leq a+w,$$

$$a^{\frac{1}{r\theta}}(\rho,t)\leq a(\rho,t)\,a^{\delta-1}(\rho_0,t)\leq a(\rho,t)\,{\rho_0}^{\delta-1}\,M^{2(\delta-1)},\quad \delta>1.$$

Поэтому

$$a_1(\rho,t)\leq C_i\rho^{-\delta}t^{\frac{1-\theta}{2}}\left(\frac{\rho_0^{\delta}}{2}(a+w)+T^{\frac{1}{2}}a\rho_0^{\delta-1}M_0^{2(\delta-1)}\right)^{\theta}\leq$$

$$\leq C_i\rho^{-\delta}t^{\frac{1-\theta}{2}}(a+w)^{\theta}\left(\frac{1}{2}\rho_0^{\delta}+T^{\frac{1}{2}}\rho_0^{\delta-1}M^{2(\delta-1)}\right)^{\theta}.$$

Таким образом,

$$I_1\leq K_it^{\frac{1-\theta}{2}}\,\rho^{-\delta}\,[a(\rho,t)+w(\rho,t)]^{\theta}\left(\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$K_i=C_i\,\left[\frac{1}{2}{\rho_0}^{\delta}+T^{\frac{1}{2}}\,{\rho_0}^{\delta-1}\,M^{2(\delta-1)}\right]^{\theta},i=1,2.$$

Далее оценим I_2.

Имеем

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leq n\nu_3s^{n-1}\left|\frac{\partial s}{\partial x}\right|.$$

Тогда

$$I_2\leq n\nu_3\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^{\rho}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2s^{n-b}dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^{\rho}s^{n+b}dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq n\nu_3w^{\frac{1}{2}}M^{\frac{n+b-2}{2}}\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^{\rho}s^2dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq n\nu_3 M^{\frac{n+b-2}{2}} w^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} n\nu_3 M^{\frac{n+b-2}{2}} t^{\frac{1}{2}} (a+w).$$

Следовательно, (3.16) принимает вид

$$min(1,\nu_1)(a(\rho,t)+w(\rho,t)) \leq \nu_2 I_1 + I_2 \leq$$

$$\leq t^{\frac{1-\theta}{2}} \nu_2 K_i \rho^{-\delta} \left(a(\rho,t)+w(\rho,t)\right)^{\theta} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{1}{2} n\nu_3 M^{\frac{b+n-2}{2}} t^{\frac{1}{2}} (a+w), \quad i=1,2.$$

Далее выберем t таким образом, что

$$n\nu_3 M^{\frac{b+n-2}{2}} t^{\frac{1}{2}} \leq min(1,\nu_1).$$

Тогда

$$\frac{1}{2}(a+w) \leq \nu_2 K_i t^{\frac{1-\theta}{2}} \rho^{-\delta} (a+w)^{\theta} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому

$$\rho^{\delta} w^{1-\theta} \leq (a+w)^{1-\theta} \rho^{\delta} \leq 2\nu_2 K_i t^{\frac{1-\theta}{2}} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)^{\frac{1}{2}},$$

и, следовательно,

$$\rho^{2\delta} w^{2(1-\theta)} \leq K_i^* t^{1-\theta} \frac{\partial w}{\partial \rho}, \tag{3.17}$$

где $K_i^* = 4(\nu_2 K_i)^2, i=1,2.$

Интегрирование (3.17) по ρ от ρ_1 до ρ_0 дает $(1 \leq r < 2)$

$$\frac{1}{2\delta+1}(\rho_0^{1+2\delta} - \rho_1^{1+2\delta}) \leq K_i^* t^{1-\theta} \cdot$$

$$\cdot (w^{2\theta-1}(\rho_0,t) - w^{2\theta-1}(\rho_1,t)) \frac{1}{2\theta-1}.$$

Откуда имеем неравенство

$$\begin{gathered}\rho_1^{1+2\delta} - \rho_0^{1+2\delta} + \frac{2\delta+1}{2\theta-1} K_i^* t^{1-\theta} \cdot \\ \cdot w^{2\theta-1}(\rho_0, t) \geq \frac{2\delta+1}{2\theta-1} K_i^* t^{1-\theta} w^{2\theta-1}(\rho_1, t).\end{gathered} \tag{3.18}$$

Выбирая t таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\rho_1^{1+2\delta} = \rho_0^{1+2\delta} - \frac{2\delta+1}{2\theta-1}\, K_i^*\, t^{1-\theta}\, w^{2\theta-1}(\rho_0, t),$$

получим, что $w(\rho, t) = 0$ для всех $\rho \leq \rho_1$, то есть $s(x, t) = 0$ почти всюду в $K_\rho(0)$ при $\rho \leq \rho_1$ и

$$\begin{gathered}0 \leq t \leq min\Bigg(M^{2-b-n}(n\nu_3)^{-2}(\min(1, \nu_1)^2, \\ \left(\frac{(\rho_0^{1+2\delta} - \rho^{1+2\delta})(2\theta-1)}{(2\delta+1)K_i^*} w^{1-2\theta}(\rho_0, t)\right)^{\frac{1}{1-\theta}}\Bigg).\end{gathered}$$

2 Метастабильная локализация решения

Теорема 2.2.1. *Пусть дополнительно к условиям теоремы 2.1.1 выполнены следующие условия*

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t B(\rho, \tau) d\tau \leq C_0, \\ \int\limits_{K_\rho(x_0)} s_0^2(x) dx \leq K_3 \Big(\rho - \rho_0\Big)^{\frac{2+r}{2-r}}, \quad \forall \rho \in (\rho_0, R),\end{gathered} \tag{3.19}$$

где R, K_3 – некоторые положительные параметры. Тогда существует T_0, зависящее от данных задачи, такое, что $s(x, t) = 0$ при почти всех $x \in K_{\rho_0}(x_0)$, и $t \in [0, T_0]$.

Доказательство теоремы 2.2.1. Следуя начальным рассуждениям теоремы 1 и формально считая в (3.14), что роль ρ играет число R, для всех $\rho \in (0, R)$ выводим исходное равенство (3.15). Согласно условиям теоремы, $s_0(x) = 0$ в шаре $K_{\rho_0}(x_0)$. Поэтому первый интеграл в правой части (3.15) (от s_0^2)на самом деле (при $\rho \in (\rho_0, R)$) берется по промежутку (ρ_0, ρ) и, следовательно, для него справедлива оценка (3.19). Остальные слагаемые правой части (3.15) оцениваются так же, как и в теореме 2.1.1. Итак, вместо (3.18) имеем для всех $t < T$

$$\frac{1}{2}(a+w) \le \nu_2 K_i (a+w)^{\theta} \cdot$$

$$\cdot \rho^{-\delta}\, t^{\frac{1-\theta}{2}} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)^{\frac{1}{2}} + K_3 \Big(\rho - \rho_0\Big)^{\frac{1}{2\theta-1}}, i = 1, 2.$$

Первое слагаемое правой части оценим с помощью неравенства Юнга

$$\frac{1}{2}(a+w) \le \varepsilon^{\frac{1}{\theta}} \theta (a+w) + \frac{1-\theta}{\varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}}}\, t^{\frac{1}{2}}\, \rho^{-\frac{\delta}{1-\theta}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)^{\frac{1}{2(1-\theta)}} (\nu_2 K_i)^{\frac{1}{1-\theta}} + K_3 \Big(\rho - \rho_0\Big)^{\frac{1}{2\theta-1}}.$$

Выбирая $\varepsilon^{1/\theta} = \frac{1}{4\theta} > 0$, получим

$$\frac{1}{4}(a+w) \le \frac{1-\theta}{\varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}}}\, t^{\frac{1}{2}}\, \rho^{-\frac{\delta}{1-\theta}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)^{\frac{1}{2(1-\theta)}} (\nu_2 K_i)^{\frac{1}{1-\theta}} + K_3 \Big(\rho - \rho_0\Big)^{\frac{1}{2\theta-1}}.$$

Используя неравенство $a^p + w^p \ge (a+w)^p,\ 0 < p < 1,\ (a, w) \ge 0$ имеем

$$w^{2(1-\theta)} \le (4(1-\theta))^{2(1-\theta)} \varepsilon^{-2}\, \rho^{-2\delta} \cdot$$

$$\cdot\,(\nu_2 K_i)^2\, t^{1-\theta}\,\frac{\partial w}{\partial \rho} + (4K_3)^{2(1-\theta)}\left(\rho-\rho_0\right)^{\frac{2(1-\theta)}{2\theta-1}}.$$

Полученное соотношение есть частный случай неравенства

$$w^\sigma \le C_i^*\, t^\kappa\, w'_\rho + C\left(\rho-\rho_0\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}, \qquad 0<\sigma<1, \quad \rho\in[\rho_0,\ R], \tag{3.20}$$

изученного в [3]. Как показано в цитированной работе, (3.20) влечет равенство $w(\rho_0,t)=0$ при всех $t\in[0,t_0]$, где t_0 вычисляется из условия ($\sigma=2(1-\theta)$)

$$t_0 = ((1-\sigma)\,2^{1-\sigma}\,R/C_i^* C_0^{1-\sigma})^{2/\sigma}, \qquad C_i^* = (4(1-\theta))^{2(1-\theta)}\varepsilon^{-2}\,\rho^{-2\delta}\,\left(\nu_2 K_i\right)^2,\ i=1,2, \tag{3.21}$$

а C_0 согласно (3.8) такое, что $w(t,\rho)\le C_0$. Поэтому $s(x,t)=0$ при почти всех $x\in K_{\rho_0}(x_0)$ и $t\in[0,T_0]$, $T_0=\min(t_0,T^*)$.

Покажем, что неравенство (3.20) влечет $w(\rho_0,t)=0,\ \forall t\in[0,t_0]$.

Пусть существует $t_*,\ 0<t_*\le t_0$, такое, что $\omega(t_*,\rho_0)=\delta>0$. Поскольку $w_t\ge 0, w_\rho\ge 0$, то

$$w(t_*,\rho)\ge w(t_*,\rho_0)=\delta>0.$$

Покажем, что $w(t_*,\rho)=0$. Представим $w(t_*,\rho)$ в виде

$$w(t_*,\rho)=D(\rho-\rho_0)^{1/(1-\sigma)}+v(t_*,\rho), \tag{3.22}$$

где постоянная $D(t_*)$ удовлетворяет неравенству

$$2^{\sigma-1}D^\sigma \ge C_i^* t_*^\kappa D\frac{1}{1-\sigma}+C, \quad \kappa=1-\theta, \tag{3.23}$$

например, $D=2[(1-\sigma)^{-1}C_i^* t_*^\kappa]^{-1/(1-\sigma)}$.

