# ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Часть 2

Издательство Алтайского
государственного университета
Барнаул, 1999

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

# ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

## Часть 2

Методическое пособие
для практических занятий

Издательство Алтайского
государственного университета
Барнаул, 1999

Составитель:В.Э.Гейнеман

Данное методическое пособие содержит примеры и задачи для практических занятий по курсу ТФКП. Краткий теоретический материал поможет решать задачи не заглядывая в учебники.

Рецензент: к.ф.-м.н. А.Н.Саженков

План УМД 1997г., п.

Подписано в печать 1.11.97

Формат $60 \times 90/16$. Бумага для множительных аппаратов. Печать офсетная

Тираж 150 экз. Заказ 34

Типография Алтайского государственного университета: 656099, Барнаул, ул.Димитрова, 66

## Предисловие

Университетский курс ТФКП (теория функций комплексного переменного) читается в течение года, V, VI семестры, и является естественным продолжением курса "Математический анализ". Это методическое пособие предназначено для студентов и преподавателей математического факультета АГУ. Практические занятия можно строить по приведенным темам или объединять в одно занятие несколько тем.

Имеется краткое изложение используемого теоретического материала, приведены типичные примеры, предлагаются задачи для аудиторных и домашних занятий. Все задачи взяты из задачника Л.И. Волковыского, Г.Л. Лунца, И.Г. Арамановича "Сборник задач по теории функций комплексного переменного." М.: Изд-во Наука, 1975

## Интегрирование функций комплексного переменного

Пусть Г спрямляемая кривая Жордана с началом $\alpha$ и концом $\beta$. Пусть на Г задана непрерывная функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.


Разобьем Г произвольным образом точками $z_k = x_k + iy_k$, $k = 0, 1, 2, ..., n$, $z_0 = \alpha$, $z_n = \beta$, на "n" частей. На каждой дуге $z_k z_{k+1}$ произвольно выберем точку $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$.

Составим сумму

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

где $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$.

Сумму $S_n$ можно переписать в виде

$$S_n = S_n^1 + iS_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1}[u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] +$$

$$+ i\sum_{k=0}^{n-1}[u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k].$$

Обозначим через $|\Delta z_k|$ длину дуги $z_k z_{k+1}$.

Так как $f(z)$ -непрерывная функция, а $\Gamma$ -спрямляемая кривая, то существует

$$\lim_{max|\Delta z_k|\to 0} S_n = \int_\Gamma udx - vdy + i\int_\Gamma udy + vdx.$$

**Определение.** Если существует предел интегральных сумм $\lim_{max|\Delta z_k|\to 0} S_n$,то этот предел называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой $\Gamma$ и обозначается $\int\limits_\Gamma f(z)dz$.

Свойства интеграла:

1. Пусть кривая $\Gamma$ задана уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b]$, тогда

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

2. Пусть $\Gamma^-$ кривая с началом $\beta$ и концом $\alpha$, тогда

$$\int_{\Gamma^-} f(z)dz = -\int_\Gamma f(z)dz.$$

3. Пусть $\Gamma = \bigcup_{k=1}^m \Gamma_k, \quad \Gamma_k \cap \Gamma_j = \oslash, \quad k \neq j$, тогда

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} f(z)dz,$$

причем направление интегрирования на $\Gamma_k$ порождается направлением интегрирования на $\Gamma$.

4. Пусть функции $f_k(z)$, $k = 1, 2, ..., m$, заданы на $\Gamma$ и $c_k$, $k = 1, 2, ..., m$, постоянные числа, тогда

$$\int\limits_\Gamma (\sum_{k=1}^{m} c_k f_k(z))dz = \sum_{k=1}^{m} c_k \int\limits_\Gamma f_k(z)dz.$$

5.

$$|\int\limits_\Gamma f(z)dz| \leq \int\limits_\Gamma |f(z)||dz|.$$

**Примеры:** 1. Непосредственным суммированием доказать равенство

$$\int\limits_\alpha^\beta zdz = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2).$$

**Решение.** Пусть $\Gamma$ - произвольная кривая с началом $\alpha$ и концом $\beta$. Разобьем $\Gamma$ произвольным образом точками $z_k$, $k = 0, 1, ..., n$, $z_0 = \alpha, z_n = \beta$, на "n" частей. Пусть $\zeta_k = z_k$, тогда

$$S_n^1 = \sum_{k=0}^{n-1} z_k \Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1} z_k(z_{k+1} - z_k) =$$

$$= z_0 z_1 - z_0^2 + z_1 z_2 - z_1^2 + z_2 z_3 - z_2^2 + ... + z_{n-1} z_n - z_{n-1}^2.$$

Пусть теперь $\zeta_k = z_{k+1}$, тогда

$$S_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} \Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}(z_{k+1} - z_k) =$$

$$= z_1^2 - z_1 z_0 + z_2^2 - z_2 z_1 + z_3^2 - z_3 z_2 + ... + z_n^2 - z_n z_{n-1}.$$

Таким образом

$$\int\limits_\alpha^\beta zdz = \int\limits_\Gamma zdz = \frac{1}{2} \lim_{max|\Delta z_k| to 0} (S_n^1 + S_n^2) = \frac{1}{2}(z_n^2 - z_0^2) = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2).$$

Что и требовалось доказать. Отсюда, в частности, следует, что $\int\limits_\alpha^\beta zdz$ не зависит от выбора кривой, соединяющей точки $\alpha$ и $\beta$, а зависит только от начала и конца кривой.

2. Пусть $\Gamma$ - замкнутая кривая Жордана, ограничивающая площадь $S$. Доказать, что

$$\int\limits_{\Gamma} xdz = iS$$

**Решение.**

$$\int\limits_{\Gamma} xdz = \int\limits_{\Gamma} x(dx + idy) = \int\limits_{\Gamma} xdx + ixdy.$$

Применим формулу Грина

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_S (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdz,$$

$P = x, \quad Q = ix.$

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} xdz = \iint_S (\frac{\partial(ix)}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y})dxdy = i\iint_S dxdy = iS.$$

Что и требовалось доказать.

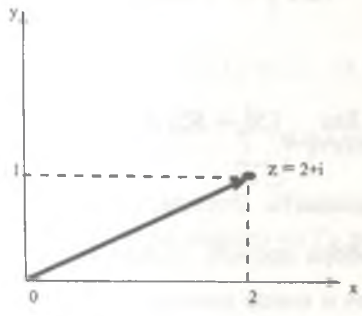
3. Вычислить интеграл $I = \int xdz$ по следующим путям:

1) по радиусу-вектору точки $z = 2 + i$;

2) по полуокружности $|z| = 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi$ (начало пути в точке $z = 1$;

3) по окружности $|z - a| = R$.

**Решение.** 1) Радиус-вектор точки $z = 2 + i$ это отрезок прямой проходящей через точки $(0, 0)$ и $(2, 1)$.

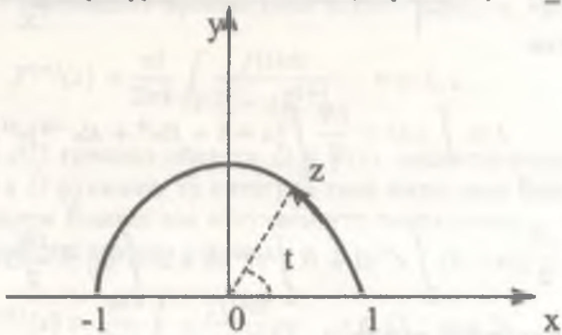


Уравнение этой прямой $y = \frac{1}{2}x$ или $x = t, \quad y = \frac{1}{2}t$, $t \in [0, 2]$. Тогда

$$I = \int_0^{2+i} x dz = \int_0^2 t d(t + i\frac{1}{2}t) = \int_0^2 (1 + \frac{1}{2}i) t dt =$$

$$= (1 + \frac{1}{2}i)\frac{t^2}{2}\Big|_0^2 = 2(1 + \frac{1}{2}i) = 2 + i$$

2). Уравнение полуокружности $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$




Отсюда

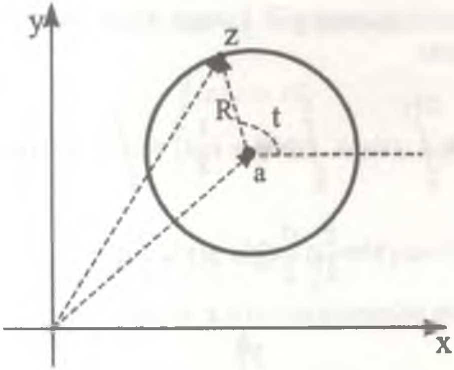
$$I = \int x dz = \int_0^\pi \cos t d(\cos t + i \sin t) = \int_0^\pi (-\cos t \sin t + i \cos^2 t) dt =$$

$$= (\frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{it}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_0^\pi = \frac{i\pi}{2}.$$

3). Уравнение окружности $z = a + Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

$$x = Rea + R\cos t = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{1}{2}(a + \bar{a} + Re^{it} + Re^{-it}),$$

$dz = Rie^{it} dt$.




Тогда

$$I = \int x dz = \frac{iR}{2}\int_0^{2\pi}(a+\bar{a}+Re^{it}+Re^{-it})e^{it}dt =$$

$$= \frac{iR}{2}[(a+\bar{a})\int_0^{2\pi} e^{it}dt + R\int_0^{2\pi} e^{2it}dt + R\int_0^{2\pi} dt] = \frac{iR}{2}2\pi R = \pi R^2 i.$$

**Аудиторное занятие**
NN 387(2), 389, 390, 393(1, 2).
**Домашнее задание**
NN 387(3), 388(2), 391, 392, 393(1, 2)

## Интегральная теорема и интегральная формула Коши

**Теорема Коши.** Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $D$ и $\gamma$ - любая замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана, лежащая в $D$, то

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Далее, для аналитической в области $D$ с жордановой кусочно-гладкой границей $\Gamma$ и непрерывной в $\bar{D}$ функции $f(z)$ справедлива интегральная формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t-z} = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0, & z \in C\bar{D}, \end{cases}$$

где $C\bar{D}$- дополнение замыкания области $D$. Интеграл, стоящий в левой части равенства называется интегралом Коши.

Пусть $\Gamma$ - замкнутая или разомкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана и $f(t)$ - заданная на $\Gamma$ непрерывная функция. Тогда существует интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}, \quad z \notin \Gamma.$$

Этот интеграл называется интегралом типа интеграла Коши.

Функция $F(z)$обладает производной любого порядка, причем

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если $\Gamma = \partial D$ граница области $D$ и $f(z)$ -аналитическая в $D$ и непрерывная в $\bar{D}$ функция, то интеграл типа интеграла Коши становится интегралом Коши и мы получаем,что аналитическая функция имеет производную любого порядка

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}}, \quad z \in D, \quad n \in \mathbf{N}.$$

**Примеры.**

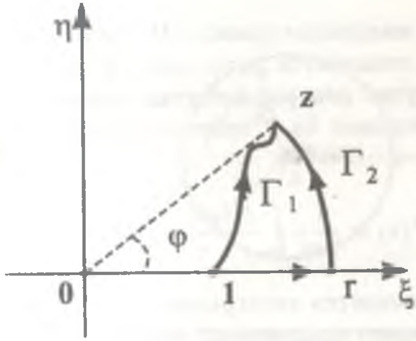
1. Показать, что если путь не проходит через начало координат, то

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln r + i\varphi + 2\pi ik,$$

где $k$- целое число, указывающее, сколько раз путь интегрирования обходит начало координат ($z = re^{i\varphi}$).

**Решение.**

Пусть кривая, соединяющая точки 1 и $z$, не обходит начало координат. Из теоремы Коши следует, что интеграл не зависит от выбора такой кривой.




В самом деле

$$0 = \int_{\Gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\Gamma_1^-} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\Gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta} - \int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Отсюда

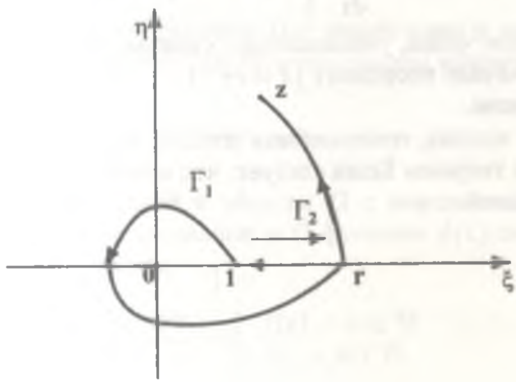
$$\int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\Gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

Для вычисления интеграла выберем путь $\Gamma_2$, тогда

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\Gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^r \frac{d\xi}{\xi} + \int_0^{\varphi} \frac{d(re^{i\alpha})}{re^{i\alpha}} =$$

$$= \ln|\xi| |_1^r + \int_0^{\varphi} \frac{rie^{i\alpha} d\alpha}{re^{i\alpha}} = \ln r + i\varphi.$$

Пусть теперь кривая интегрирования обходит начало координат $(k = 1)$.