Очевидно, что неизвестная функция $v(t_*, \rho) = v(\rho)$ непрерывна на $[0, R]$, причем $v(\rho_0) = \delta > 0$ и существует $\varepsilon(\delta) > 0$ такое, что $v(\rho) > \delta/2$ при $\rho_0 \le \rho < \rho_0 + \varepsilon$. Подставляя (3.22) в неравенство (3.21), получим

$$\begin{gathered}(D(\rho-\rho_0)^{1/(1-\sigma)} + v)^\sigma \le C_1 t_*^\kappa \cdot \\ \cdot\left(D\frac{1}{1-\sigma}(\rho-\rho_0)^{1/(1-\sigma)} + v_\rho\right) + C(\rho-\rho_0)^{\sigma/(1-\sigma)}.\end{gathered} \tag{3.24}$$

Левую часть в (3.24) оценим снизу с помощью неравенства

$$a^\sigma + b^\sigma \le 2^{1-\sigma}(a+b)^\sigma, \quad 0 < \sigma \le 1, \quad (a, b) > 0.$$

Это, с учетом (3.23), приведет к следующему дифференциальному неравенству для $v(\rho)$

$$v^\sigma \le C_i^* t_*^\kappa v_\rho. \tag{3.25}$$

При $\rho < \rho_0 + \varepsilon,\ v(\rho) > \delta/2$, неравенство (3.25) легко интегрируется и приводит к оценке

$$v^{1-\sigma}(\rho_0) + (\rho-\rho_0)(1-\sigma)2^{\sigma-1}/C_i^* t_* \le v^{1-\sigma}(\rho). \tag{3.26}$$

Следовательно, во-первых, $v(\rho) > v(\rho_0) = \delta$ и тем самым (3.26) справедливо для любого $\rho \in [\rho_, R]$. Во-вторых, из (3.21), (3.26) и свойств w получаем неравенство

$$\begin{gathered}v^{1-\sigma}(\rho_0) \le v^{1-\sigma}(R) - (1-\sigma)2^{\sigma-1} \cdot \\ \cdot\frac{R}{C_i^* t_*^\kappa} \le C_0^{1-\sigma} - \frac{(1-\sigma)2^{\sigma-1}R}{C_i^* t_*^\kappa} = 0,\end{gathered}$$

противоречащее сделанному ранее предположению, что

$$w(t_*, \rho_0) = v(t_*, \rho_0) = \delta > 0.$$

Теорема доказана.

3 Конечное время стабилизации решения

Пусть в уравнении для s

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(d(s)\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \frac{\partial f(s)}{\partial x}, \tag{3.27}$$

предполагается, что

$$\begin{gathered}
0 < n < b, \quad 2 - n \leq b < 2 + n, \quad 0 \leq s \leq M < \infty, \\
\left|\frac{\partial p_e^0(x)}{\partial x}\right| \leq \delta_1 < \infty, \quad \beta_\phi \left|\frac{\partial G^0(x)}{\partial x}\right| \leq \delta_2 < \infty, \\
0 < \beta_\phi < \frac{\delta_2}{\delta_1 + g(\rho_s + \rho_f(1+2M))}, \\
0 < \delta_2 < (n-b+2)^{-1} n^{-1} \beta^{-1/\alpha} \cdot \\
\cdot M^{1-b}(1+M)^{b-n-2}(mes\Omega)^{(n-b)/4}, \\
\text{где } \beta = \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha}, \quad g = const \geq 0, \\
\alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{n-b+2}{4}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{r}\right)^{-1}, r \geq 1.
\end{gathered} \tag{3.28}$$

и справедливы оценки

$$\nu_1 s^{n-b} \leq d(s) \leq \nu_2 s^{n-b}, \qquad |f(s)| \leq \nu_3 s^n,$$

$$\nu_1 = \tfrac{k}{\mu\beta_\phi}(1+M)^{b-n-2}, \quad \nu_2 = \tfrac{k}{\mu\beta_\phi}, \tag{3.29}$$

$$\nu_3 = \tfrac{k}{\mu}\left(g(\rho_s + (1+2M)\rho_f) + \delta_1 + \tfrac{\delta_2}{\beta_\phi}\right).$$

Дополним уравнение (3.27) в области $(x,t) \in Q = \Omega \times (0,T)$ следующими начально-краевыми условиями

$$s(x,0) = s_0(x),\ x \in \Omega;\ s|_{\partial\Omega} = 0,\ t \in (0,T). \tag{3.30}$$

Решение задачи (3.27) – (3.30) понимается в обобщенном смысле.

Определение 2.3.1. *Неотрицательная ограниченная измеримая функция* $s(x,t)$ $(0 \leq s(x,t) \leq M)$ *определенная в* $\Omega \times (0,\infty)$ *есть слабое решение задачи* (3.27) – (3.30), *если для* $\forall T > 0$ *и любого открытого подмножества* $\Omega_1 \subset R^1$ *выполняются следующие предположения*

$$s \in L_\infty(0,T,W_2^1(\Omega)),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(s^{n-b+1}\right) \in L_2[(0,T) \times \Omega_1],$$

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\Omega_1} s dx = \int\limits_{\Omega_1} s_0 dx$$

и для $\forall \varphi(x,t) \in \overset{o}{C}{}^\infty((0,T)\times\Omega_1)$

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega \left[d(s)\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f(s)}{\partial x}\,\varphi\right] dx\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega s\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dx\,dt + \int\limits_\Omega s(x,0)\,\varphi(x,0)\,dx.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.3.1. *Пусть* s *– обобщенное решение задачи* (3.27)–(3.30) *и выполнены условия* (3.28) – (3.29). *Тогда существует конечное время* t_0 *такое, что* $s(x,t) = 0,\ x \in \Omega, t \geq t_0$.

Доказательство. Для $s(x,t)$ в силу (3.27), (3.30) аналогично [4, 60, 63] легко устанавливается неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega s^2 dx + \int\limits_\Omega d(s)\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 dx \leq \int\limits_\Omega f'(s)\frac{\partial s}{\partial x} s dx.$$

Оценим правую часть, используя неравенство Гельдера и Юнга

$$\int\limits_{\Omega} f'(s)\frac{\partial s}{\partial x} s dx \le \left(\int\limits_{\Omega} d(s)(\frac{\partial s}{\partial x})^2 dx\right)^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left(\int\limits_{\Omega} \frac{s^2(f'(s))^2}{d(s)} dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} d(s)(\frac{\partial s}{\partial x})^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \frac{s^2(f'(s))^2}{d(s)} dx.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} s^2 dx + \int\limits_{\Omega} d(s)\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 dx \le \int\limits_{\Omega} \frac{s^2(f'(s))^2}{d(s)} dx. \quad (3.31)$$

Далее оценим правую часть (3.31)

$$\int\limits_{\Omega} \frac{s^2(f'(s))^2}{d(s)} dx \le C_1 \int\limits_{\Omega} s^2 dx \le$$

$$\le C_1 (\int\limits_{\Omega} s^2 dx)^{\frac{n-b+2}{2}} (\int\limits_{\Omega} s^2 dx)^{(b-n)/2} \le$$

$$\le C_1 (\int\limits_{\Omega} s^2 dx)^{\frac{n-b+2}{2}} (M^2 mes\Omega)^{(b-n)/2} = C_2 (\int\limits_{\Omega} s^2 dx)^{\frac{n-b+2}{2}},$$

где $C_1 = \nu_3^2 n^2 \nu_1^{-1} M^{n+b-2},\ C_2 = C_1 M^{b-n} (mes\Omega)^{(b-n)/2}$.

Для оценки второго слагаемого из левой части (3.31) воспользуемся интерполяционным неравенством [21]

$$||u||_{q,\Omega} \le \beta ||u_x||^{\alpha}_{m,\Omega} ||u||^{1-\alpha}_{r,\Omega},$$

$$u \in \overset{o}{W}{}^{1}_{m},\ q \in [r,\infty),\ \alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{r}\right)^{-1},$$

$$\beta = \left(1 + \frac{m-1}{m} r\right)^{\alpha},\ m \geq 1, r \geq 1.$$

Так как $r \leq q$, то

$$||u||_{q,\Omega} \leq \beta ||u_x||^{\alpha}_{m,\Omega} ||u||^{1-\alpha}_{q,\Omega},$$

и, следовательно,

$$||u||_{q,\Omega} \leq \beta^{1/\alpha} ||u_x||_{m,\Omega}.$$

В качестве u возьмем $s^{(n-b+2)/2}$ и, выбирая $m = 2$, получим

$$\left(\int\limits_{\Omega} s^{(n-b+2)q/2} dx\right)^{1/q} \leq \beta^{1/\alpha} \left|\left| \frac{\partial s^{(n-b+2)/2}}{\partial x} \right|\right|_{2,\Omega}.$$

Выберем $q = \frac{4}{n-b+2}$. Тогда

$$\left(\int\limits_{\Omega} s^2 dx\right)^{(n-b+2)/4} \leq \frac{n-b+2}{2} \beta^{1/\alpha} \left(\int\limits_{\Omega} s^{n-b} (\frac{\partial s}{\partial x})^2 dx\right)^{1/2},$$

и неравенство (3.31) представимо в виде

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} s^2 dx + C_3 \left(\int\limits_{\Omega} s^2 dx\right)^{\frac{n-b+2}{2}} \leq C_2 \left(\int\limits_{\Omega} s^2 dx\right)^{(n-b+2)/2},$$

где

$$C_3 = \frac{4\nu_1}{(n-b+2)^2 \beta^{2/\alpha}}$$

.

Таким образом имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} s^2 dx + C_4 \left(\int\limits_{\Omega} s^2 dx\right)^{\frac{n-b+2}{2}} \leq 0,$$

где $C_4 = C_3 - C_2 > 0$ в силу (3.29) и свойств β_ϕ.

Далее, полагая $y(t) = \int\limits_{\Omega} s^2 dx$, имеем

$$y' + C_4 y^{\frac{n-b+2}{2}} \leq 0.$$

Интегрирование последнего от 0 до t приводит к неравенству

$$\frac{2}{b-n}(y^{\frac{b-n}{2}}(t) - y^{\frac{b-n}{2}}(0)) + C_4 t \leq 0.$$

из которого выводим

$$0 \leq y \leq \left(-\frac{b-n}{2} C_4 t + y^{(b-n)/2}(0)\right)^{2/(b-n)}.$$

Следовательно, при

$$t > t_0 = \frac{2}{(b-n)C_4} y^{(b-n)/2}(0)$$

имеем $y(t) = ||s||^2_{2,\Omega} \equiv 0$.

Теорема доказана.

Глава 4

Примеры глобальной разрешимости задач фильтрации несжимаемой жидкости в вязкоупругой среде

В данной главе исследуется система уравнений фильтрации вязкой жидкости в вязкоупругой деформируемой пористой среде. Доказана глобальная по времени теорема существования и единственности автомодельного решения задачи. Для задачи фильтрации в тонком пороупругом слое построены решения в квадратурах.

1 Глобальная разрешимость автомодельной задачи

В данном разделе докажем существование и единственность автомодельного решения краевой задачи для уравнений (1.5)–(1.9) в случае для полного реологического соотношения (1.7).