Разобьем кривую интегрирования на две кривые $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$. $\Gamma_1$ - замкнутая кривая, которая получается если соединить точки r и 1, а $\Gamma_2$ - это кривая что и выше. Тогда из интегральной формулы Коши

$$\int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\Gamma_1} \frac{1 d\zeta}{\zeta - 0} = 2\pi i.$$

и

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\Gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i + \ln r + i\varphi.$$

Если кривая интегрирования обходит начало координат k раз, то поступая аналогично, мы получим k слагаемых $2\pi i$ и плюс интеграл по $\Gamma_2$, то есть

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln r + i\varphi + 2\pi k i.$$

Если k-отрицательное, то это означает, что обход кривой происходит по часовой стрелке, то есть отрицательный относительно внутренности кривой.

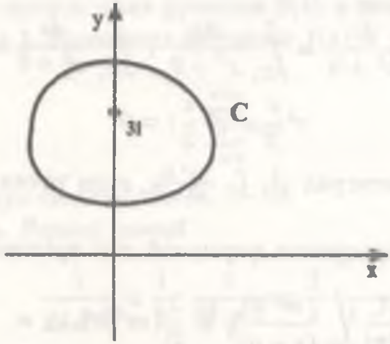
2. Вычислить интеграл $\int_C \frac{dz}{z^2+9}$, если

1) точка 3i лежит внутри контура C, а точка -3i вне его;

2) точка -3i лежит внутри контура C, а точка 3i вне его;

3) точки $\pm 3i$ лежат внутри контура C.

**Решение.**




Из интегральной формулы Коши получаем

$$\int_C \frac{dz}{z^2+9} = \int_C \frac{dz}{(z-3i)(z-(-3i))} =$$

$$\int_C \frac{dz}{(z-3i)(z-(-3i))} =$$

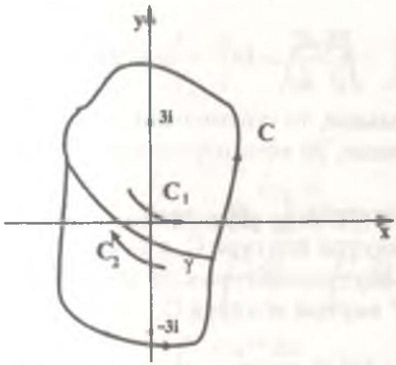
$$= \int_C \frac{\frac{1}{z-(-3i)}dz}{z-3i} = 2\pi i \frac{1}{3i-(-3i)} = \frac{\pi}{3}.$$

2). Аналогично

$$\int_C \frac{dz}{z^2+9} = \int_C \frac{dz}{(z-3i)(z-(-3i))} =$$

$$= \int_C \frac{\frac{1}{z-3i}dz}{z-(-3i)} = 2\pi i \frac{1}{-3i-3i} = -\frac{\pi}{3}.$$

3).Разобъем контур C на два контура $C_1$и $C_2$, добавив произвольную кривую $\gamma$. Тогда




$$\int_C \frac{dz}{z^2+9} = \int_{C_1} \frac{dz}{z^2+9} + \int_{C_2} \frac{dz}{z^2+9} =$$

$$= \frac{\pi}{3} + (-\frac{\pi}{3}) = 0.$$

3. Вычислить интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}$, если точка a лежит внутри контура C.

**Решение** Воспользуемся формулой для производной интеграла Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^3} = \frac{1}{2!}(ze^z)''|_{z=a} =$$

$$= \frac{1}{2}(e^z + e^z + ze^z)|_{z=a} = \frac{1}{2}(2e^a + ae^a) = e^a\frac{a+2}{2}$$

## Аудиторное задание

NN404, 418

## Домашнее задание

NN405, 415, 416

## Ряд Тейлора

**Теорема** (Тейлора). Аналитическая в области $D$ функция $f(z)$ в окрестности каждой точки $z_0 \in D$ представима в виде степенного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

радиус сходимости $R$ которого не меньше, чем расстояние $d$ от $z_0$ до границы области $D$.

Из доказательства теоремы следует, что коэффициенты $a_k$ представляются в виде

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

где $f^{(k)}(z_0)$ - производная функции $f(z)$ в точке $z_0$, $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$.

**Примеры** 1. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{az+b}$, $b \neq 0$. в степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$$

и найти радиус сходимости $R$.

**Решение.** *Первый способ*

$$\frac{1}{az+b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\frac{az}{b} + 1} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{a}{b} z)}$$

Если $|-\frac{a}{b} z| < 1$, то можно воспользоваться равенством

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1 + q + q^2 + ..., \quad |q| < 1.$$

Тогда

$$\frac{1}{az+b}=\frac{1}{b}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{a}{b}z\right)^k=\frac{1}{b}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{a}{b}\right)^k z^k=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{a^k}{b^{k+1}}z^k.$$

Так как $|-\frac{a}{b}z|<1$, то $|z|<|\frac{b}{a}|$. Отсюда радиус сходимости $R=|\frac{b}{a}|$.

*Второй способ.* Найдем коэффициенты $c_k$ по формуле $c_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

$f^{(0)}=f(0)=\frac{1}{b}$,

$f'(0)=((az+b)^{-1})|'_{z=0}=((-1)(az+b)^{-2}\cdot a)_{z=0}=(-1)\frac{a}{b^2}$,

$f''(0)=((-1)(az+b)^{-2}\cdot a)'_{z=0}=((-1)(-2)(az+b)^{-3}\cdot a^2)_{z=0}=(-1)^2 2!\frac{a^2}{b^3}$,

$f'''(0)=((-1)(-2)(az+b)^{-3}\cdot a^2)'_{z=0}=$
$=((-1)(-2)(-3)(az+b)^{-4}\cdot a^3)_{z=0}=(-1)^3 3!\frac{a^3}{b^4}$,

и так далее.

Методом математической индукции можно доказать, что $f^{(k)}(0)=(-1)^k k!\frac{a^k}{b^{k+1}}$.

Тогда

$$\frac{1}{az+b}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{a^k}{b^{k+1}}z^k.$$

Аналитичность функции $\frac{1}{az+b}$ нарушается в точке $-\frac{b}{a}$. В этой точке функция просто не определена. Из теоремы Тейлора получаем, что радиус сходимости $R=|-\frac{b}{a}-0|=|\frac{b}{a}|$.

2. Разложить функцию $f(z)=\frac{z^2}{(z+1)^2}$ в степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty}c_k z^n$ и найти радиус сходимости.

**Решение.** Представим функцию в виде $\frac{z^2}{(z+1)^2}=1-\frac{2}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}$. Разложим $\frac{1}{z+1}$ в ряд

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^k,\quad |z|,1.$$

Так как $\frac{1}{(z+1)^2}=-(\frac{1}{z+1})'$, то

$$\frac{1}{(z+1)^2}=-\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^k\Big)'=-\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k k z^{k-1},\quad |z|<1.$$

Отсюда

$$\frac{z^2}{(z+1)^2} = 1 - 2\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^k - \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k k z^{k-1} =$$

$$= 1 - 2\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^k - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}(k+1)z^k =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k 2z^k + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k (k+1)z^k =$$

$$= 1 - 2 - \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k 2z^k + 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k (k+1)z^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k (k-1)z^k = \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k (k-1)z^k.$$

Радиус сходимости $R = 1$.

3. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{z+2}$ в ряд по степеням $(z-1)$ и найти радиус сходимости.

**Решение.** Введем обозначение $t = z - 1$. Тогда

$$f(z) = \frac{z}{z+2} = \frac{t+1}{t+3} = \varphi(t).$$

Разложим функцию $\varphi(t)$ в ряд по степеням $t$.

$$\frac{t+1}{t+3} = 1 - \frac{2}{t+3} = 1 - \frac{2}{3(1-(-\frac{t}{3}))} =$$

$$= 1 - \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{t}{3}\right)^k = 1 + 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{3^{k+1}}t^k =$$

$$= \frac{1}{3} + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{3^{k+1}}(z-1)^k, \quad \left|-\frac{t}{3}\right| < 1, \quad |t| < 3, \quad |z-1| < 3.$$

Радиус сходимости $R = 3$.

4. Найти первые 5 членов разложения в ряд по степеням $z$ функции $f(z) = e^{z\sin z}$.

**Решение.** Воспользуемся разложениями

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} z^{2k-1} + \ldots$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k}{k!} + \ldots$$

Первые 5 членов разложения функции $f(z)$ будут иметь вид

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4.$$

Поэтому в разложении

$$z \sin z = z^2 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \ldots$$

можно ограничиться первыми двумя слагаемыми, а в разложении $e^t = e^{z \sin z}$ - первыми тремя слагаемыми.

$$e^{z \sin z} = 1 + (z^2 - \frac{z^4}{3!}) + \frac{1}{2}(z^2 - \frac{z^4}{3!})^2 + 0(z^5) =$$

$$1 + z^2 - \frac{z^4}{6} + \frac{1}{2} z^4 + 0(z^5) = 1 + z^2 + \frac{z^4}{3} + 0(z^5).$$

### Аудиторное задание

NN459, 469, 474.

### Домашнее задание

NN457, 461, 468, 472, 475.

### Ряд Лорана

**Теорема (Лорана)** Аналитическая в кольце $K : r < |z - z_0| < R$ функция $f(z)$ в каждой точке $z \in K$ представляется в виде ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k = f(z),$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{k+1}}, \quad k = \pm1, \pm2, \ldots,$$

а $\gamma$ - окружность $|t - z_0| = \delta, \quad r < \delta < R$.

Может оказаться, что $r = 0$, тогда говорят, что $f(z)$ разлагается в ряд лорана в проколотой окрестности точки $z_0$. Если $R = +\infty$, то говорят о разложении функции $f(z)$ в окрестности бесконечно-удаленной точки.

**Примеры.** 1. Функцию $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точек $z = 0, \quad z = 1, \quad z = \infty$.

**Решение.** Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности нуля, то есть по степеням $z$. $\frac{1}{z} = z^{-1}$ уже степень $z$. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = z^{-1}\cdot\frac{1}{1-z} = z^{-1}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty} z^k =$$

$$= \frac{1}{z}(1 + z + z^2 + \ldots + z^k + \ldots) = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{+\infty} z^k, \quad 0 < |z| < 1.$$

Теперь разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 1$, то есть по степеням $(z-1)$.

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = -\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z} = -\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-1+1} =$$

$$-\frac{1}{(z-1)}\cdot\frac{1}{1-[-(z-1)]} = -\frac{1}{z-1}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}[-(z-1)]^k =$$

$$= -\frac{1}{z-1}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(z-1)^k = -\frac{1}{z-1} + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(z-1)^k,$$

$$0 < |z-1| < 1.$$

В окрестности точки $z = \infty$ разложение можно искать двумя способами.

*Первый способ.* Разложение должно быть по степеням $z$. Поэтому

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\cdot\left(-\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} =$$

$$-\frac{1}{z^2}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k=-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{k+2}}=-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{z^k},\quad |z|>1.$$

*Второй способ.* Сделаем замену $t=\frac{1}{z}$. Тогда

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{t}{1-\frac{1}{t}}=\frac{t^2}{t-1}=\varphi(t).$$

Разложим функцию $\varphi(t)$ в окрестности нуля, то есть по степеням $t$.

$$\varphi(t)=\frac{t^2}{t-1}=-t^2\frac{1}{1-t}=-t^2\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}t^k=-\sum_{k=2}^{+\infty}t^k,\quad |t|<1.$$

Возвращаясь к переменной $z$, получим

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{z^k},\quad \left|\frac{1}{z}\right|<1,\quad |z|>1.$$

2. Функцию $f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(0<|a|<|b|)$ разложить в ряд Лорана в кольце $|a|<|z|<|b|$.

**Решение.** Представим функцию $f(z)$ в виде

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)$$

и разложим $\frac{1}{z-a}$ в окрестности точки $z=\infty$, а $\frac{1}{z-b}$ - в окрестности точки $z=0$.

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{a}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{z^k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{z^{k+1}}$$

$$\left|\frac{a}{z}\right|<1,\quad |z|>|a|.$$

$$\frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{b}}=-\frac{1}{b}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{b^k}=-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{b^{k+1}}$$

$$\left|\frac{z}{b}\right|<1,\quad |z|<|b|.$$

Тогда в кольце $|a| < |z| < |b|$ и то, и другое разложение имеют место. Окончательно получаем

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z^k}{b^{k+1}} + \frac{a^k}{z^{k+1}}\right),$$

$$|a| < |z| < |b|.$$

3. Разложить функцию $f(z) = \cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 2$.

**Решение.** Представим функцию $f(z)$ в виде

$$\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2} = \cos\frac{z^2-4z+4-4}{(z-2)^2} = \cos\left(1 - \frac{4}{(z-2)^2}\right) =$$

$$= \cos 1\cos\frac{4}{(z-2)^2} + \sin 1\sin\frac{4}{(z-2)^2}.$$

Теперь воспользуемся разложениями функции $\cos t$ и $\sin t$.

$$\cos\frac{4}{(z-2)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k 4^{2k}}{(2k)!(z-2)^{4k}},$$

$$\sin\frac{4}{(z-2)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1} 4^{2k-1}}{(2k-1)!(z-2)^{4k-2}}.$$

Тогда

$$\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2} = \cos 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k 4^{2k}\cos 1}{(2k)!(z-2)^{4k}} + \frac{(-1)^{k-1} 4^{2k-1}\sin 1}{(2k-1)!(z-2)^{4k-2}},$$

$$0 < |z-2| < +\infty.$$

**Аудиторное задание**

NN543, 546, 547, 554.