Условие $\rho_s, \rho_f = const$ в системе (1.5)–(1.9) приводит к замкнутой системе уравнений для $\phi, \vec{v}_s, \vec{v}_f, p_s, p_f$:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + div((1-\phi)\rho_s\vec{v_s}) = 0,$$
$$\frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + div(\rho_f\phi\vec{v_f}) = 0,$$
$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{k\phi^n}{\mu}(\nabla p_f + \rho_f\vec{g}),$$
$$\nabla\cdot\vec{v}_s = -\frac{\phi^m}{\eta}p_e - \phi^b\beta_\phi\frac{dp_e}{dt},$$
$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot}\vec{g},$$
$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s,$$
$$p_e = (1-\phi)(p_s - p_f),\ \rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s.$$

В одномерном случае система выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\phi v_f) = 0,$$
$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(v_s(1-\phi)) = 0,$$
$$\phi(v_f - v_s) = -\frac{k}{\mu}\phi^n\left(\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g\right),$$
$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\frac{\phi^m}{\eta}p_e - \phi^b\beta_\phi\left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + v_s\frac{\partial p_e}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot}g.$$

Перейдем в этой системе уравнений к безразмерным переменным

$$t' = \frac{t}{t_1},\ x' = \frac{x}{x_1},\ v_f' = \frac{v_f}{v_1},\ v_s' = \frac{v_s}{v_1},\ g' = \frac{g}{g_1},$$

$$p_f' = \frac{p_f}{p_1},\ \rho_f' = \frac{\rho_f}{\rho},\ \rho_s' = \frac{\rho_s}{\rho},\ p_{tot}' = \frac{p_{tot}}{p_1} = \frac{\phi p_f + (1-\phi)p_s}{p_1}.$$

Система уравнений принимает следующую форму (штрихи опускаются)

$$\frac{1}{t_1}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v_1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x}(v_f\phi) = 0,$$

$$\frac{1}{t_1}\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{v_1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x}(v_s(1-\phi)) = 0,$$

$$\phi v_1(v_f - v_s) = -\frac{k}{\mu}\phi^n\left(\frac{p_1}{x_1}\frac{\partial p_f}{\partial x} - g_1\rho\rho_f g\right),$$

$$\frac{v_1}{x_1}\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\frac{\phi^m}{\eta}p_1(p_{tot} - p_f) -$$
$$-\phi^b\beta_\phi\left(\frac{p_1}{t_1}\frac{\partial(p_{tot}-p_f)}{\partial t} + \frac{v_1 p_1}{x_1}v_s\frac{\partial(p_{tot}-p_f)}{\partial x}\right),$$

$$\frac{p_1}{x_1}\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -g_1\rho(\phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s)g.$$

Положим $\frac{x_1}{v_1} = t_1$, $g_1\rho = \frac{p_1}{x_1}$, $\beta_\phi = \frac{t_1}{\eta}$. Тогда система примет следующий вид:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_f\phi) = 0, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_s(1-\phi)) = 0, \tag{4.2}$$

$$\phi(v_f - v_s) = -\phi^n\alpha\left(\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_f g\right), \tag{4.3}$$

$$\lambda\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\phi^m(p_{tot}-p_f)- \\ -\phi^b\left(\frac{\partial(p_{tot}-p_f)}{\partial t}+v_s\frac{\partial(p_{tot}-p_f)}{\partial x}\right), \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -(\phi\rho_f+(1-\phi)\rho_s)g. \tag{4.5}$$

Здесь

$$\alpha=\frac{kg_1\rho}{\mu v_1},\ \lambda=\frac{1}{p_1\beta_\phi}.$$

Для системы (4.1)–(4.5) рассматривается автомодельное решение типа "бегущей волны". Полагая, что все искомые функции зависят лишь от переменной $\xi = x - ct$ (c – постоянный параметр), приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{d\xi}((-c+v_f)\phi)=0, \tag{4.6}$$

$$\frac{d}{d\xi}((1-\phi)(v_s-c))=0, \tag{4.7}$$

$$\phi(v_f-v_s)=-\alpha\phi^n\left(\frac{dp_f}{d\xi}-\rho_f g\right), \tag{4.8}$$

$$\lambda\frac{dv_s}{d\xi}=-\phi^m(p_{tot}-p_f)-\phi^b(v_s-c)\frac{d(p_{tot}-p_f)}{d\xi}, \tag{4.9}$$

$$\frac{dp_{tot}}{d\xi}=-(\phi\rho_f+(1-\phi)\rho_s)g. \tag{4.10}$$

Система рассматривается при $\xi > 0$ и дополняется граничными условиями:

$$v_s(0)=v_s^0,\ v_f(0)=v_f^0,\ \phi(0)=\phi^0,\ \lim_{\xi\to\infty} v_s(\xi)=u^+; \\ \lim_{\xi\to\infty} v_f(\xi)=u^+,\ \lim_{\xi\to\infty} \phi(\xi)=\phi^+; \tag{4.11}$$

где $v_s^0,\ v_f^0,\ \phi^0,\ \phi^+$ - заданные постоянные, удовлетворяющие условиям $\phi^0 \neq \phi^+,\ v_s^0 \neq\ v_f^0$.

Определение 3.1.1. *Классическим автомодельным решением задачи* (4.6)–(4.11) *называется совокупность функции* $(\phi(\xi), v_i(\xi), p_i(\xi)), i = s, f$, *если они обладают непрерывными производными, входящими в уравнения* (4.6)–(4.10), *удовлетворяют этим уравнениям и граничным условиям* (4.11) *как непрерывные в* $\bar{Q}_T$ *функции.*

Сформулируем основной результат настоящего параграфа.

Теорема 3.1.1. *Пусть выполнены следующие условия:* $g = 0,\ \phi^0 > \phi^+,\ (\phi^0, \phi^+) \in (0, 1)$, *Тогда существует единственное классическое автомодельное решение* $(\phi(\xi), v_i(\xi), p_i(\xi)), i = s, f$ *задачи* (4.6)–(4.11).

В дальнейшем предполагаются выполненными следующие условия на данные задачи:

$$\phi^+ \neq \phi^0 \qquad (\phi^+, \phi^0) \in (0, 1).$$

Доказательство существования решения проводится на основе теоремы Шаудера [5] и использует стандартные вспомогательные построения.

Из (4.6)–(4.7) получаем $\phi(v_f - c) = A_1, (1-\phi)(v_s - c) = A_2, \quad A_1, A_2 = const$, и, следовательно, $v_f = c + \frac{A_1}{\phi}, v_s = c + \frac{A_2}{1-\phi}$. Тем самым приходим к следующей системе уравнений для неизвестных постоянных A_1, A_2, u^+, c:

$$v_f^0 = c + \frac{A_1}{\phi^0}, \quad v_s^0 = c + \frac{A_2}{1-\phi^0},$$

$$u^+ = c + \frac{A_1}{\phi^+}, \quad u^+ = c + \frac{A_2}{1-\phi^+}.$$

Решение последней дается формулами

$$c = \frac{\phi^+(1-\phi^0)v_s^0 - \phi^0(1-\phi^+)v_f^0}{\phi^+ - \phi^0}, \quad u^+ = v_f^0\phi^0 + (1-\phi^0)v_s^0,$$

$$A_2 = \frac{(1-\phi^+)\phi^0(1-\phi^0)(v_f^0 - v_s^0)}{\phi^+ - \phi^0}, \quad A_1 = \frac{\phi^+}{1-\phi^+}A_2.$$

Далее из уравнения (4.8) выразим $\frac{dp_f}{d\xi}$ с учетом найденных представлений для скоростей обеих фаз:

$$\frac{dp_f}{d\xi} = \rho_f g - \frac{1}{\alpha}\phi^{1-n}\left(\frac{A_1}{\phi} - \frac{A_2}{1-\phi}\right).$$

Подставляя представление для v_s в уравнение (4.9), доможая полученное уравнение на ϕ^{-m} и дифференцируя по ξ, получим

$$A_2\lambda\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\phi^m}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{1-\phi}\right)\right) = -\frac{d}{d\xi}(p_{tot} - p_f) -$$

$$-\frac{d}{d\xi}\left(\phi^{b-m}\left(\frac{A_2}{1-\phi}\right)\frac{d}{d\xi}(p_{tot} - p_f)\right).$$

Подставим в последнее уравнение представления для производных p_f и p_{tot}:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\phi^{-m}\frac{d}{d\xi}(1-\phi)^{-1}\right) +$$

$$+\frac{1}{\lambda\alpha}\frac{d}{d\xi}\left(\phi^{b-m-n}(1-\phi)^{-1}\left(A_1 - A_2\frac{\phi}{1-\phi}\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{\alpha\lambda A_2}\phi^{-n}\left(A_1 - A_2\frac{\phi}{1-\phi}\right) = 0.$$

Положим $s = \frac{\phi}{1-\phi}$, тогда $\phi = \frac{s}{1+s}$, $1-\phi = \frac{1}{1+s}$, и уравнение для s примет вид

$$\frac{d}{d\xi}\left(s^{-m}(1+s)^m\frac{ds}{d\xi}\right) + \frac{1}{\alpha\lambda}\frac{d}{d\xi}\cdot$$

$$\cdot\left(s^{b-m-n}(1+s)^{n+m-b+1}(A_1 - A_2 s)\right) -$$

$$-\frac{1}{\alpha\lambda}s^{-n}(1+s)^n\left(s-\frac{A_1}{A_2}\right)=0.$$

Уравнение для функции s дополняется соответствующими условиями для ϕ:

$$s(0)=\frac{\phi^0}{1-\phi^0},\ \lim_{\xi\to\infty}s(\xi)=\frac{\phi^+}{1-\phi^+}=s^+.$$

Полагая

$$u(s(\xi))=\int_{s^+}^{s(\xi)}a(\tau)d\tau=\int_{s^+}^{s(\xi)}\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)^m d\tau,$$

приходим к задаче

$$u''+b(u)u'-d(u)u=0,$$

$$u(0)=\int\limits_{s^+}^{s^0}a(\tau)d\tau\equiv u_0,\quad u(\infty)=0, \tag{4.12}$$

где

$$b(u)=\frac{1}{\alpha\lambda}\left(\frac{s(u)}{1+s(u)}\right)^m\left(l\left(\frac{s(u)}{1+s(u)}\right)^{l-1}(A_1-A_2s(u))+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{s(u)}{1+s(u)}\right)^l(1-l)(A_1-A_2s(u))-A_2(1+s(u))\left(\frac{s(u)}{1+s(u)}\right)^l\right),$$

$$d(u)=\frac{1}{\alpha\lambda u}s^{-n}(u)(1+s(u))^n\left(s(u)-\frac{A_1}{A_2}\right),\ l=b-m-n.$$

В дальнейшем считаем $s^+<s^0$ (случай $s^+>s^0$ рассматривается аналогично).

На отрезке $[0,n]$ рассмотрим вспомогательную задачу для $v(\xi)=\int\limits_{s^+}^{s(\xi)}a(\tau)d\tau$:

$$v''+b(v)v'-d(v)v=0,\quad v(0)=u_0,\quad v(n)=0. \tag{4.13}$$

Решения последней в силу принципа максимума [21] удовлетворяют неравенствам $u_0 \geq v(\xi) \geq 0$ для всех $\xi \in [0, n]$. Поэтому функции $b(v)$ и $d(v)$ являются строго положительными и ограниченными.

Производная решения задачи (4.13) в точке $\xi = n$ неположительна, поскольку предположение $v'(n) > 0$, ввиду граничного условия $v(n) = 0$, приводит к противоречию с неотрицательностью $v(\xi)$. Представив уравнение (4.13) в виде

$$\psi' = vd(v) \geq 0, \quad \psi = v' + \int\limits_0^v b(\tau)d\tau, \tag{4.14}$$

выводим, что монотонно возрастающая функция $\psi(\xi)$ является неположительной. Поэтому $v'(\xi) \leq 0$ для всех $\xi \in [0, n]$.

Из (4.14) следует $v' + \alpha^* v \leq 0$, где α^* – минимальное значение функции $b(v)$. Отсюда получаем

$$v(\xi) \leq v_0 \exp(-\alpha^* \xi). \tag{4.15}$$

Уравнение (4.13) представим в виде

$$\left(v' + \int\limits_0^v b(\tau)d\tau \right)' - vd(v) = 0$$

и проинтегрируем по ξ от 0 до текущего значения ξ:

$$v'(\xi) - v'(0) = \int\limits_{v(\xi)}^{v_o} b(\tau)d\tau + \int\limits_0^{\xi} \tau d(\tau)d\tau \equiv \varphi(\xi) \geq 0.$$

Имеем $|v'(0)| - \varphi(\xi) \leq -v'(\xi)$. Интегрируя последнее неравенство по ξ от 0 до n, получим

$$|v'(0)| \leq \frac{1}{n} \left(\int\limits_0^n \varphi(\tau)d\tau + v_0 \right) \equiv N < \infty.$$

Поскольку $\psi(0) \le \psi(\xi) \le \psi(n)$, то имеем

$$v'(0) + \int\limits_0^{v_o} b(\tau)d\tau \le v'(\xi) + \int\limits_0^{v(\xi)} b(\tau)d\tau.$$

Учитывая, что $\int\limits_0^{v_0} b(\tau)d\tau \ge \int\limits_0^{v(\xi)} b(\tau)d\tau$, получим:

$$|v'(\xi)| + \int\limits_{v_0}^{v(\xi)} b(\tau)d\tau \le |v'(0)|.$$

Отсюда следует, что для всех $\xi \in [0, n]$

$$|v'(\xi)| \le |v'(0)| \le N. \tag{4.16}$$

Пусть $y \equiv |v'(\xi)|$. Уравнение (4.13) представим в виде

$$y' + b(v)y + d(v)v = 0.$$

В частности имеем неравенство $y' + \alpha^* y \le 0$. Отсюда следует, что

$$|v'(\xi)| \le N \exp(-\alpha^* \xi). \tag{4.17}$$

Представим решение задачи (4.13) в виде

$$v(\xi) = v_0 - \int\limits_0^{\xi} (|v'(0)| - \varphi(\tau))d\tau \equiv T(v), \tag{4.18}$$

где значение $v'(0)$ определяется из соотношения

$$\int\limits_0^{n} (|v'(0)| + \varphi(\xi))d\xi = v_0.$$

В пространстве непрерывных функций $C[0,n]$ рассмотрим замкнутое, ограниченное, выпуклое множество $M = \{v(\xi)| \quad 0 \le v(\xi) \le u_0, \quad \xi \in [0,n]\}$. Оператор T определен на множестве M, и в силу принципа максимума имеет место вложение $T(M) \subset M$.

Проверим непрерывность оператора Т. Возьмем произвольную непрерывную функцию $\widetilde{v}(\xi)$, такую, что $\widetilde{v}(0) = v_0$, $\widetilde{v}(n) = 0$. Подставляя $\widetilde{v}(\xi)$ вместо $v(\xi)$ в (4.18), получим $T(\widetilde{v})$.

Пусть последовательность непрерывных функций $\widetilde{v_i}(\xi)$, таких, что $\widetilde{v_i}(0) = v_0$, $\widetilde{v_i}(n) = 0$, равномерно сходится к $\widetilde{v}(\xi)$ в пространстве $C[0,n]$:

$$|\widetilde{v_i}(\xi) - \widetilde{v}(\xi)| \longrightarrow 0, \quad i \to \infty \qquad \forall \xi \in [0,n].$$

Рассмотрим последовательность функций $v_i(\xi) = T(\widetilde{v_i})$. Положим

$$f(\xi, v) = \int\limits_0^{\xi} d(v(\tau))v(\tau)d\tau, \quad h(\xi, v) = \int\limits_{v_0}^{v(\xi)} b(v(\tau))d\tau.$$

Тогда

$$|\widetilde{v_i}(\xi) - \widetilde{v}(\xi)| \le \int\limits_0^{\xi} |f(\sigma, \widetilde{v}) - f(\sigma, \widetilde{v_i})| d\sigma +$$

$$+ \int\limits_0^{\xi} |h(\sigma, \widetilde{v_i}) - h(\sigma, \widetilde{v})| d\sigma,$$

$$|f(\sigma, \widetilde{v}) - f(\sigma, \widetilde{v_i})| = \left| \int\limits_0^{\xi} [d(\widetilde{v}(\tau))\widetilde{v}(\tau) - d(\widetilde{v_i}(\tau))\widetilde{v_i}(\tau)] d\tau \right| \le$$

$$\le \int\limits_0^{\xi} [|\widetilde{v}(\tau)||d(\widetilde{v}(\tau)) - d(\widetilde{v_i}(\tau))| + |d(\widetilde{v_i}(\tau))||\widetilde{v}(\tau) - \widetilde{v_i}(\tau)|] d\tau,$$

$$|h(\sigma,\widetilde{v}_i) - h(\sigma,\widetilde{v})| = \left| \int\limits_{v_0}^{\widetilde{v}_i(\xi)} b(\widetilde{v}_i(\tau))d\tau - \int\limits_{v_0}^{\widetilde{v}(\xi)} b(\widetilde{v}(\tau))d\tau \right| =$$

$$= \left| - \int\limits_{\widetilde{v}_i(\xi)}^{v_0} [b(\widetilde{v}(\tau)) - b(\widetilde{v}_i(\tau))]d\tau - \int\limits_{\widetilde{v}_i(\xi)}^{\widetilde{v}(\xi)} b(\widetilde{v}(\tau))d\tau \right|.$$

Поскольку $d(v)$, $b(v)$ – непрерывные функции, а последовательность $\widetilde{v}_i(\xi)$ равномерно сходится к $\widetilde{v}(\xi)$, то получаем, что

$$|f(\sigma,\widetilde{v}) - f(\sigma,\widetilde{v}_i)| \longrightarrow 0, \quad i \to \infty,$$

$$|h(\sigma,\widetilde{v}_i) - h(\sigma,\widetilde{v})| \longrightarrow 0, \quad i \to \infty \quad \forall \sigma \in [0,\xi].$$

Поэтому

$$|\widetilde{v}_i(\xi) - \widetilde{v}(\xi)| \longrightarrow 0, \quad i \to \infty \quad \forall \xi \in [0,n].$$

Следовательно, оператор T непрерывен. Из оценок (4.15)–(4.17) вытекает, что T является вполне непрерывным. По теореме Шаудера на множестве M задача (4.13) имеет по крайней мере одно решение. Это решение единственно, если $(vd(v))'_v > 0$. Действительно, пусть $f(\xi)$ – достаточно гладкая функция, определенная на интервале $[0,n]$ и равная нулю при $\xi = 0$ и $\xi = n$. Умножим обе части уравнения (4.13) на $f(\xi)$ и проинтегрируем полученное равенство по ξ от нуля до n, проводя однократное интегрирование по частям. В результате приходим к следующему интегральному равенству:

$$\int\limits_0^n \left(v'(\xi)f' + f' \int\limits_0^v b(z)dz + fvd(v) \right) d\xi = 0. \qquad (4.19)$$

Пусть v_1 и v_2 – два различных решения задачи (4.13). Положим $U = v_1 - v_2$, $U(0) = U(n) = 0$. Из (4.19) после интегрирования по частям выводим

$$\int_0^n U[(f')' - B_1(\xi)f' - B_2(\xi)f]d\xi = 0,$$

где

$$B_1(\xi) = U^{-1}\int_{v_1}^{v_2} b(z)dz,\ B_2(\xi) = U^{-1}(v_1 d(v_1) - v_2 d(v_2)) > 0.$$

Определим $f(\xi)$ как решение следующей линейной задачи:

$$(f')' - B_1(\xi)f' - B_2(\xi)f = h(\xi),\ f(0) = f(n) = 0,$$

где $h(\xi)$ – произвольная непрерывная функция. Согласно [46] данная задача разрешима при любой непрерывной правой части. Поэтому $U = 0$.

Решение задачи (4.12) на бесконечном интервале получим как предел последовательности $\{v_n(\xi)\}$ решений задачи (4.13) при $n \to \infty$, используя независящие от n оценки (4.15)–(4.17). В силу единственности решений задач (4.13) ограниченная последовательность $\{v_n(\xi)\}$ монотонно возрастает и, следовательно, сходится к некоторой функции $u(\xi)$. Осуществляя предельные переходы в равенствах (4.18), записанных для $\{u_n(\xi)\}$, получим аналогичное равенство для предельной функции. Последнее означает, что $u(\xi)$ является классическим решением задачи (4.12). Асимптотическое поведение решения определяется неравенствами (4.15), (4.17).

Сформулируем достаточные условия единственности решения задачи (4.12) в терминах краевых данных задачи для функции s. Условие $(vd(v))'_v > 0$ эквивалентно следующему:

$$(vd(v))'_v = \frac{1}{\alpha\lambda} s^{m-n}(1+s)^{n-1-m}.$$

$$\cdot(n(s-s^+)+(1+s)((1-n)+ns^{-1}s^+))>0.$$

Это неравенство справедливо при

$$s^2+s(1-n)+ns^+>0. \qquad (4.20)$$

Чтобы неравенство (4.20) было выполнено, достаточно потребовать выполнения условий на граничные данные. Если $0<n\le 1$, то решение единственно для любого $s^+\le s\le s^0$. Если $n>1$, то с учетом того, что $s^+\le s\le s^0$, имеем

$$s^2+s(1-n)+ns^+\ge (s^+)^2-s^0(n-1)+ns^+>0,$$

при

$$s^0<\frac{(s^+)^2+ns^+}{n-1}.$$

Таким образом, теорема доказана.

2 Фильтрация вязкой жидкости в тонком вязкоупругом слое

В области $\Omega=(x,z)=[0,L]\times[0,H]$ рассматривается следующая система уравнений составного типа

$$\begin{gathered}\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}+div((1-\phi)\vec{v_s})=0,\\ \frac{\partial\phi}{\partial t}+div(\phi\vec{v_f})=0,\end{gathered} \qquad (4.21)$$

$$\phi(\vec{v}_f-\vec{v}_s)=-K(\phi)(\nabla p_f+\rho_f\vec{g}), \qquad (4.22)$$

$$div\vec{v}_s=-a_1(\phi)p_e-a_2(\phi)\frac{dp_e}{dt}, \qquad (4.23)$$

$$\rho\vec{g}+div\left((1-\phi)\eta\left(\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial\vec{x}}+\left(\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial\vec{x}}\right)^*\right)\right)-\nabla p_{tot}=0, \qquad (4.24)$$

$$\begin{gathered}p_{tot}=\phi p_f+(1-\phi)p_s,\\ p_e=(1-\phi)(p_s-p_f),\rho_{tot}=\phi\rho_f+(1-\phi)\rho_s.\end{gathered} \qquad (4.25)$$

2.1 Введение малого параметра

Проведем обезразмеривание уравнений (4.21)–(4.25). Пусть $\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}$ – безразмерные переменные, определенные равенствами

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{H}, \quad \bar{t} = \varepsilon^k \tau_0 t, \quad \varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1,$$

где $[L] = [H] = $ [м], $[\tau_0] = $ [1/с]; k – фиксированный параметр [62].

Положим:

$$p_f(t, x, z) = \alpha \bar{p}_f(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}) = \alpha \bar{p}_f \left(\varepsilon^k \tau_0 t, \frac{x}{L}, \frac{z}{H} \right),$$

$$p_s(t, x, z) = \alpha \bar{p}_s(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}) = \alpha \bar{p}_s \left(\varepsilon^k \tau_0 t, \frac{x}{L}, \frac{z}{H} \right),$$

$$v_s^i(t, x, z) = \beta^i \bar{v}_s^i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}) = \beta^i \bar{v}_s^i \left(\varepsilon^k \tau_0 t, \frac{x}{L}, \frac{z}{H} \right), \ i = 1, 2,$$

$$v_f^i(t, x, z) = \beta^i \bar{v}_f^i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}) = \beta^i \bar{v}_f^i \left(\varepsilon^k \tau_0 t, \frac{x}{L}, \frac{z}{H} \right), \ i = 1, 2,$$

$$p_{tot}(t, x, z) = \alpha \bar{p}_{tot}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}),$$

$$\rho_f g = \frac{\alpha}{H} \bar{\rho}_f \bar{g}, \quad \rho_s g = \frac{\alpha}{H} \bar{\rho}_s \bar{g}, \quad \rho g = \frac{\alpha}{H} \bar{\rho} \bar{g},$$

$$K(\phi) = k_0 \bar{K}(\phi), \quad a_1(\phi) = a^1 \bar{a}_1(\phi), \quad a_2(\phi) = a^2 \bar{a}_2(\phi).$$

Здесь $[\beta^i] =$[м/с], $[\alpha] =$[Па], $[k_0] = [\frac{м^2}{Па \cdot c}]$, $[a^1] = [\frac{1}{Па \cdot c}]$, $[a^2] = [1/Па]$.