**Домашнее задание**

NN548, 551, 552, 554.

## Особые точки аналитических функций

**Определение.** Конечная точка $z_0$ называется изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$, если в некоторой окрестности $|z - z_0| < \delta$ точки $z_0$ функция $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки $z_0$ (в которой она может быть и не задана).

Согласно теореме Лорана функция $f(z)$ в проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$ точки $z_0$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k. \qquad (*)$$

В зависимости от того, будет ли множество отличных от нуля коэффициентов при отрицательных степенях $(z - z_0)$ в разложении (*) *пусто*, *конечно* или *бесконечно*, изолированная особая точка $z_0$ называется соответсвенно *устранимой*, *полюсом* или *существенно особой точкой* функции $f(z)$.

**Теорема.** Изолированная особая точка $z_0$ функции $f(z)$ является

(I) устранимой точкой тогда и только тогда, когда существует конечный

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A < \infty;$$

(II) полюсом тогда и тлько тогда, когда существует

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty;$$

(III) существенно особой точкой тогда и только тогда, когда $f(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z \to z_0$.

**Определение.** Пусть $z_0$ полюс функции $f(z)$ и пусть $m$ наибольшее натуральное число среди индексов $k$, отличных от нуля коэффициентов $a_{-k}$ при отрицательных степенях $(z - z_0)$ разложения

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{m} a_{-k} (z - z_0)^{-k}.$$

Тогда $m$ называется порядком полюса $z_0$. При $m = 1$ полюс называется простым.

**Теорема.** Если точка $z_0$ нуль аналитической функции $f(z)$ порядка $m$, то в некоторой окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$ функция

$F(z) = \frac{1}{f(z)}$ - аналитическая и $z_0$ является полюсом порядка $m$ функции $F(z)$.

**Теорема.** Если в некоторой окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$ существенно особой точки $z_0$ аналитическая функция $f(z) \neq 0$, то эта точка является существенно особой и для функции $\dfrac{1}{f(z)}$.

**Примеры.** 1. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1}{z - z^3}$, выяснить их характер и исследовать поведение функции на бесконечности.

**Решение.** Функция $f(z)$ не определена в точках $z_0 = 0, \quad z_1 = 1, \quad, z_2 = -1$. В остальных точках функция $f(z)$ аналитична, как отношение двух аналитических функций. Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$.

$$\frac{1}{z - z^3} = \frac{1}{z(1 - z^2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}(z^2)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2k-1} = \frac{1}{z} + z + z^3 + z^5 + \ldots, \quad |z| < 1.$$

Из разложения следует, что $z_0$ полюс и, так как $a_{-1} \neq 0, \quad m = 1$, то полюс простой (первого порядка). В точке $z_1 = 1$

$$\frac{1}{z - z^3} = -\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z(1+z)} = -\frac{1}{(z-1)}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{(z-1)}\left(\frac{1}{z-1+1} - \frac{1}{z-1+2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{(z-1)}\left[\frac{1}{1-(-(z-1))} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z-1}{2})}\right] =$$

$$= -\frac{1}{(z-1)}\cdot\left[\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(z-1)^k - \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{2^k}\right] =$$

$$= -\frac{1}{(z-1)}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)(z-1)^k =$$

$$-\frac{1}{(z-1)}\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4}(z-1) + \frac{7}{8}(z-1)^2 - \frac{15}{16}(z-1)^3 + \ldots\right] =$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)}+\frac{3}{4}-\frac{7}{8}(z-1)+\frac{15}{16}(z-1)^2-\ldots,\quad |z-1|<1.$$

Отсюда $z_1$ - простой полюс.

Аналогично в точке $z_2=-1$.

$$\frac{1}{z-z^3}=\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z+1}[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}]=$$

$$=\frac{1}{z+1}\cdot[\frac{1}{z+1-2}-\frac{1}{z+1-1}]=$$

$$=\frac{1}{z+1}\cdot[\frac{1}{1-(z+1)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}]=$$

$$=\frac{1}{z+1}[\sum_{k=0}^{+\infty}(z+1)^k-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z+1)^k}{2^k}]=$$

$$\frac{1}{z+1}\sum_{k=0}^{+\infty}(1-\frac{1}{2^{k+1}})(z+1)^k=$$

$$\frac{1}{z+1}[\frac{1}{2}+\frac{3}{4}(z+1)+\frac{7}{8}(z+1)^2+\frac{15}{16}(z+1)^3+\ldots]=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}(z+1)+\frac{15}{16}(z+1)^2+\ldots,\quad |z+1|<1.$$

То есть $z_2=-1$ тоже простой полюс. Для того чтобы выяснить поведение функции на бесконечности дадим сначала определение. Пусть $z=\infty$ изолированная особая точка функции $f(z)$. Если точка $\zeta=0$ *устранимая,полюс или существенно особая точка* функции $f(\frac{1}{\zeta})$,то $z=\infty$ называется соответственно *устронимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой функции* $f(z)$.

В окресности точки $z=\infty$ функция $f(z)$ разлагается в ряд

$$f(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}a_{-k}z^{-k}+\sum_{k=0}^{+\infty}a_kz^{-k}.\quad (**)$$

Следовательно, в зависимости от того, будет ли множество атличных от нуля коэффициентов при положительных степенях $z$ в разложении (**) пусто, конечно или бесконечно, $z=\infty$ является соответственно устронимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой функции $f(z)$.

Разложим функцию

$$f(z) = \frac{1}{z - z^3}$$

в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$.

$$\frac{1}{z - z^3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1 - z^2} = -\frac{1}{z^3}\frac{1}{1 - \frac{1}{z^2}} =$$

$$= -\frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{2k}} = -\frac{1}{z^3}(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \ldots) =$$

$$= -\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^7} - \ldots, \quad |z| > 1.$$

Отсюда $z = \infty$ устранимая особая точка.

2. Найти особые точки функции

$$f(z) = \frac{z^5}{(1 - z)^2}$$

,выяснить их характер и исследовать поведение функции на бесконечности.