Система (4.21)–(4.25) в скалярной форме преобразуется к виду

$$\varepsilon^k \tau_0 \frac{\partial (1 - \phi)}{\partial \bar{t}} + \frac{\beta^1}{L} \frac{\partial \bar{v}_s^1 (1 - \phi)}{\partial \bar{x}} + \frac{\beta^2}{H} \frac{\partial \bar{v}_s^2 (1 - \phi)}{\partial \bar{z}} = 0,$$

$$\varepsilon^k \tau_0 \frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}} + \frac{\beta^1}{L} \frac{\partial \bar{v}_f^1 \phi}{\partial \bar{x}} + \frac{\beta^2}{H} \frac{\partial \bar{v}_f^2 \phi}{\partial \bar{z}} = 0, \tag{4.26}$$

$$\phi(\beta^1\bar{v}_f^1-\beta^1\bar{v}_s^1)=-k_0\bar{K}(\phi)\frac{\alpha}{L}\frac{\partial\bar{p}_f}{\partial\bar{x}},$$
$$\phi(\beta^2\bar{v}_f^2-\beta^2\bar{v}_s^2)=-k_0\bar{K}(\phi)\left(\frac{\alpha}{H}\frac{\partial\bar{p}_f}{\partial\bar{z}}-\frac{\alpha}{H}\bar{\rho}_f\bar{g}\right), \tag{4.27}$$

$$\frac{1}{1-\phi}\left(\varepsilon^k\tau_0\frac{\partial\phi}{\partial\bar{t}}+\beta^1\bar{v}_s^1\frac{1}{L}\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}}+\beta^2\bar{v}_s^2\frac{1}{H}\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}}\right)=$$
$$=-a^1\bar{a}_1(\phi)\alpha(\bar{p}_{tot}-\bar{p}_f)-a^2\bar{a}_2(\phi)\Bigg(\varepsilon^k\tau_o\alpha\frac{\partial(\bar{p}_{tot}-\bar{p}_f)}{\partial\bar{t}}+$$
$$+\beta^1\bar{v}_s^1\frac{\alpha}{L}\frac{\partial(\bar{p}_{tot}-\bar{p}_f)}{\partial\bar{x}}+\beta^2\bar{v}_s^2\frac{\alpha}{H}\frac{\partial(\bar{p}_{tot}-\bar{p}_f)}{\partial\bar{z}}\Bigg), \tag{4.28}$$

$$2\frac{\beta^1}{L^2}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^1}{\partial\bar{x}}\right)+\frac{\beta^1}{H^2}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^1}{\partial\bar{z}}\right)+$$
$$+\frac{\beta^2}{HL}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^2}{\partial\bar{x}}\right)=\frac{\alpha}{L\eta}\frac{\partial p_{tot}}{\partial\bar{x}}, \tag{4.29}$$

$$-\frac{\alpha}{H\eta}\bar{\rho}\bar{g}+\frac{\beta^2}{L^2}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^2}{\partial\bar{x}}\right)+2\frac{\beta^2}{H^2}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^2}{\partial\bar{z}}\right)+$$
$$+\frac{\beta^1}{HL}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^1}{\partial\bar{z}}\right)=\frac{\alpha}{H\eta}\frac{\partial\bar{p}_{tot}}{\partial\bar{z}}. \tag{4.30}$$

Положим

$$\beta^1=\varepsilon^k\tau_0L,\quad \beta^2=\varepsilon^k\tau_0H.$$

Тогда системе (4.26)–(2.1) можно придать вид

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial\bar{t}}+div((1-\phi)\bar{v}_s)=0,$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{t}}+div(\phi\bar{v}_f)=0, \tag{4.31}$$

$$\frac{\varepsilon^k\tau_0 L^2}{k_0\alpha}\phi(\bar{v}_f^1-\bar{v}_s^1)=-\bar{K}(\phi)\frac{\partial\bar{p}_f}{\partial\bar{x}},$$
$$\frac{\varepsilon^{k+2}\tau_0 L^2}{k_0\alpha}\phi(\bar{v}_f^2-\bar{v}_s^2)=-\bar{K}(\phi)\left(\frac{\partial\bar{p}_f}{\partial\bar{z}}-\bar{\rho}_f\bar{g}\right), \tag{4.32}$$

$$\frac{\varepsilon^k\tau_0}{a^1\alpha(1-\phi)}\frac{d\phi}{d\bar{t}}=-\bar{a}_1(\phi)(\bar{p}_{tot}-\bar{p}_f)-\frac{\varepsilon^k\tau_0 a^2}{a^1}\bar{a}_2(\phi)\frac{d(\bar{p}_{tot}-\bar{p}_f)}{d\bar{t}}, \tag{4.33}$$

$$2\varepsilon^k\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^1}{\partial\bar{x}}\right)+\varepsilon^{k-2}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^1}{\partial\bar{z}}\right)+$$
$$+\varepsilon^k\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^2}{\partial\bar{x}}\right)=\frac{\alpha}{\eta\tau_0}\frac{\partial p_{tot}}{\partial\bar{x}}, \tag{4.34}$$

$$\frac{\tau_0\eta}{\alpha}(\varepsilon^{k+2}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^2}{\partial\bar{x}}\right)+2\varepsilon^k\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^2}{\partial\bar{z}}\right)+$$
$$+\varepsilon^k\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^1}{\partial\bar{z}}\right)=\bar{\rho}\bar{g}+\frac{\partial\bar{p}_{tot}}{\partial\bar{z}}. \tag{4.35}$$

2.2 Предельный переход

В системе (4.31) – (4.35) коэффициенты $\frac{\tau_0 L^2}{k_0\alpha}$, $\frac{\eta\tau_0}{\alpha}$, $\frac{\tau_0}{a^1\alpha}$, $\frac{\tau_0 a^2}{a^1}$ безразмерные. Параметры η, τ_0, L, K фиксированы. После предельного перехода по $\varepsilon\to 0$ в этой системе в зависимости от параметра k получим различные варианты

1. $k=0$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial\bar{t}}+div((1-\phi)\bar{v}_s)=0,$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{t}}+div(\phi\bar{v}_f)=0,$$

$$\frac{\tau_0 L^2}{k_0\alpha}\phi(\bar{v}_f^1-\bar{v}_s^1)=-\bar{K}(\phi)\frac{\partial\bar{p}_f}{\partial\bar{x}},$$

$$\frac{\partial\bar{p}_f}{\partial\bar{z}}=\bar{\rho}_f\bar{g},$$

$$\frac{\tau_0}{a^1\alpha(1-\phi)}\frac{d\phi}{d\bar{t}}=-\bar{a}_1(\phi)(\bar{p}_{tot}-\bar{p}_f)-\frac{a^2\tau_0}{a^1}\bar{a}_2(\phi)\frac{d(\bar{p}_{tot}-\bar{p}_f)}{dt},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^1}{\partial\bar{z}}\right)=0,$$

$$2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^2}{\partial\bar{z}}\right)+\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^1}{\partial\bar{z}}\right)=$$

$$=\frac{\alpha}{\tau_0\eta}\left(\bar{\rho}\bar{g}+\frac{\partial\bar{p}_{tot}}{\partial\bar{z}}\right).$$

2. $k=2$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial\bar{t}}+div((1-\phi)\bar{v}_s)=0,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{t}}+div(\phi\bar{v}_f)=0,$$

$$\frac{\partial\bar{p}_f}{\partial\bar{x}}=0,\quad \frac{\partial\bar{p}_f}{\partial\bar{z}}=\bar{\rho}_f\bar{g},$$

$$\bar{p}_{tot}=\bar{p}_f,$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar{v}_s^1}{\partial\bar{z}}\right)=\frac{\alpha}{\eta\tau_0}\frac{\partial\bar{p}_{tot}}{\partial\bar{x}},$$

$$\bar{\rho}\bar{g}=-\frac{\partial\bar{p}_{tot}}{\partial\bar{z}}.$$

3. $0<k<2$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial\bar{t}}+div((1-\phi)\bar{v}_s)=0,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{t}}+div(\phi\bar{v}_f)=0,$$

$$\frac{\partial \bar{p}_f}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}_f}{\partial \bar{z}} = \bar{\rho}_f \bar{g}, \quad \bar{p}_{tot} = \bar{p}_f$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial \bar{v}_s^1}{\partial \bar{z}}\right) = 0,$$

$$\bar{\rho}\bar{g} = -\frac{\partial \bar{p}_{tot}}{\partial \bar{z}}.$$

4. $k > 2$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial \bar{t}} + div((1-\phi)\bar{v}_s) = 0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}} + div(\phi \bar{v}_f) = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{p}_f}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}_f}{\partial \bar{z}} = \bar{\rho}_f \bar{g}, \quad \bar{p}_{tot} = \bar{p}_f,$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial \bar{x}} = 0,$$

$$\bar{\rho}\bar{g} = -\frac{\partial \bar{p}_{tot}}{\partial \bar{z}}.$$

5. $-2 < k < 0$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial \bar{t}} + div((1-\phi)\bar{v}_s) = 0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}} + div(\phi \bar{v}_f) = 0,$$

$$v_s^1 = v_f^1,$$

$$\frac{\partial \bar{p}_f}{\partial \bar{z}} = \bar{\rho}_z \bar{g},$$

$$\frac{1}{a^2\alpha(1-\phi)}\frac{d\phi}{d\bar{t}} = -\bar{a}_2(\phi)\frac{d(\bar{p}_{tot} - \bar{p}_f)}{d\bar{t}},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial \bar{v}_s^1}{\partial \bar{z}}\right) = 0,$$

$$2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial \bar{v}_s^2}{\partial \bar{z}}\right)+\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left((1-\phi)\frac{\partial \bar{v}_s^1}{\partial \bar{z}}\right)=0.$$

6. $k=-2$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial \bar{t}}+div((1-\phi)\bar{v}_s)=0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}}+div(\phi\bar{v}_f)=0, \tag{4.36}$$

$$\bar{v}_s^1=\bar{v}_f^1, \tag{4.37}$$

$$\frac{\tau_0 L^2}{k_0\alpha}\phi(\bar{v}_f^2-\bar{v}_s^2)=-\bar{K}(\phi)\left(\frac{\partial \bar{p}_f}{\partial \bar{z}}-\bar{\rho}_f\bar{g}\right), \tag{4.38}$$

$$\frac{1}{a^2\alpha(1-\phi)}\frac{d\phi}{d\bar{t}}=-\bar{a}_2(\phi)\frac{d(\bar{p}_{tot}-\bar{p}_f)}{d\bar{t}}, \tag{4.39}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial \bar{v}_s^1}{\partial \bar{z}}\right)=0, \tag{4.40}$$

$$2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial \bar{v}_s^2}{\partial \bar{z}}\right)+\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left((1-\phi)\frac{\partial \bar{v}_s^1}{\partial \bar{z}}\right)=0. \tag{4.41}$$

7. $k<-2$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial \bar{t}}+div((1-\phi)\bar{v}_s)=0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}}+div(\phi\bar{v}_f)=0,$$

$$\vec{v}_s=\vec{v}_f,$$

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{d\bar{t}}=-a^2\alpha\bar{a}_2(\phi)\frac{d(\bar{p}_{tot}-\bar{p}_f)}{d\bar{t}},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial \bar{v}_s^1}{\partial \bar{z}}\right)=0,$$

$$2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left((1-\phi)\frac{\partial \bar{v}_s^2}{\partial \bar{z}}\right)+\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left((1-\phi)\frac{\partial \bar{v}_s^1}{\partial \bar{z}}\right)=0.$$

2.3 Решение в квадратурах

Рассмотрим наиболее физичный случай 6, который описывает медленное течение жидкости в пороупругой среде (далее черточки опускаются).