**Решение.**

$$f(z) = z^5\frac{1}{(1 - z)^2} = \varphi(z)\psi(z).$$

Функция $\varphi(z) = z^5$-аналитична всюду. Функция $\psi(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ - аналитична всюду, кроме точки $z = 1$. Так как для функции $\frac{1}{\psi(z)} = (1 - z)^2$ точка $z = 1$ является нулем 2-го порядка, то для $\psi(z)$ точка $z = 1$ полюс 2-го порядка, а, следовательно, и для функции $f(z)$ $z = 1$ - полюс 2-го порядка.

Рассмотрим функцию $f(z)$ в точке $z = \infty$.

$$f(\frac{1}{\zeta}) = \frac{1}{\zeta^5(1 - \frac{1}{\zeta})^2} = \frac{1}{\zeta^3(\zeta - 1)^2}.$$

Для функции $\frac{1}{f(\frac{1}{\zeta})}$ точка $\zeta = 0$ является нулем 3-го порядка. Следовательно, точка $z = \infty$ полюс 3-го порядка для функции $f(z)$.

3. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$, выяснить их характер и исследовать поведение $f(z)$ на бесконечности.

**Решение.** Особыми точками функции $f(z)$ являются $z_0 = 0, z_k = 2\pi ki, k = \pm1, \pm2, \ldots$. Точки $z_k, k = \pm1, \pm2, \ldots$, являются простыми полюсами функции $\frac{1}{e^z-1}$ и функции $f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$, так как функция $\frac{1}{z}$ аналитическая в точках $z_k$ $k = \pm1, \pm2, \ldots$.

В окрестности точки $z_0 = 0$ имеем

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots) - 1} = \frac{1}{z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots} =$$

$$\frac{1}{z(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots)} = \frac{1}{z\varphi(z)}.$$

Функция $\varphi(z)$ - аналитическая в $z_0 = 0$, $\varphi(0) = 1 \neq 0$. Следовательно, функция $\frac{1}{\varphi(z)}$ - аналитическая в окрестности точки $z_0 = 0$ и, в силу теоремы Тейлора, разлагается в ряд

$$\frac{1}{\varphi(z)} = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,$$

где $b_1, b_2, \ldots$ коэффициенты ряда Тейлора. Отсюда

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z}(1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots) = \frac{1}{z} + b_1 + b_2 z + \ldots$$

и

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} = b_1 + b_2 z + \ldots$$

То есть $z_0 = 0$ устранимая особая точка функции $f(z)$.

Точка $z = \infty$ не является изолированной особой точкой. Она является предельной точкой полюсов $z_k = 2\pi ki$, $k = \pm1, \pm2, \ldots$.

4. Найти особые точки функции $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$, выяснить их характер и исследовать поведение функции на бесконечности.

**Решение.** Функция $f(z)$ как суперпозиция аналитических функций аналитична всюду, кроме точки $z = 1$.

Далее

$$e^{\frac{z}{1-z}} = e^{-\frac{z}{z-1}} = e^{-\frac{z-1+1}{z-1}} = e^{-(1+\frac{1}{z-1})} =$$

$$= e^{-1}e^{-\frac{1}{z-1}} = e^{-1}(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} - \ldots).$$

Следовательно, $z = 1$ существенно особая точка функции $f(z)$.

Рассмотрим

$$\lim_{z\to\infty} e^{\frac{z}{1-z}} = e^{\lim_{z\to\infty}\frac{z}{1-z}} = e^{-1}$$

. Существует конечный предел, а, значит, $z=\infty$ устранимая особая точка функции $f(z)$.

### Аудиторное задание

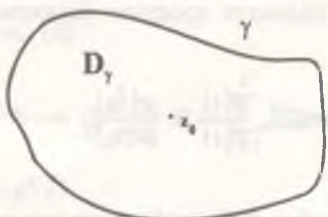
NN566, 568, 573, 575.

### Домашнее задание

NN569, 574, 580, 585, 594.

### Вычисление вычетов

Пусть $z_0$ - изолированная особая точка аналитической функции $f(z)$, а $\gamma$ - произвольная кусочно-гладкая замкнутая кривая Жордана, окружающая $z_0$, причем область $D_\gamma$ с границей $\gamma$ не содержит других особых точек, кроме $z_0$.




В силу теоремы Коши интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz$$

не зависит от выбора кривой $\gamma$ и называется *вычетом* функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0$.

Для вычета будем пользоваться обозначением

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \mathrm{Res}_{z=z_0} f(z).$$

При вычислении вычета можно считать, что $\gamma$ - окружность $|z - z_0| = \delta$ достаточно малого радиуса.

Легко доказывается, что для конечной изолированной особой точки $z_0$

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} \tag{1}$$

где $a_{-1}$ - коэффициент при $(z-z_0)^{-1}$ в разложении функции $f(z)$ в окрестности $z_0$ в ряд Лорана.

Если $z_0 = \infty$ и $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$ в окрестности точки $z_0 = \infty$ то

$$\mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\epsilon} f(z)dz = -a_{-1} \tag{2}$$

Пусть $z_0$ конечная точка и функция $f(z)$ имеет в $z_0$ полюс порядка $m$. Тогда

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] \tag{3}$$

В частности, если $z_0$ является простым полюсом функции $\dfrac{\varphi(z)}{\phi(z)}$, то

$$\mathrm{Res}_{z=\infty}\frac{\varphi(z)}{\phi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\phi\prime(z_0)}. \tag{4}$$

Справедлива следующая

**Теорема.** Пусть функция $f(z)$ аналитична всюду в плоскости $\mathbf{C}$, за исключением конечного числа точек $z_k$ $(k = 1, 2, ...n)$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}_{z=k_k} f(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = 0. \tag{5}$$

**Примеры.** В следующих примерах требуется найти вычеты указанных функций относительно всех изолированных особых точек и относительно $\infty$ (если она не является предельной для особых точек).

1. $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^5}$

**Решение.** $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z^2)} = \dfrac{1}{z^3(1-z)(1+z)}$.

Особыми точками являются $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = -1$. Все эти точки - полюсы, $z_0 = 0$ - полюс 3-го порядка, $z_1$ и $z_2$ - простые полюсы.

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} \frac{1}{z^3 - z^5} = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} [z^3 \frac{1}{z^3(1-z^2)}] =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} (\frac{2z}{(1-z^2)^2}) = \lim_{z \to 0} \frac{(1-z^2)^2 - z2(1-z^2)(-2z)}{(1-z^2)^4} = 1.$$

В силу формулы (4)

$$\mathrm{Res}_{z=z_1} \frac{1}{z^3 - z^5} = \mathrm{Res}_{z=1} \frac{-\frac{1}{z^3(z+1)}}{z-1} = \frac{-\frac{1}{1^3(1+1)}}{1} = -\frac{1}{2}.$$

Аналогично,

$$\mathrm{Res}_{z=z_2} \frac{1}{z^3 - z^5} = \mathrm{Res}_{z=-1} \frac{\frac{1}{z^3(1-z)}}{z+1} = -\frac{1}{2}.$$

В силу формулы (5)

$$\mathrm{Res}_{z=\infty} \frac{1}{z^3 - z^5} = -\sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}_{z=z_k} \frac{1}{z^3 - z^5} = 0.$$

2. $F(z) = \mathrm{ctg}^2 z$.