Уравнение (4.39) представим в виде

$$\frac{dG(\phi)}{dt} = \frac{dp_{tot}}{dt},$$

где

$$\frac{dG(\phi)}{d\phi} = \frac{1}{a^2\alpha a_2(\phi)(1-\phi)}.$$

Откуда получим уравнение для нахождения p_s:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + v_s^1\frac{\partial U}{\partial x} + v_s^2\frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

где $U = G(\phi) + (1-\phi)(p_f - p_s)$.

Это уравнение решается методом характеристик. Последние определяются как решения задачи Коши

$$v_s^1 = \frac{dx}{dt},\ v_s^2 = \frac{dz}{dt},\ U\mid_{t=0} = G(\phi_0) + (1-\phi_0)(p_f^0 - p_s^0).$$

Для нахождения первых компонент скоростей дважды проинтегрируем уравнение (4.40) по z и с учетом (4.37), получим

$$v_s^1 = v_f^1 = A(x,t)\int\limits_0^z \frac{1}{1-\phi}d\tau + B(x,t), \tag{4.42}$$

где функции $A(x,t)$, $B(x,t)$ определим после задания краевых условий.

Уравнение (4.41) после дифференцирования по z с учетом (4.42) примет вид

$$2\frac{\partial}{\partial z}\left((1-\phi)\frac{\partial v_s^2}{\partial z}\right) + \frac{\partial A(x,t)}{\partial x} = 0.$$

Проинтегрируем последнее по z дважды, получим представление для v_s^2 через ϕ и функции времени и координаты x, которые могут быть найдены после задания краевых условий:

$$v_s^2 = -1/2\frac{\partial A(x,t)}{\partial x}\int\limits_0^z \frac{\tau}{1-\phi}d\tau + D(x,t)\int\limits_0^z \frac{1}{1-\phi}d\tau + C(x,t).$$

Складывая уравнения (4.36), получим

$$div(\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) + \vec{v}_s) = 0.$$

С учетом уравнений (4.37)–(4.38) имеем

$$div\vec{v}_s = \frac{k_0\alpha}{\tau_0 L^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(K(\phi)\left(\frac{\partial p_f}{\partial z} - \rho_f g\right)\right).$$

Подставляя в последнее уравнение представления для компонент скорости твердой среды, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A(x,t)\int\limits_0^z \frac{1}{1-\phi}d\tau\right) + \frac{\partial B(x,t)}{\partial x} - 1/2\frac{\partial A(x,t)}{\partial x}\frac{z}{1-\phi} +$$

$$+D(x,t)\frac{1}{1-\phi} = \frac{k_0\alpha}{\tau_0 L^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(K(\phi)\left(\frac{\partial p_f}{\partial z} - \rho_f g\right)\right).$$

Проинтегрируем это уравнение дважды по z, получим представление для p_f через ϕ и функции времени и координаты x, которые могут быть найдены после задания краевых условий

$$p_f = \rho_f g z + \frac{\tau_0 L^2}{k_0\alpha}\int\limits_0^z \frac{1}{K(\phi)}\left[\int\limits_0^\zeta \frac{\partial}{\partial x}\left(A(x,t)\int\limits_0^\xi \frac{1}{1-\phi}d\tau\right)d\xi + \right.$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial A(x,t)}{\partial x}\int\limits_0^\zeta \frac{\tau}{1-\phi}d\tau + \frac{\partial B(x,t)}{\partial x}\zeta + D(x,t)\int\limits_0^\zeta \frac{1}{1-\phi}d\tau +$$

$$+E(x,t)]\,d\zeta + F(x,t).$$

Возвращаемся в (4.38) и получаем представление для v_f^2 через ϕ

$$v_f^2 = -\frac{1}{\phi}\left[\int\limits_0^z \frac{\partial}{\partial x}\left(A(x,t)\int\limits_0^\xi \frac{1}{1-\phi}d\tau\right)d\xi -\right.$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial A(x,t)}{\partial x}\int\limits_0^z \frac{\tau}{1-\phi}d\tau + \frac{\partial B(x,t)}{\partial x}z +$$

$$\left.+D(x,t)\int\limits_0^z \frac{1}{1-\phi}d\tau + E(x,t)\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial A(x,t)}{\partial x}\int\limits_0^z \frac{\tau}{1-\phi}d\tau +$$

$$+D(x,t)\int\limits_0^z \frac{1}{1-\phi}d\tau + C(x,t).$$

Подставляя в (4.36) представления для компонент скорости твердой фазы, получим уравнение для $s = 1-\phi$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(sA(x,t)\int\limits_0^z s^{-1}d\tau + sB(x,t)\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\Bigg(-s\frac{1}{2}\frac{\partial A(x,t)}{\partial x}\int\limits_0^z \frac{\tau}{s}d\tau + sD(x,t)\int\limits_0^z s^{-1}d\tau +$$

$$+sC(x,t)) = 0.$$

Как частный случай рассмотрим задачу для уравнений (4.36)–(4.41), дополненных следующими начально-краевыми условиями:

$$\left.\frac{\partial v_s^2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad v_s^2\big|_{z=H} = C = const,$$

$$v_s^1\big|_{z=H} = B = const, \quad \left.\frac{\partial v_s^1}{\partial z}\right|_{z=0} = 0,$$

$$\phi\ |_{t=0} = \phi^0(x,t), \quad \left.\frac{\partial p_f}{\partial z}\right|_{z=H} = 0,$$

$$p_f\ |_{t=0} = p_f^0(x,z),\ p_s\ |_{t=0} = p_s^0(x,z),\ p_f\ |_{z=0} = p_0(x,t). \tag{4.43}$$

Тогда, пользуясь краевыми условиями, из представлений для $\vec{v}_s,\ \vec{v}_f,\ p_f$ находим неизвестные функции координаты x и времени t

$$A(x,t) = 0,\ B(x,t) = B = const,\ C(x,t) = C = const,$$

$$D(x,t) = 0,\ E(x,t) = -\frac{\rho_f g k_0 \alpha}{\tau_0 L^2} K(\phi(x,H,t)),\ F(x,t) = p_0.$$

откуда

$$v_s^1 = v_f^1 = B,\ v_s^2 = C.$$

а уравнение для s перепишется в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} + B\frac{\partial s}{\partial x} + C\frac{\partial s}{\partial z} = 0.$$

Его решение есть

$$\phi = \phi^0(x - Bt, z - Ct).$$

Тогда

$$v_f^2 = \frac{\rho_f g k_0 \alpha}{\tau_0 L^2}\frac{K(\phi^0(x-Bt, H-Ct))}{\phi^0(x-Bt, z-Ct)} + C,$$

$$p_f = p_0 + \rho_f g\Big(z - \int\limits_0^z \frac{K(\phi^0(x-Bt, H-Ct))}{K(\phi^0(x-Bt, \tau-Ct))}d\tau\Big),$$

Решение для p_s в выглядит следующим образом

$$p_s = p_f - p_f^0(x - Bt, z - Ct) + p_s^0(x - Bt, z - Ct).$$

Таким образом, решение задачи (4.36)–(4.43) получено в квадратурах.

3 О движении воды в деформируемом льду

Лед рассматривается как вязкоупругая деформируемая пористая среда, в порах которой движется сжимаемая вязкая жидкость (концентрацией воздуха и обменом импульса фаз пренебрегаем).

Для описания процесса используются уравнения сохранения массы для каждой фазы (w – вода, i – лед) с учетом фазовых переходов

$$\begin{aligned} \frac{\partial(1-\phi)\rho_i}{\partial t} + div((1-\phi)\rho_i\vec{v_i}) = I_{wi}, \\ \frac{\partial(\rho_w\phi)}{\partial t} + div(\rho_w\phi\vec{v_w}) = I_{iw}, \end{aligned} \tag{4.44}$$

закон Дарси для жидкой фазы, учитывающий движение льда

$$\phi(\vec{v}_w - \vec{v}_i) = -\frac{k(\phi)}{\mu}(\nabla p_w + \rho_w\vec{g}), \tag{4.45}$$

и соотношение типа Максвелла для эффективного давления p_e [57]

$$div\vec{v}_i = -\phi\left(\alpha p_e + \beta\frac{dp_e}{dt}\right), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_i\cdot\nabla). \tag{4.46}$$

Эффективное давление p_e и давления в жидкой p_w и твердой p_i фазах связаны соотношениями

$$p_{tot} = \phi p_w + (1-\phi)p_i, \quad p_e = (1-\phi)(p_i - p_w). \tag{4.47}$$

Уравнение баланса сил системы в целом имеет вид

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot}\vec{g} + div\left((1-\phi)\eta\left(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\vec{x}} + \left(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\vec{x}}\right)^*\right)\right),$$

$$\rho_{tot} = \phi\rho_w + (1-\phi)\rho_i.$$

Уравнение сохранения энергии берется в виде

$$(\rho_w c_w\phi + \rho_i c_i(1-\phi))\frac{\partial\theta}{\partial t}+$$

$$+(\rho_w c_w\phi\vec{v}_f + \rho_i c_i\phi\vec{v}_i)\nabla\theta = div\,(\lambda_c\nabla\theta) + \nu\frac{\partial\rho_i(1-\phi)}{\partial t}. \tag{4.48}$$

Здесь ρ_w, ρ_i, $\vec{v}_i$, $\vec{v}_w$ – соответственно истинные плотности и скорости фаз, ϕ – пористость, $k(\phi)$ – проницаемость, μ – динамическая вязкость жидкости, α, β – заданные параметры среды, p_{tot} – общее давление, ρ_{tot} – общая плотность, I_{wi} – интенсивность перехода массы из воды в лед в единице объема в единицу времени, θ – температура среды ($\theta_i = \theta_w = \theta$), $c_i = const > 0$, $c_w = const > 0$ – теплоемкость льда и воды при постоянном объеме соответственно; $\nu = const > 0$ – удельная теплота плавления льда; λ_{tot} – теплопроводность среды в целом ($\lambda_{tot} = a_{tot} + b_{tot}\rho_{tot}^2$, $\rho_{tot} = \phi\rho_w + (1-\phi)\rho_i$, $a_{tot} = const > 0$, $b_{tot} = const > 0$), $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести.

Система (4.44)–(4.48) в автомодельных переменных ($\xi = z - ct$), в предположении, что скорость льда равна нулю ($\vec{v}_i = 0$) и $\rho_i, \rho_w = const$, сводится к следующей системе уравнений:

$$c\frac{d}{d\xi}(\phi\rho_w + (1-\phi)\rho_i) = \frac{d}{d\xi}(\phi\rho_w v_w) \tag{4.49}$$

$$\phi v_w = -\frac{k(\phi)}{\mu}\left(\frac{dp_w}{d\xi} - \rho_w g\right), \tag{4.50}$$

$$\alpha p_e = c\frac{dp_e}{d\xi}, \tag{4.51}$$

$$\frac{dp_{tot}}{d\xi} = -\rho_{tot}g, \tag{4.52}$$

$$\begin{gathered} -c(\rho_w c_w \phi + \rho_i c_i(1-\phi))\frac{d\theta}{d\xi}+ \\ +\rho_w c_w \phi v_w \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\left(\lambda_c \frac{d\theta}{d\xi}\right) - c\nu\frac{d\rho_i(1-\phi)}{d\xi}. \end{gathered} \tag{4.53}$$

Уравнения дополняются следующими условиями

$$\begin{gathered} \phi(0) = \phi^0, \quad \phi|_{\xi\to-\infty} = 0, \\ v_w(0) = v^0 \le 0, \quad p_e|_{\xi=0} = p_e^0. \end{gathered} \tag{4.54}$$

Интегрируя (4.49), получим

$$c(\phi\rho_w + (1-\phi)\rho_i) - \phi\rho_w v_w = A = const. \tag{4.55}$$

Используя условия (4.54) из равенства (4.55) выводим представление для постоянных c и A: $c = \frac{v^0\rho_w}{\rho_w-\rho_i} \le 0$, $A = c\rho_i$. После этого, возвращаясь в (4.55), приходим к равенству $\phi(v_w - v^0) = 0$, из которого следует, что $v_w = v^0$ при $\phi \ne 0$. Если же $\phi = 0$, то будем считать $v_w = 0$.

Из уравнения (4.51) получаем представление для p_e:

$$p_e = p_e^0 \exp\left(\frac{\alpha}{c}\xi\right).$$

Уравнения (4.50) и (4.52), представление для p_e, а также предположение, что $k(\phi) = k_0\phi^n, k_0 = const > 0$ и равенство $p_w = p_{tot} - p_e$ дают алгебраическое уравнение для нахождения функции ϕ:

$$a\phi^n + b\phi^{n-1} - 1 = 0,$$

где

$$a = \frac{k_0 g}{\mu v^0}(\rho_w - \rho_i), \quad b = \frac{k_0}{\mu v^0}\left(p_e^0 \frac{\alpha}{c}\exp\left(\frac{\alpha}{c}\xi\right) + g(\rho_w + \rho_i)\right).$$

Положим $y = \phi a^{1/n}$, тогда уравнение перепишется в виде

$$y^n + Cy^{n-1} - 1 = 0, \quad C = ba^{(1-n)/n}.$$

Поскольку $C > 0$, то уравнение имеет действительные решения и, в случае наложения дополнительных ограничений на начальные данные задачи, выполняется физический принцип максимума для функции пористости $0 < \phi < 1$. После нахождения ϕ найдем p_w из уравнения (4.52), а затем θ из уравнения (4.53).

Нерешенные задачи

1. Наиболее интересной и трудной представляется проблема существования решений задачи движения вязкой сжимаемой жидкости в деформируемой вязкоупругой среде “в целом” для многомерного случая. В одномерном случае этот результат получен в работах [40], [75], [90].

2. Вопрос о стабилизации решений открыт для задач любой размерности.

3. Обоснование разностной схемы при нулевых граничных условиях в одномерном изотермическом случае дано в работе [69]. В переменных Эйлера и для других краевых условий вопрос открыт.

4. Вместо уравнения состояния $p_f = R\rho_f$ использовать более физическое для рассматриваемого класса задач условие вида $\frac{dp_f}{d\rho_f} = \frac{1}{\beta\rho_f}$.

5. Полученные результаты для вязкой пористой среды существенно используют то обстоятельство, что начальное условие ϕ^0 строго отделено от нуля и единицы. Это позволяет получить аналогичный результат и для ϕ. Важной является задача с $0 \leq \phi^0 \leq 1$. При исследовании вязко-упругой пористой среды можно рассмотреть следующее модельное уравнение:

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{dt} = -\phi(\alpha\frac{dp_e}{dt} + \beta p_e)$$

с постоянными α, β. Истинные плотности считать постоянными. Получить однозначную разрешимость и установить принцип максимума $0 \leq \phi \leq 1$. Будет ли полученное решение обладать свойством конечной скорости распространения возмущений?

6. Кроме того, большой интерес представляет задача неизотермического движения жидкости в деформируемой среде. К рассматриваемой системе уравнений нужно присоединить уравнения для температур каждой из фаз и замыкающие связи. Первый результат в этом направлении представлен в работах [32], [91].

7. Также большое прикладное значение имеет задача со свободными границами, учитывающая фазовые переходы. Данная модель позволяет, например, описать выход магмы на поверхность земли.

8. Большой интерес представляют проблема обоснования модели двухфазной фильтрации в пороупругой среде. Построить математическую теорию процесса, обобщающую результаты для модели Маскета-Леверетта [5]. На первом этапе рассмотреть задачу двухфазной фильтрации в тонком пороупругом слое [30], [91].

Библиографический список

1. Алексеев, Г.В. О разрешимости первой краевой задачи для уравнений одномерной фильтрации двухфазной жидкости / Г.В. Алексеев, Н.В. Хуснутдинова // Докл. АН СССР. – 1972. – Т.203. – N. 2. – С. 310 - 312.

2. Антонцев, С.Н. Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды / С.Н. Антонцев. – Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1986. – 108 с.

3. Антонцев, С.Н. Метастабильная локализация решений вырождающихся параболических уравнений общего вида / С.Н. Антонцев // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. – 1987. – Вып. 83. – С.138 –144.

4. Антонцев, С.Н. О характере возмущений, описываемых решениями многомерных вырождающихся параболических уравнений / С.Н. Антонцев // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. – 1979. – Вып. 40. – С. 3-13.

5. Антонцев, С.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов. – Новосибирск: Наука, 1983. – 316 с.

6. Антонцев, С.Н. Локализация решений уравнений вязкого газа с вязкостью, зависящей от плотности / С.Н. Антонцев, А.А. Папин // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. – 1988. – С. 24-40.

7. Ахмерова, И.Г. Математические модели механики неоднородных сред : учебное пособие : в 2 ч. – Ч. I. / И.Г. Ахмерова, А.А. Папин, М.А. Токарева. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2012. – 128 с.

8. Байкин, А.Н. Динамика трещины гидроразрыва пласта в неоднородной пороупругой среде: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05 / Байкин Алексей Николаевич. – Новосибирск, 2016. – 94 с.

9. Баренблатт, Г.И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик. – М.: Недра, 1984. – 208 с.

10. Блохин, А.М. Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума / А.М. Блохин, В.Н. Доровский. – Новосибирск, 1994. – 183 с.

11. Бочаров, О.Б. О фильтрации двух несмешивающихся жидкостей в сжимаемом пласте / О.Б. Бочаров // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. — 1981. — Вып. 50. – С. 15-36.

12. Бочаров, О.Б. Простейшие модели деформирования пороупругой среды, насыщенной флюидами /

О.Б. Бочаров, В.Я. Рудяк, А.В. Серяков // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 2014. — № 2. – С. 54–68.

13. Бэр, Я. Физико-математические основы фильтрации воды / Я. Бэр, Д. Заславски, С. Ирмей. – М.: Мир, 1971. – 452 с.

14. Ведерников, В.В. Уравнения механики пористых сред, насыщенных двухфазной жидкостью / В.В. Ведерников, В.Н. Николаевский // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1978. – Т.5.

15. Доманский, А. В. О некоторых краевых задачах фильтрации несмешивающихся жидкостей / А.В. Доманский // Математические модели фильтрации и их приложения: Сб. науч. тр. / СО РАН. Ин-т гидродинамики.— 1999. – С. 78-88.

16. Жермен, П. Курс механики сплошных сред / П. Жермен. – М.: Высшая школа, 1983. – 399 с.

17. Золотарев, П.П. Распространение звуковых волн в насыщенной газом пористой среде с жестким скелетом / П.П. Золотарев // Инженерный журнал. — 1964. — Т. IV. – С. 111-120.

18. Калашников, А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка / А.С. Калашников // Успехи математичсеких наук. – 1987. – Т. 42, вып. 2(254). – С. 135–176.

19. Коновалов, А. Н. О некоторых вопросах, возникающих при численном решении задач фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости / А. Н. Коновалов // Тр. МИАН СССР. — 1973. — Том 122. – С. 3–23.

20. Кружков, С. Н. Краевые задачи для систем уравнений типа двухфазной фильтрации; постановка задач, вопросы разрешимости, обоснование приближенных методов / С. Н. Кружков, С. М. Сукорянский // Матем. сб. — 1977. — Том 104(146), номер 1(9). – С. 69–88.

21. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. М. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

22. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. М. Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

23. Ларькин, Н.А. Нелинейные уравнения переменного типа / Н.А. Ларькин, В.А. Новиков, Н.Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1983. – 270 с.

24. Лионс, Ж.–Л. Некоторые решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

25. Нигматулин, Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1 / Р. И. Нигматулин. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 464 с.

26. Нигматулин, Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 2 / Р. И. Нигматулин. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 360 с.

27. Николаевский, В.Н. О распространении продольных волн в насыщенных жидкостью упругих пористых средах / В.Н. Николаевский // Инженерный журнал. — 1963. — Т. III, вып. 2.

28. Николаевский, В.Н. Механика насыщенных пористых сред / В. Н. Николаевский, К. С. Басниев, А. Т. Горбунов, Г.А. Зотов. – М.: Недра, 1970. – 336 с.

29. Папин, А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации / А. А. Папин. -— Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2009. – 220 с.

30. Папин, А.А. Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде / Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. // Известия Алтатйского государственного университета. – 2015. – Вып. 1/2(85). – С. 131-135.

31. Папин, А.А. Задача о движении сжимаемой жидкости в деформируемой горной породе / А.А. Папин, М.А. Токарева // Известия Алтайского государственного университета. – 2011. – Вып. 1/2 (72). – С. 36-43.

32. Папин, А. А. Динамика тающего деформируемого снежно-ледового покрова / А.А. Папин, М.А. Токарева // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2012. – No. 4 (12). – С. 107-113.

33. Папин, А. А. Локальная разрешимость в классе непрерывных функций задачи о движении жидкости в деформируемой пористой среде / А. А. Папин, М. А. Токарева // Известия Алтайского государственного университета. – 2017. – Вып. 4 (96). – С. 136–140.

34. Папин, А. А. Математические вопросы динамики ледового покрова / А. А. Папин, М. А. Токарева, К.А. Шишмарев // Вестник алтайской науки. – 2015. – Вып. 1 (23). – С. 161–171.

35. Папин, А.А. Модельная задача о движении сжимаемой жидкости в вязкоупругой горной породе / А. А.

Папин, М. А. Токарева // Известия Алтайского государственного университета. – 2010. – Вып. 1 (65). – С. 35-37.

36. Папин, А.А. О разрешимости в целом начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение магмы / А. А. Папин, М. А. Токарева // Известия Алтайского государственного университета. – 2017. – Вып. 1 (93). – С. 115–118.

37. Полубаринова - Кочина, П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова - Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.

38. Рахматулин, Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред / Х. А. Рахматулин // ПММ. — 1956. — Т. XX, вып. 2. – С. 184-195.

39. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.

40. Токарева, М.А. Корректность начально-краевых задач для уравнений фильтрации в пороупругих средах: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2018.

41. Токарева, М.А. Задача фильтрации жидкости в тонком слое льда / М. А. Токарева // Сборник трудов семнадцатой региональной конференции по математике "МАК-2014 посвященной 40-летию факультета математики и информационных технологий. Тексты докладов. (Барнаул, июнь 2014г.) / АлтГУ. - Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2014. - С. 77–78.

42. Токарева, М. А. Двумерная задача фильтрации в тонком пороупругом слое / М. А. Токарева // Известия Алтайского государственного университета. – 2013. – Вып. 1/1 (77). – С. 60-62.

43. Токарева, М. А. Конечное время стабилизации решения уравнений фильтрации жидкости в пороупругой среде / М. А. Токарева // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – Вып. 1-2(85). – С. 153-157.