**Решение.** $\mathrm{ctg}^2 z = \frac{\cos^2 z}{sin^2 z} = \frac{2\cos^2 z}{1 - \cos 2z}$. Особыми точками являются точки $z_k = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$. Это полюсы 2-го порядка, так как $z_k$ нули кратности 2 знаменателя $\sin^2 z$. Далее

$$\frac{2\cos^2 z}{1 - \cos 2z} = \frac{2\cos^2 z}{1 - \cos 2(z - k\pi)} =$$

$$= \frac{2\cos^2 z}{1 - [1 - \frac{(2(z-k\pi))^2}{2!} + \frac{(2(z-k\pi))^4}{4!} - \ldots]} =$$

$$= \frac{2\cos^2 z}{(2(z-k\pi))^2[\frac{1}{2!} - \frac{(2(z-k\pi))^2}{4!} + \ldots]} =$$

$$= \frac{2\cos^2 z}{(2(z-k\pi))^2\varphi(z)};$$

где $\varphi(z) = \frac{1}{2!} - \frac{(2(z-k\pi))^2}{4!} + \ldots, \quad \varphi(k\pi) \neq 0$. В силу формулы (3)

$$\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \lim_{z\to k\pi} \frac{d}{dz}\left(\frac{2\cos^2 z}{\varphi(z)}\right) =$$

$$= 2\lim_{z\to k\pi} \frac{-2\cos z\sin z\varphi(z) - \varphi\prime(z)\cos^2 z}{\varphi^2(z)} =$$

$$2\frac{-\varphi\prime(k\pi)\cos^2(k\pi)}{\varphi^2(k\pi)} = 0,$$

так как $\varphi\prime(z) = -\frac{2}{4!}(2(z-k\pi)) + \ldots$ и $\varphi\prime(k\pi) = 0$.

Точка $z = \infty$ является предельной для точек $z_k$.

3. $f(z) = z^3\cos\frac{1}{z-2}$.

**Решение.** Особой точкой этой функции является $z = 2$, причем она является существенно особой точкой. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 2$.

$$z^3 = (z-2+2)^3 = (z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8.$$

$$\cos\frac{1}{z-2} = 1 - \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{4!(z-2)^4} - \ldots.$$

$$f(z) = [(z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8]\cdot$$

$$[1 - \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{4!(z-2)^4} - \ldots].$$

В силу формулы (1)

$$\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = a_{-1} = -\frac{12}{2!} + \frac{1}{4!} = -\frac{12}{2} + \frac{1}{24} = \frac{1-144}{24} = -\frac{143}{24}.$$

Тогда $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{143}{24}$.

### Аудиторное задание

NN622, 624, 627, 629,632, 635.

## Домашнее задание

NN625, 626, 628, 631, 636.

## Вычисление интегралов

*Непосредственное применение теоремы о вычетах.*

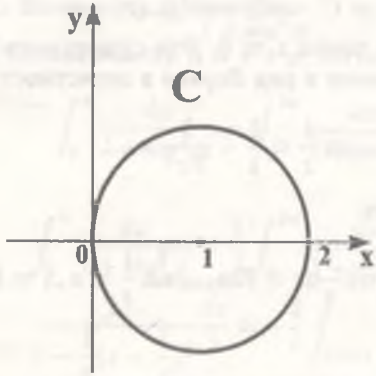
**Теорема.** Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $\mathbf{D}$ и непрерывна в $\bar{\mathbf{D}}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_k \in \mathbf{D}, k = 1, 2, ..., n$, $\quad \Gamma = \partial D$-граница области $\mathbf{D}$, замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана. Тогда

$$\int_{\Gamma=\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

**Примеры.** Вычислить интегралы, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении.

1. $\int_C \dfrac{dz}{z^4 + 1}$, где $C$ - окружность $x^2 + y^2 = 2x$

**Решение.** $x^2 + y^2 = 2x$




Особыми точками подинтегральной функции являются решения уравнения $z^4 + 1 = 0$. Тогда

$$z_k = \sqrt[4]{-1} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Внутренности контура $C$ принадлежат лишь $z_0$ и $z_3$. Это простые полюсы. Поэтому

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{(4z^3)_{z=z_0}} = \frac{1}{4z_0^3} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}(-1+i)} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1+i),$$

$$\mathrm{Res}_{z=z_3} \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4}\frac{1}{z_3^3} = -\frac{1}{2\sqrt{2}(1+i)} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i).$$

Тогда

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i(\mathrm{Res}_{z=z_0} \frac{1}{z^4+1} + \mathrm{Res}_{z=z_3} \frac{1}{z^4+1}) =$$

$$= 2\pi i[-\frac{1}{4\sqrt{2}}(1+i) - \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i)] = -\frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

2. $\frac{1}{2\pi i}\int_C \sin\frac{1}{z}dz$, где $C$ - окружность $|z| = r$.

**Решение.** Особая точка $z = 0$. Это существенно особая точка. Найдем $a_{-1}$ в разложении в ряд Лорана в окрестности нуля.

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \ldots.$$

Отсюда $a_{-1} = 1$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \sin\frac{1}{z}dz = \mathrm{Res}_{z=0}\sin\frac{1}{z} = a_{-1} = 1$$

### Аудиторное задание

NN658, 661.

### Домашнее задание

NN659, 660, 663.

*Определенные интегралы.*

Рассмотрим интеграл $I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$, где $R$ - рациональная функция относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ и непрерывная при

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Сделаем замену $z = e^{i\varphi}$. Тогда $dz = ie^{i\varphi}d\varphi = izd\varphi$, то есть $d\varphi = \dfrac{dz}{iz}$ и

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}),$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}).$$

Следовательно,

$$I_1 = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} R[\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})]\frac{dz}{z} =$$

$$= 2\pi \sum \operatorname{Res} R[\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})]\frac{1}{z},$$

где суммирование ведется по всем особым точкам, расположенным в круге $|z| < 1$.