44. Токарева, М. А. Об одной модели тающего льда / М. А. Токарева // Известия Алтайского государственного университета. – 2013. – Вып. 1/2 (77). – С. 48-51.

45. Френкель, Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве / Я. И. Френкель // Изв. Акад. Наук СССР. — 1944. — Т. VIII, №. 4. – С. 133—146.

46. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

47. Эдвардс, Р. Функциональный анализ. Теория и приложения / Р. Эдвардс. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.

48. Abourabia, A.M. Analytical solutions of the magma equations for rocks in a granular matrix / A. M. Abourabia, K. M. Hassan, A. M. Morad // Chaos Solutions Fract. — 2009. — Vol. 42. – P. 1170–1180.

49. Antontsev, S.N. Energy Methods for Free Boundary Problems. Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications / S. N. Antontsev, J. I. Diaz, S. Shmarev. – Washington D.C., 2002. – 331 p.

50. Athy, L . F. Density, porosity, and compaction of sedimentary rocks / L. F. Athy // Amer. Ass. Petrol. Geol. Bull. – 1930. – Vol. 14. – P. 1–24.

51. Audet, D.M. A mathematical for compaction in sedimentary basins / D.M. Audet, A. C. Fowler // Geophys. J. Int. – 1992. – Vol. 110. – P. 577-590.

52. Bear, J. Dynamics of Fluids in Porous Media / J. Bear. – Elsevier, New York, 1972. – 764 p.

53. Biot, M. A. General theory of three-dimensional consolidation / M. A. Biot // J. Appl. Phys. — 1941. — Vol.12, no. 2. – P. 155-164.

54. Biot, M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid / M. A. Biot // J. Acoust. Soc. Amer. -– 1956. -– Vol. 28, no. 2. -– P. 168–191.

55. Birchwood, R. A. A unified approach to geopressuring, low-permeability zone formation, and secondary porosity generation in sedimentary basins / R. A. Birchwood, D. L. Turcotte // J. Geophys. Res. – 1994. – Vol.99. – P. 20,051– 20,058.

56. Connolly, J. A. D. Devolatilization-generated fluid pressure and deformation-propagated fluid flow during prograde regional metamorphism / J. A. D. Connolly // J. Geophys. Res. – 1997. – Vol. 102. – P. 18,149–18,173.

57. Connolly, J. A. D. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock / J. A. D. Connolly, Y. Y. Podladchikov // Geodin. Acta. – 1998. – Vol. 11. – P. 55–84.

58. Connolly, J. A. D. Temperature-dependent viscoelastic compaction and compartmentalization in sedimentary

basins / J. A. D. Connolly, Y. Y. Podladchikov // Tectonophysics. – 2000. – Vol. 324. – P. 137– 168.

59. Coussy, O. Poromechanics / O. Coussy. – John Wiley and Sons, Chichester, U.K., 2004. – 298p.

60. DiBenedetto, E. Degenerate Parabolic Equations / E. DiBenedetto. – Springer-Verlag, 1993. – 387 p.

61. Domenico, P.A Phisical and Chemical Hydrogeology / P. A. Domenico, F. W. Schwartz // New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons, 1990. – 824 p.

62. Escher, J. Thin film equations with soluble surfactant and gravity: modeling and stability of steady states / J. Escher, M. Hillairet, P. Laurencot, C. Walker // Mathematische Nachrichten. – 2012. – Vol. 285. – P. 210–222.

63. Favini, A. Degenerate Nonlinear Diffusion Equations / A. Favini, G. Marinoschi. – Springer, 2012. – 143 p.

64. Fowler, A.C. A compaction model for melt transport in the Earth's asthenosphere, part 1, The basic model, in Magma Transport and Storage, edited by M.P. Ryan, pp. 3-14, Jhon Wiley, New York, 1990.

65. Fowler, A. Mathematical Geoscience / A. Fowler. – Springer-Verlag London Limited, 2011. – 904 p.

66. Fowler, A. C. Pressure solution and viscous compaction in sedimentary basins / A. C. Fowler, X. Yang // J. Geophys. Res. – 1999. – Vol. 104. – P. 12,989–12,997.

67. Fowler, A. C. Fast and Slow Compaction in Sedimentary Basins / A. C. Fowler, X. Yang // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1998. – Vol. 59, no. 1. – P. 365-385.

68. Geng, Y. Bifurcations of traveling wave solutions for the magma equation / Y. Geng, L. Zhang // Applied Mathematics and computation. — 2010. — Vol.217. – P. 1741-1748.

69. Koleva, M.N. Numerical analysis of one dimensional motion of magma without mass forces / Koleva M.N., Vulkov L.G. // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2020. – Vol. 366. – 112338.

70. McKenzie, D.P. The generation and compaction of partial melts / D. P. McKenzie // J. Petrol. – 1984. – Vol. 25. – P. 713-765.

71. Massey, B. S. Mechanics of fluids, 6th ed. / B. S. Massey. – Chapman and Hall, Boston, Mass, 1989. – 599 p.

72. Meirmanov, A. Mathematical Models for Poroelastic Flows, Atlantis Studies in Differential Equations, v.1 / Meirmanov A. – Amsterdam - Paris - Beijing, Atlantis Press, 2014.

73. Morency, C. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability / C. Morency, R. S. Huismans, C. Beaumont, P. Fullsack // Journal of Geophysical Research. – 2007. – Vol. 112.

74. Papin, A. A. Solvability of the system of equations of one-dimensional motion of a heat-conducting two-phase mixture / A. A. Papin, I. G. Akhmerova // Mathematical Notes. – 2010. – Vol. 87, no. 2. – P. 230-243.

75. Papin, A.A. On Local Solvability of the System of the Equations of One Dimensional Motion of Magma / A.A. Papin, M.A. Tokareva // Journal of Siberian Federal

University. Mathematics & Physics. – 2017. – Vol. 10(3). – P. 385–395.

76. Papin, A.A. Correctness of the initial-boundary problem of the compressible fluid filtration in a viscous porous medium / A.A. Papin, M.A. Tokareva // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. – 2017. – Vol. 894.

77. Plotnikov, P. Compressible Navier-Stokes equations: theory and shape optimization / P. Plotnikov, J. Sokolowski. – Basel: Birkhauser, 2012, – 474 p.

78. Poromechanics IV: Proceedings of the Fourth Biot Conference on Poromechanics, Including the Second Frank L. DiMaggio Symposium/ Edited by: Hoe I. Ling, Andrew Smyth, and Raimondo Betti. – Columbia University, New York, June 8-10, 2009. – 1179 p.

79. Poromechanics VI : proceedings of the sixth Biot Conference on Poromechanics / Edited by Matthieu Vandamme; Patrick Dangla; Jean-Michel Pereira; and Siavash Ghabezloo. – Reston, Virginia : American Society of Civil Engineers, 2017.

80. Rajagopal, K.L. Mechanics of mixtures / K.L. Rajagopal, L. Tao. – London: World Scientific Publishing, 1995. – 195 p.

81. Rudyak, V.Ya. Hierarchical sequence of models and deformation peculiarities of porous media saturated with fluids / V.Ya. Rudyak, O.B. Bocharov, A. V. Seryakov // Proceedings of the XLI Summer School-Conference Advanced Problems in Mechanics (APM-2013), 1-6 July , St-Petersburg. – 2013. – P. 183-190.

82. Saad, A. S. Numerical study of compositional compressible degenerate two-phase flow in

saturated–unsaturated heterogeneous porous media / A. S. Saad, B. Saad, M. Saad // Computers and Mathematics with Applications – 2016. – Vol. 71, Issue 2. – P. 565-584.

83. Scempton, A.W. Effective stress in soils, concrete and ricks / A. W. Scempton // Proceeding of the Conference on Pore Pressure and Suction in soils, Butterworths, London. – 1960. – P. 4-16.

84. Schneider, F. Mechanical and chemical compaction model for sedimentary basin simulators / F. Schneider, J. L. Potdevin, S. Wolf, I. Faille // Tectonophysics. – 1996. – Vol. 263. – P. 307—317.

85. Simpson, M. Degenerate dispersive equations arising in the study of magma dynamics / M. Simpson, M. Spiegelman, M.I. Weinstein // Nonlinearity. — 2007 — V.20, Issue 1. – P. 21-49.

86. Terzaghi, K. Die Berechnung der DurchlaËssigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen / K. Terzaghi // Sitzungsber. Akad. Wis. Wien, Math. Nat. Klasse, Abt. IIa. – 1923. — Vol. 132. – P. 125–138.

87. Terzaghi, K. Theoretical Soil Mechanics / K. Terzaghi. – New York: Jhon Wiley, 1943. – 528 p.

88. Tokareva, M. A. Localization of solutions of the equations of filtration in poroelastic media / M. A. Tokareva // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2015. – Vol. 8(4). – P. 467–477.

89. Tokareva, M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic

media / M. A. Tokareva // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – Vol. 722.

90. Tokareva, M. A. Global Solvability of a System of Equations of One-Dimensional Motion of a Viscous Fluid in a Deformable Viscous Porous Medium / Tokareva M. A., Papin A. A. // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2019. – Vol. 13, No. 2. – P. 350–362.

91. Tokareva, M. A. Mathematical model of fluids motion in poroelastic snow-ice cover / Tokareva M. A., Papin A. A. (в печати)

92. Vazquez, J.L. Smoothing and decay estimates for nonlinear diffusion equations. Equations of porous medium type. Oxford lecture series in mathematics and its applications, Vol. 33 / J. L. Vazquez. – Oxford university press Oxford, 2006. – 234 pp.

93. Vedernikov, V. V. Mechanics equations for porous medium saturated by a two-phase liquid / V. V. Vedernikov, V. N. Nikolaevskii // Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza. — 1978. — No. 5. – P. 769–773.

94. Yang, X. S. Nonlinear viscoelastic compaction in sedimentary basins / X. S. Yang // Nonlinear Proceeses in Geophysics. – 2000. – Vol. 7. – P. 1-7.

Оглавление

Предисловие **3**

1 Вспомогательные сведения **8**

1 Определяющие уравнения 8

2 Функциональные пространства 13

3 Специальные неравенства и теоремы вложения 18

2 Классическая разрешимость одномерных задач фильтрации жидкости в вязкой деформируемой среде **21**

1 Локальная разрешимость по времени 22

1.1 Постановка задачи и формулировка основного результата 22

1.2 Локальная разрешимость 25

2 Локальная разрешимость по времени в поле силы тяжести 41

3 Локальная разрешимость по времени в случае полного уравнения баланса сил 51

4 Глобальная разрешимость по времени . . . 58

4.1 Локальная разрешимость 59

4.2 Глобальная разрешимость 66

3 Локализация решений уравнений фильтрации в упругой деформируемой среде **75**

1 Конечная скорость распространения возмущений 75

2 Метастабильная локализация решения . . . 89

3 Конечное время стабилизации решения . . 93

4 Примеры глобальной разрешимости задач фильтрации несжимаемой жидкости в вязкоупругой среде **98**

1 Глобальная разрешимость автомодельной задачи 98

2 Фильтрация вязкой жидкости в тонком вязкоупругом слое 110

2.1 Введение малого параметра 111

2.2 Предельный переход 113

2.3 Решение в квадратурах 117

3 О движении воды в деформируемом льду . 121

Заключение **125**

Библиографический список **127**

Научное издание

М.А. Токарева, А.А. Папин

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРОУПРУГИХ СРЕДАХ

Монография

Публикуется в авторской редакции

Подготовка оригинал-макета:
М.А.Токарева

Подписано в печать 21.09.2020. Формат $60 \times 84/16$.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 8,20.
Тираж 150 экз. Заказ 266.

Издательство Алтайского государственного университета

Типография издательства Алтайского государственного университета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66