**Пример 1.** Вычислить $\int_0^\pi \dfrac{d\varphi}{1 + \sin^2\varphi}$.

**Решение.** Сделав замену $\alpha = \pi + \varphi$, легко получим, что

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 + \sin^2\varphi} = \int_\pi^{2\pi} \frac{d\alpha}{1 + \sin^2\alpha}.$$

Тогда

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 + \sin^2\varphi} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \sin^2\varphi} =$$

$$\frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}(z - \frac{1}{z})^2}\frac{dz}{z} = -\frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{zdz}{z^4 - 6z^2 + 1} =$$

$$-\frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{zdz}{(z - \alpha_1)(z + \alpha_1)(z - \alpha_2)(z + \alpha_2)},$$

где $\alpha_1 = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} > 1, \quad \alpha_2 = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} < 1$

$$\operatorname{Res}_{z=\alpha_2} \frac{z}{z^4 - 6z^2 + 1} =$$

$$\lim_{z\to\alpha_2} \frac{(z - \alpha_2)z}{(z - \alpha_1)(z + \alpha_1)(z - \alpha_2)(z + \alpha_2)} =$$

$$\frac{\alpha_2}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2+\alpha_1)(\alpha_2+\alpha_2)}=$$

$$\frac{1}{2(\alpha_2^2-\alpha_1^2)}=\frac{1}{2(3-2\sqrt{2}-3-2\sqrt{2})}=-\frac{1}{8\sqrt{2}}.$$

$$\mathrm{Res}_{z=-\alpha_2}\frac{z}{z^4-6z^2+1}=$$

$$=\lim_{z\to-\alpha_2}\frac{(z+\alpha_2)z}{(z-\alpha_1)(z+\alpha_1)(z-\alpha_2)(z+\alpha_2)}=$$

$$\frac{-\alpha_2}{(-\alpha_2-\alpha_1)(-\alpha_2+\alpha_1)(-\alpha_2-\alpha_2)}=$$

$$\frac{(-1)}{2(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha 2)}=-\frac{1}{2(\alpha_1^2-\alpha_2^2)}=$$

$$=-\frac{1}{2(3+2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2})}=-\frac{1}{8\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$I_1=2\pi(-2)(\mathrm{Res}_{z=\alpha_2}\frac{z}{z^4-6z^2+1}+$$

$$+\mathrm{Res}_{z=-\alpha_2}\frac{z}{z^4-6z^2+1}=-4\pi(-\frac{1}{8\sqrt{2}}-\frac{1}{8\sqrt{2}})=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)dx,$$

где $f(x)$ - непрерывная функция в $Imz\geq 0$ и аналитическая всюду в $Imz>0$, кроме конечного числа изолированных особых точек $z_1,z_2,...,z_n$ , причем при достаточно больших $|z|$ выполняется неравенство

$$|f(z)|<\frac{M}{|z|^2},$$

где $M>0$ некоторая константа.

Тогда

$$I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}_{z=z_k}f(z).$$

**Пример.** Вычислить $\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2},\quad (a>0).$

**Решение.** Так как

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \left| \begin{array}{l} t=-x \\ dx=-dt \end{array} \right| =$$

$$= -\int_0^{-\infty} \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^2},$$

то

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

Функция $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$ непрерывная в $Imz \geq 0$ и аналитическая всюду в $Imz > 0$, кроме точки $ia$.

$$|f(z)| = \frac{|z|^2}{|z^2+a^2|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^4|1+\dfrac{a^2}{z^2}|^2} \leq \frac{4}{|z|^2},$$

так как $|1+\dfrac{a^2}{z^2}| \geq 1-\dfrac{a^2}{|z^2|} \geq \dfrac{1}{2}$, при $\dfrac{a^2}{|z|^2} \leq \dfrac{1}{2}$, $\quad |z|^2 \geq 2a^2, \quad |z| \geq \sqrt{2}a.$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \pi i \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} =$$

$$= \pi i \lim_{z\to ia} \frac{d}{dz}[\frac{(z-ia)^2z^2}{(z^2+a^2)^2}] = \pi i \lim_{z\to ia} \frac{d}{dz}[\frac{z^2}{(z+ia)^2}] =$$

$$= \pi i \lim_{z\to ia} \frac{2z(z+ia)^2 - 2z^2(z+ia)}{(z+ia)^4} = \pi i \lim_{z\to ia} \frac{z(z+ia)-z^2}{(z+ia)^3} =$$

$$= 2\pi i \frac{-a^2}{8i^3a^3} = \frac{\pi}{4a}.$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$$

, где $f(z)$ - непрерывная функция в $Imz \geq 0$ и аналитическая всюду в $Imz > 0$, кроме конечного числа точек $z_1, z_2, ..., z_n$ и $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$ равномерно относительно $\varphi = \arg z$.

Тогда $I_3 = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)e^{iz}$.

**Пример.** Вычислить $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^4+1}dx$.

**Решение.** Так как подинтегральная функция четная, то

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^4+1}dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^4+1}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}dx=$$

$$\frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^4+1}dx-\frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{-ix}}{x^4+1}dx=$$

$$\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^4+1}dx=\pi(\mathrm{Res}_{z=\alpha_1}\frac{ze^{iz}}{z^4+1}+\mathrm{Res}_{z=\alpha_2}\frac{ze^{iz}}{z^4+1}),$$

где $\alpha_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \alpha_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$$\mathrm{Res}_{z=\alpha_1}\frac{ze^{iz}}{z^4+1}=\lim_{z\to\alpha_1}\frac{(z-\alpha_1)ze^{iz}}{(z-\alpha_1)(z-\bar{\alpha}_1)(z-\alpha_2)(z-\bar{\alpha}_2)}=$$

$$=\frac{\alpha_1e^{i\alpha_1}}{(\alpha_1-\bar{\alpha}_1)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\bar{\alpha}_2)}=$$

$$=\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})e^{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}}{i\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})}=\frac{1}{4i}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{4i}(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}+i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

$$\mathrm{Res}_{z=\alpha_2}\frac{ze^{iz}}{z^4+1}=\lim_{z\to\alpha_2}\frac{(z-\alpha_2)ze^{iz}}{(z-\alpha_1)(z-\bar{\alpha}_1)(z-\alpha_2)(z-\bar{\alpha}_2)}=$$

$$=\frac{\alpha_2e^{i\alpha_2}}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\bar{\alpha}_1)(\alpha_2-\bar{\alpha}_2)}=$$

$$=\frac{(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}}{-\sqrt{2}(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})(i\sqrt{2})}=\frac{1}{4i}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$= -\frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{4i}(\cos\frac{\sqrt{2}}{2} - i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Аудиторное задание**

NN673, 682, 691(1).

**Домашнее задание**

NN674, 676, 685, 686, 691(2), 692.